Concours de recrutement | **Épreuve d'analyse**
Mathématiques | **Mardi, le 11 novembre 2008**
15h-18h

I. 1) Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \log_x(x+1) & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudiez f (domaine de définition, continuité, limites, asymptotes éventuelles, position de C_f par rapport à ses asymptotes éventuelles, dérivabilité à droite en 0, sens de variation, courbe représentative C_f dans un repère orthonormé).

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \log_{x+1}(x)$.

Etudiez g (domaine de définition, continuité, limites, asymptotes éventuelles, position de C_g par rapport à ses asymptotes éventuelles, sens de variation, courbe représentative C_g dans le même repère orthonormé).

3) Résolvez algébriquement dans IR l'inéquation,

$$\log_x(x+1) \geq \log_{x+1}(x).$$

9 points

II. Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = x^2 + 2m\ln(x) + m$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan d'unité 3 cm.

1) Déterminez suivant les valeurs du paramètre réel m, les extrema éventuels de f_m.

2) Déterminez l'ensemble des points communs à toutes les courbes C_m $(m \in \mathbb{R})$.

3) Soit C_1 la courbe représentative de f_1 dans un repère orthonormé d'unité 3 cm.

Calculez en cm^2, l'aire du domaine délimité par C_1, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \alpha$ $\quad (0 < \alpha < e^{-1})$ et la droite d'équation $x = e^{-1}$.

4) Démontrez que f_1 définit une bijection de $]0;+\infty[$ sur un ensemble J à préciser.

Démontrez que l'application réciproque de f_1 est dérivable sur J.

Calculez $f_1(1)$ et $\left(f_1^{-1}\right)'(2)$.

5) Démontrez que pour tout réel $x \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right]$, $4 \leq \dfrac{f_1(x) - f_1\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \leq 5$.

Déduisez-en un encadrement de $f_1(x)$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$ par deux fonctions affines.

Déduisez-en un encadrement à 0,01 près de l'unique racine de $f_1(x)$.

8 points

III. On considère $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t \, dt \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\})$.

1) Calculez A_1 et A_2.

2) Trouvez une relation de récurrence entre A_n et A_{n-2} (pour $n \geq 2$).

Déduisez-en A_3 et A_6.

3 points

Q1

1) Posons $f(x) = \begin{cases} \log_x (x+1) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ C.E. $x+1>0$ et $x \neq 1$, $x>0$

$\text{dom} f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

continuité

f est continue sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

cont. en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log_x (x+1)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

$$= 0$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,

donc il s'ensuit que f est continue en 0.

$\text{dom}_c f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

limites et asymptotes éventuelles

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = 1$ A.H. d'éq $y=1$ (en $+\infty$, i.e. à droite)

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas, mais f admet une asymptote verticale d'éq. A.V. $x=1$

position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $y=1$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$; $\log_x(x+1) - 1$

$$= \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\ln(x)} > 0$$

$x+1 = x$ {

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$	-1	$-$	$\|\|$	$+$	
pos. relative		$\frac{A.H}{\mathcal{C}_f}$	$\|\|$	$\frac{\mathcal{C}_f}{A.H.}$	

dérivabilité à droite a 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1) \to 0}{x\ln(x) \to 0^+}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\ln(x) + 1}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ dérivable à droite a 0

dom f' = dom f

$\forall x \in$ dom f', $f'(x) = \dfrac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{\underbrace{x(x+1)\ln^2 x}_{>0 \text{ au dom} f'}}$

si $x \in]0;1[$ $\quad x\ln x < 0$ $\quad \Rightarrow \quad f'(x) \leq 0$

$(x+1)\ln(x+1) > 0$

si $x \in]1;+\infty[$ $\quad \underset{>0}{x} < \underset{>0}{(x+1)}$

$\ln \underset{>0}{x} < \underset{>0}{\ln(x+1)}$ $\quad f'(x) < 0$

$x\ln x < \ln(x+1)\ (x+1)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
f	$0 \searrow -\infty$		$\|\|$	$+\infty \searrow -\infty$	

2) $g(x) = \log_{x+1}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$

C.E. $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$
$x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$
$x>0$

$\text{dom } g =]0;+\infty[$

g est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

$\text{dom}_c\, g =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = -\infty$ A.V. $\equiv x=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ A.H. $\equiv y = 1$ (à droite)

position de C_g par rapport à $h \equiv y=1$:

$\forall x \in \text{dom } g$, $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} - 1 = 0$ $x < x+1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(x) - \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = 0$ ↯ $\Rightarrow \ln(x) < \ln(x+1)$

Ainsi $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} < 1$ sur $]0;+\infty[$

h est au dessus de C_g

$\forall x \in dom\, g'$

$$g'(x) = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x)}{(x+1)}}{\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x\,(x+1)\,\ln^2(x+1)}$$

sur $]0;1]$ $\quad \underbrace{(x+1)}_{>0}\underbrace{\ln(x+1)}_{>0} > \underbrace{\underbrace{x}_{>0}\ \underbrace{\ln x}_{\leq 0}}_{<0}$

sur $]1;+\infty[$ $\quad \underbrace{(x+1)}_{>0} > \underbrace{x}_{>0}$ $\quad \downarrow \ln \nearrow$

$\underbrace{\ln(x+1)}_{>0} > \underbrace{\ln x}_{>0}$

$\Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) > x\ln(x)$

ainsi $\quad g'(x) > 0 \quad$ sur $\quad dom\, g' = dom\, g$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	1

$g(1) = 0$

3) $(I) \Leftrightarrow \log_x(x+1) \geq \log_{x+1}(x)$

domaine d'étude $\quad E =]0;1[\cup]1;+\infty[$

$$(I) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \geq \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2(x)}{\ln(x)\ln(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln(x+1) - \ln(x))\,(\ln(x+1) + \ln(x))}{\ln(x)\ln(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\ \ln(x^2+x)}{\ln(x)\ \ln(x+1)}}_{(*)} \geq 0$$

-) $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \neq 0$

-) $\ln(x^2+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-1=0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\cancel{x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$

$\notin$ dom

$\frac{x+1}{x} > 1$

$\Leftrightarrow x+1 > x$

$\Leftrightarrow 1 > 0$

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x^2+x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)\ln(x+1)$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$(*)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$$S = \left]0 ; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left]1 ; +\infty\right[$$

Q2

Soit $m \in \mathbb{R}$

et considérons $f_m(x) = x^2 + 2m \ln(x) + m$

1) Si $m = 0$, $f_0(x) = x^2$ $\quad$ dom $f_0 = \mathbb{R}$

$(0;0)$ est un minimum de f_0

Si $m \neq 0$, $\quad$ dom $f_m =]0;+\infty[$

Supposons $m \neq 0$,

dom f'_m = dom f_m = $]0;+\infty[$

$\forall x \in$ dom f'_m, on a

$f'_m(x) = 2x + \frac{2m}{x} =$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2+m)}{x} = 0$

si $m > 0$, $\quad 2(x^2+m) > 0 \rightarrow$ pas d'extrema

$f'_m(x) > 0$ sur dom f'_m

si $m < 0$ $\quad x^2 + m = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{-m}$ ou $\underbrace{x = -\sqrt{-m}}_{\text{à rejeter}}$

x	0		$\sqrt{-m}$		
$f'_m(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$(\sqrt{-m}; -2m\ln(\sqrt{-m}))$

"

$(\sqrt{-m}; m\ln(-m))$

si $m > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_m(x) = -\infty$

si $m < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_m(x) = +\infty$

$\forall m \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2m\ln(x) + m$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \big(\underbrace{1 + 2m\frac{\ln(x)}{x^2} + m}_{\to 1}\big)$

$= +\infty$

$\frac{df}{\partial m}=0$ ou $f_m(x) = f_{m'}(x)$ $\forall x \in \text{dom } f_m \cap \text{dom } f_{m'}$

ou $M(x,y) \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{C}_{f_m}$

$\Leftrightarrow$ $y = x^2 + 2m\ln(x) + m$ $\forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $y - x^2 = 2m\ln(x) + m = m(2\ln(x)+1)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = x^2 \\ 2\ln(x)+1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = \frac{1}{e} \\ x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

Le point commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_{f_m}$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\frac{1}{e}\right)$

3) $f_1(x) = x^2 + 2\ln(x) + 1$ $\forall x \in]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f_1(e^{-1}) = e^{-2} - 1 < 0$

comme f_1 est strictement croissante

on a que $f_1 < 0$ sur $]0;e^{-1}[\supset]\alpha, e^{-1}[$

$\mathcal{A} = -\int_\alpha^{e^{-1}} f_1(x)$ $(1\text{ u.a.} \mathrel{\hat=} 3^2\text{ cm}^2)$

$= -\int_\alpha^{e^{-1}} x^2 + 2\ln(x) + 1$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + 2x\ln x - 2x + x\right]_\alpha^{e^{-1}}$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + 2x\ln x - x\right]_\alpha^{e^{-1}}$

$= -\left(\frac{1}{3e^3} - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} - \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha\ln\alpha + \alpha\right)$ u.a

$= -\frac{1}{3e^3} + \frac{3}{e} + \frac{\alpha^3}{3} + 2\alpha\ln\alpha - \alpha$ u.a

$= -\frac{3}{e^3} + \frac{27}{e} + 3\alpha^3 + 18\alpha\ln\alpha - 9\alpha$ cm^2

4) Comme $f_1' > 0$ et f_1 est continue sur $]0;+\infty[$

f_1 est injective sur $]0,+\infty[$.

$f_1(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Ainsi f_1 est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $y = \mathbb{R}$

vu que $f_1' \overbrace{\cancel{(x)} > 0}^{\text{ie } f_1' \neq 0}$, et f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$,

on peut déduire que (f_1^{-1}) est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_1(1) = 1 + 2 \cdot 0 + 1 = 2$

Ainsi $(f_1^{-1})'(2) = \frac{1}{f_1'(1)} = \frac{1}{2 \cdot 1 + \frac{2}{1}} = \frac{1}{4}$

5) f_1 est continue sur $]0,+\infty[\supset [\frac{1}{2};1]$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f_1'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

$f_1'(\frac{1}{2}) = 1 + 4 = 5$

$f_1'(1) = 2 + 2 = 4$

ainsi $\forall x \in [\frac{1}{2};1]$

$f'(x) \searrow$

$\forall x \in]0;+\infty[$ $f_1''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2-2}{x^2}$

$= \frac{2(x^2-1)}{x^2}$

	0		1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	
$f_1''(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Il s'ensuit que

$$4 \leq f'(x) \leq 5 \quad \text{sur } [\tfrac{1}{2};1]$$

ainsi par l'inégalité des accroissements finis

$$4 \leq \frac{f_1(x) - f_1(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \leq 5 \qquad \forall x \in]\tfrac{1}{2};1]$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - 2 + f_1(\tfrac{1}{2}) \leq f_1(x) \leq 5x - \tfrac{5}{2} + f_1(\tfrac{1}{2})$$

avec $f_1(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} - 2\ln(2)$

encadrement de $f_1(x)$ sur $]\frac{1}{2};1]$

$$\underbrace{4x - \tfrac{3}{4} - 2\ln(2)}_{g(x)} \leq f_1(x) \leq \underbrace{5x - \tfrac{5}{4} - 2\ln(2)}_{h(x)}$$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0{,}534$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0{,}596$

si $f_1(\alpha) = 0$, alors $\quad 0{,}534 \leq \alpha \leq 0{,}596$

Q3

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t \, dt$$

1) $A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt$

$t \quad \cos t$
$1 \quad \sin t$

$$= [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt$$

$t^2 \quad \cos t$
$2t \quad \sin t$

$$= [t^2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int 2t \sin t \, dt$$

$t \quad \sin t$
$1 \quad -\cos t$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2\left([-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t \, dt$$

$$= [t^n \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \sin t \, dt$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left([-t^{n-1}\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-2} \cos t \, dt\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(0 + (n-1)A_{n-2}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)A_{n-2}$$

ainsi $A_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\cdot 2\, A_1$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$$

$$A_6 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 - 6\cdot 5\, A_4$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 - 6\cdot 5\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 4\cdot 3\cdot A_2\right)$$

$$= \frac{\pi^6}{64} - 30\,\frac{\pi^4}{16} + 30\cdot 12\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$$

$$= \frac{\pi^6}{64} - \frac{15}{8}\pi^4 + 90\pi^2 - 720$$

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Mardi, le 21 avril 2009

15h-18h

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)$.

a) Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez la continuité de f.
Déterminez les asymptotes éventuelles au graphe de f.

b) Étudiez la dérivabilité de f et calculez et simplifiez $f'(x)$.

c) Utilisez les résultats précédents pour exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(x)$ en distinguant deux intervalles.

d) Démontrez que la restriction g de f à $I=\left]-\infty;1\right]$ définit une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

e) Déterminez $g^{-1}(x)$.

f) Calculez le nombre dérivé de g^{-1} en 0 : - d'abord en utilisant $g^{-1}(x)$,
- puis sans utiliser $g^{-1}(x)$. **8 points**

II. Soit la fonction $f_{a,b}$ définie par $f_{a,b}(x)=e^{ax}-e^{bx}$ et soit $C_{a,b}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, a et b étant des paramètres réels tels que $0<a<b$.

1) Étudiez $f_{a,b}$ (domaine de définition, continuité, limites, asymptotes et branches paraboliques éventuelles, sens de variation et extrema éventuels, concavité et points d'inflexion éventuels, courbe représentative $C_{a,b}$. Prenez $a=1$ et $b=4$ pour le graphique.)

2) Calculez en fonction des réels a, b et λ ($0<a<b$ et $\lambda>0$) l'aire S du domaine délimité par $C_{a,b}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=-\lambda$. Calculez la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$. **6 points**

III. On considère $A_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ et $A_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

1) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq A_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Indication : Déterminez un encadrement de $\sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [0;1]$.

2) Calculez A_0 et A_1.

3) Calculez A_n en fonction de A_{n-2} pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. <u>**6 points**</u>

Q 1

Posons $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)$

a) C.E. $\cdot)$ $2(x^2+1) > 0$ toujours vrai

$\cdot)$ $-1 \leq \dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \leq 1$

ssi $-\sqrt{2(x^2+1)} \leq x+1 \leq \sqrt{2(x^2+1)}$

ssi $(x+1)^2 \leq 2(x^2+1)$

ssi $x^2+2x+1 \leq 2x^2+2$

ssi $0 \leq x^2-2x+1 = (x-1)^2$ toujours vrai

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

f est continue sur son domaine de definition, $\text{dom}_c f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right) \overset{x \text{ resp } (-x) \text{ en évidence}}{=} \arcsin\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \pm\dfrac{\pi}{4}$

A.H (en $+\infty$, à droite) : $h_1 \equiv y = \frac{\pi}{4}$

A.H (en $-\infty$, à gauche) : $h_2 \equiv y = -\frac{\pi}{4}$

b) La fonction $\arcsin : x \longmapsto \arcsin(x)$ est derivable sur $]-1;1[$

Or $-1 < \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right) < 1$

$\Leftrightarrow 0 < (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x \neq 1$

Dérivabilité en 1

calculons d'abord $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\left(\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}}} \cdot \frac{\sqrt{2(x^2+1)} - (x+1)\frac{1}{2\sqrt{2(x^2+1)}}\cancel{4x}^{2}}{2(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2(x^2+1)-(x+1)^2}{2(x^2+1)}}} \cdot \frac{2(x^2+1)-(x+1)2x}{2(x^2+1)\sqrt{2(x^2+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{2x^2+2-x^2-2x-1}} \cdot \frac{2x^2+2-2x^2-2x}{2(x^2+1)\sqrt{2(x^2+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{(x-1)^2}} \cdot \frac{(1-x)}{(x^2+1)\sqrt{2(x^2+1)}}$$

$$= \frac{(1-x)}{|x-1|(x^2+1)}$$

$$= -\frac{\operatorname{sign}(x-1)}{(x^2+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}\end{array}\right] \neq$$

f n'est pas dérivable en 1, mais à gauche de 1 et à droite de 1

↳ deux demi-tangentes verticales

$(1, f(1))$ est un point anguleux

c) Soit $x \in I_1 =]1;+\infty[$ qui est un ouvert convexe

$\forall x \in I_1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2+1} = -\arctan'(x)$

Par le thm de l'ouvert convexe $f(x) = -\arctan(x) + k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = k_1$

on a $f(x) = -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4}$ sur I_1

Pour $x \in I_2 =]-\infty ; 1[$ qui est aussi un ouvert connexe on a

$\forall x \in I_2, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \arctan'(x)$

Par le thm de l'ouvert connexe

$$f(x) = \arctan(x) + k_2 \quad k_2 \in \mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) - \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

on a donc $\forall x \in I_2, \quad f(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$ sur I_2

en 1 : $\quad f(1) = \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{x \to 1^+} \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4}$

ainsi $\quad f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x \leq 1 \\ -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) Posons $g = f|_I$ avec $I =]-\infty ; 1]$

sur cet intervalle, on a $\forall x \in I \quad g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$

on a $g(]-\infty ; 1]) =]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}] = J$

$\left.\begin{array}{l} g \text{ est continue sur } I \\ \text{et } g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \text{ (g strictement croissante)} \end{array}\right\}$ g est injective sur I

Il s'ensuite que

$$g : I \longrightarrow img =: J$$

est une bijection (la surjectivité est obtenue par construction).

e) Soit $y \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$ et $x \in]-\infty ; 1]$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y - \frac{\pi}{4}}_{\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]} = \arctan(x)$$

(*) tan est une bijection entre $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \tan\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = x$$

ainsi $g^{-1}(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $x \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$

f) $\forall x \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[\ni 0$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos^2(x - \frac{\pi}{4})}$$

d'où $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})} = 2$

Ensuite notons que

$$\forall x \in]-\infty ; 1[: \underset{\underset{\underset{1}{\parallel}}{(id)'(x)}}{\parallel}{(g^{-1} \circ g)'(x)} = (g^{-1})'(g(x)) \cdot g'(x)$$

d'où $(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

ainsi $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Q2

Posons $f_{ab}(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tq $0 < a < b$

1) $\operatorname{dom} f_{ab} = \mathbb{R}$

$f_{a,b}$ est continue sur son domaine de définition , $\operatorname{dom}_c f_{ab} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{ax} - e^{bx} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{ax}}_{\to +\infty \atop 0} \Big(1 - \underbrace{e^{(b-a)x}}_{\to +\infty \atop 0}\Big) = -\infty \atop 0$$

$f_{a,b}$ admet une A.H (en $-\infty$, i.e. à gauche) : $h_1 \equiv y = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{a e^{ax} - b e^{bx}}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^{ax}\left(a - b e^{(b-a)x}\right) = -\infty$$

$C_{f_{a,b}}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en ($+\infty$, à droite)

$\operatorname{dom} f'_{a,b} = \operatorname{dom} f_{a,b}$
$\forall x \in \operatorname{dom} f'_{ab}$, on a $f'(x) = a e^{ax} - b e^{bx}$

$$\begin{aligned} f'_{ab}(x) \geq 0 &\iff e^{ax}\left(a - b e^{(b-a)x}\right) \geq 0 \\ &\iff a - b\, e^{(b-a)x} \geq 0 \\ &\iff \frac{a}{b} \geq e^{(b-a)x} \\ &\iff \ln\left(\frac{a}{b}\right) \geq (b-a)x \\ &\iff x \leq \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right) {\scriptstyle <0}}{b-a \,{\scriptstyle >0}}}_{<0} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{b-a}$		$+\infty$
$f'_{ab}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{ab}(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$

$$f_{ab}\left(\frac{\ln(\frac{a}{b})}{b-a}\right) = e^{\frac{a}{b-a}\ln(\frac{a}{b})} - e^{\frac{b}{b-a}\ln(\frac{a}{b})}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b-a}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b-a}} > 0 \quad \text{car } \frac{a}{b} < 1 \quad (a<b)$$

$\mathrm{dom}\, f''_{ab} = \mathrm{dom}\, f'_{ab}$

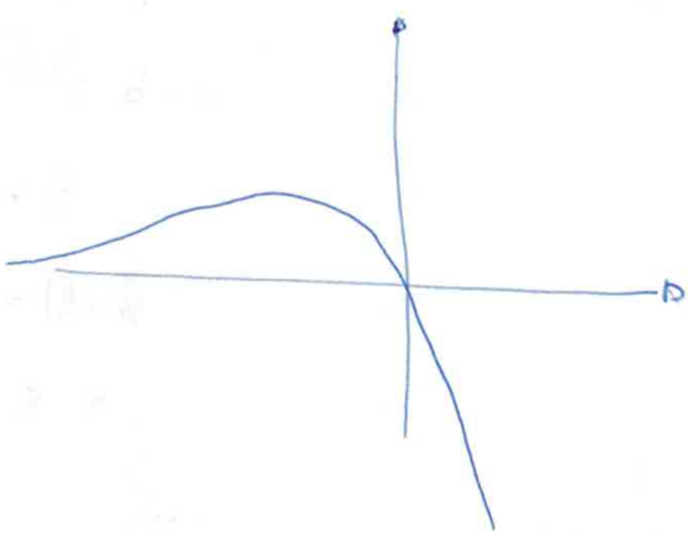
$\forall x \in \mathrm{dom}\, f'_{ab} : f''_{ab}(x) = a^2 e^{ax} - b^2 e^{ax}$

$$f''_{ab}(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)}{b^2-a^2} = \underbrace{\frac{2\ln(\frac{a}{b}) < 0}{b^2-a^2 > 0}}_{<0}$$

	$-\infty$	$\frac{2\ln(\frac{a}{b})}{b^2-a^2}$	$+\infty$
$f''_{ab}(x)$	$+$	0	$-$
convexité de f_{ab}	∪	P.I.	∩

$$f_{a,b}\left(\frac{2\ln(\frac{a}{b})}{b^2-a^2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2a}{b^2-a^2}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b}{b^2-a^2}} > 0$$



2) $\lambda > 0$, $x = -\lambda < 0$

$$f_{a,b}(x) \geq 0 \iff e^{ax} \geq e^{bx}$$
$$\iff ax \geq bx$$
$$\iff (a-b)x \geq 0$$
$$\iff x \leq 0$$

ainsi on doit calculer

$$A(\lambda) := \int_{-\lambda}^{0} e^{ax} - e^{bx} \, dx$$

$$= \left[\frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{bx}}{b} \right]_{-\lambda}^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{e^{-a\lambda}}{a} + \frac{e^{-b\lambda}}{b} \right)$$

$$= \frac{1-e^{-a\lambda}}{a} + \frac{e^{-b\lambda}-1}{b} \quad \text{u.a.}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \; (>0) \; \text{u.a.}$$

Q3

1) $\forall x \in [0;1]$ $\quad 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$

posons $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x^2}$ $\quad \forall x \in [0;1]$

$f_n(x) \geq 0$

donc $A_n(x) \geq 0$

de même $f_n(x) \leq x^n$

d'où $A_n \leq \int_0^1 x^n \, dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$A_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ $\Big\}$ posons $x = \cos t$ $\quad dx = (-\sin t)\, dt$

ou $t = \arccos x$

$t = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$

$t = 0$ si $x = 1$

$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin t \sqrt{1-\cos^2 t} \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \underbrace{|\sin t|}_{\substack{\geq 0 \\ \text{sur } [0,\pi]}} \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t \, dt$

$= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right)$

$= \frac{\pi}{4}$

$A_1 = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x) \sqrt{1-x^2} = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$

$= [\, 0 - (-\frac{1}{3}) \cdot 1 = \frac{1}{3}$

3) $A_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}$

x^{n-1} $\quad x\sqrt{1-x^2}$

$(n-1)x^{n-2}$ $\quad -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$A_n = \underbrace{\left[-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)\,x^{n-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,x^{n-2}\,dx$$

$$-\frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{n-1}{3}\left(A_{n-2} - A_n\right)$$

ainsi $\quad A_n\left(1+\frac{n-1}{3}\right) = \frac{n-1}{3}A_{n-2}$

$$\Leftrightarrow \quad A_n\left(\frac{2+n}{3}\right) = \frac{n-1}{3}A_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \frac{n-1}{n+2}A_{n-2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}.$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ANALYSE

Mardi, le 10 novembre 2009
15h00 à 18h00

QUESTION I : 4 points

Soit la fonction f définie par $f(x) = ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$.

1) Déterminer $domf$, $dom_c f$, $domf'$ et ensuite calculer $f'(x)$.

2) Calculer $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(\tan x)\, dx$. not yet $\ln 3^{1/4} - \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$

$= -0.0574$

QUESTION II : 4 points

Résoudre l'inéquation suivante : $\log_a x > \log_{a^3}(3x-2)$, a paramètre réel. $S =]\frac{2}{3}; +\infty[\setminus \{1\}$

$S = \emptyset \quad a \in]0,1[$

QUESTION III : 12 points

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = e^x - m(x+1)$, $m \in \mathbb{R}_0$ et on désigne par C_m sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Faire l'étude de f_m. (domaines de définition et de continuité, limites, asymptote Δ, position de C_m par rapport à Δ, sens de variation, concavité, tableau des variations) 5,5
Tracer C_1 la représentation graphique de f_1.

2) a) Soit $M(\alpha, \beta) \in C_m$. Etablir une équation cartésienne de T, tangente à C_m au point M. 6,5
Etudier la position de C_m par rapport à T. (On pourra utiliser le signe de la fonction f_1)

b) Considérer ensuite le point K de C_m d'abscisse $\alpha - 1$ et le point H de Δ d'abscisse α.
Déterminer la coordonnée du point N, point d'intersection de T et de Δ.

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par les segments $[MH]$, $[HN]$, $[NK]$ et par l'arc de courbe KM.
Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine limité par les segments $[MN]$, $[NK]$ et par l'arc de courbe KM.
Vérifier que ces deux aires sont indépendantes de m.

Q1

Posons $f(x) = \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right|$

1) C.E. $\cdot)$ $\frac{1+\sin x}{\cos x} \neq 0 \Leftrightarrow 1+\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin x \neq -1$

$\Leftrightarrow \sin x \neq \sin(-\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ et $x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

la même classe modulo (2π)

$\cdot)$ $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ -\tfrac{\pi}{2} + k2\pi ; \tfrac{\pi}{2} + k2\pi \}$$

De plus, $f(x + k2\pi) = f(x)$, càd f est périodique de période 2π

On peut étudier f sur $[-\pi ; \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\}$.

f est continue sur son domaine de définition en tant que composée de fonctions continues ; $\text{dom}_c f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi + k2\pi ; \pi + k2\pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\}$

En outre $\text{dom } f' = \text{dom } f$, (f ne peut pas être dérivable en un point où ce n'est pas défini)

et $\forall x \in \text{dom } f'$,

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{(\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot (1 + \sin x)}{(1+\sin x) \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

2) $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ \ln(\tan x) \ dx$

$\ln(\tan x)$ $\qquad\qquad$ $\cos x$

$\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad\qquad$ $\sin x$

$\left(\frac{opp}{adj} = \frac{\frac{opp}{hyp}}{\frac{adj}{hyp}} \right)$

$\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

$$= \left[\ln(\tan x)\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \, dx$$

$$= \left[0 - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \, dx$$

part 1)

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\frac{2\sqrt{2}+2}{2}\right) + \ln(\sqrt{3})$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}\ln(3) - \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$= \tfrac{3}{2}\ln(\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}+1)$$

Q2

$(I) \Leftrightarrow \log_a x > \log_{a^3} (3x-2)$

Condition d'existence pour a : $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

pour x : $x > 0$

$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

Domaine d'étude : $E =]\frac{2}{3};+\infty[$

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ fixé.

$\forall x \in]\frac{2}{3};+\infty[$, on a

$$(I) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln a} > \frac{\ln(3x-2)}{3\ln(a)} \Leftrightarrow \frac{\ln(x^3)}{\ln(a)} > \frac{\ln(3x-2)}{\ln(a)}$$

si $a \in]0;1[$ $\quad (I) \Leftrightarrow \ln(x^3) < \ln(3x-2)$

$\Leftrightarrow x^3 < 3x-2$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - 3x + 2}_{P(x)} < 0$

$P(-1) = 0$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

x		-2		1	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-x-2	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

si $a \in]0;1[$; $(I) \Leftrightarrow x^3 - 3x+2 < 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty;-2[$

$S_{]0;1[} = \emptyset$

si $a \in]1;+\infty[$ $(I) \Leftrightarrow x^3 - 3x+2 > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-2;1[\cup]1;+\infty[$

$S_{]1;+\infty[} =]\frac{2}{3};1[\cup]1;+\infty[$

si $a \in]0;1[$, S admet aucune sol. $\emptyset$

si $a \in]1;+\infty[$ S admet aucune solution $]\frac{2}{3};1[\cup]1;+\infty[$

Q3

posons $f_m(x) = e^x - m(x+1)$, avec $m \in \mathbb{R}^*$

1) C.E. /

$\text{dom } f_m = \mathbb{R}$

$\forall m \in \mathbb{R}^*$, f_m est continue sur son domaine de définition, $\text{dom}_c f_m = \text{dom } f_m$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - m(x+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m<0 \\ +\infty & \text{si } m>0 \end{cases} = +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - m\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - m(x+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m>0 \\ -\infty & \text{si } m<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty} - m\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} = +\infty \qquad \text{B.P. } OY$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to 0} - m\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} = -m$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) + mx = \lim_{x\to-\infty} e^x - m = -m$$

Résumé

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m>0 \\ -\infty & \text{si } m<0 \end{cases}$$

f_m admet une B.P. de direction OY (en $+\infty$)

f_m admet une asymptote oblique d'éq. $\Delta \equiv y = -mx - m$ (en $-\infty$)

$\forall x \in \text{dom } f_m$, considérons

$$f_m(x) - (-mx - m) = e^x - mx - m + mx + m = e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f_m(x) > -mx - m$$

C_m est toujours au dessus de Δ !

$\text{dom } f'_m = \text{dom } f_m$

$\forall x \in \text{dom } f'_m$, on a $\quad f'_m(x) = e^x - m$

$$f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq m$$

si $m > 0$

$f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(m)$

si $m < 0$

$f'_m(x) \geq 0$ est toujours vrai

si $m > 0$

x	$-\infty$		$\ln(m)$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$I_1(\ln(m), -m\ln(m))$

f_m est strictement décroissant sur $]-\infty; \ln(m)[$ et strictement croissant sur $]\ln(m); +\infty[$

si $m < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f_m est strictement croissant sur $\mathbb{R}$

"$f_m(x) - T \geq 0$"

$\Leftrightarrow \quad e^x - e^\alpha x - (1-\alpha)e^\alpha \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{x-\alpha} - (x-\alpha) - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad f_1(x-\alpha) \geq 0$

toujours vrai mini en $(0;0)$

Si $x > \alpha$ alors $\mathcal{C}_m$ est au dessus de T

et si $x < \alpha$ alors $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de T

($x = \alpha$, $\mathcal{C}_m$ et T coincident ce qui est clair !)

b) $\cdot$ $f_m(\alpha - 1) = e^{\alpha-1} - m(\alpha - 1 + 1) = e^{\alpha-1} - m\alpha$

$\cdot$ $-m\alpha - m$

$K(\alpha-1, e^{\alpha-1} - m\alpha)$

$H(\alpha, -m\alpha - m)$ $\qquad e^\alpha - m\alpha - m \geq -m\alpha - m$

M est au-dessus de H

$T \cap \Delta$: $\cancel{-m\alpha - m} = e^\alpha x + (1-\alpha)e^\alpha \cancel{-m\alpha - m}$

$\Leftrightarrow \quad x = \alpha - 1$

$T \cap \Delta = N(\alpha - 1, -m(\alpha-1) - m)$

$= N(\alpha - 1, -m\alpha)$

$e^{\alpha-1} - m\alpha \geq -m\alpha$ donc K au dessus de N

$\Leftrightarrow e^{\alpha-1} \geq 0$ ou

$\text{dom } f''_m = \text{dom } f'_m$

$\forall x \in \text{dom } f'_m$, on a

$$f''_m(x) = e^x > 0$$

	$-\infty$	$+\infty$
$f''_m(x)$	$+$	
Concavité de f_m	$\smile$	

2) a) Soit $M(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_m$

$\hookrightarrow \beta = e^\alpha - m(\alpha + 1) = f_m(\alpha)$

tangente au point M:

$$y = f'_m(\alpha)(x-\alpha) + f_m(\alpha)$$
$$= (e^\alpha - m)(x-\alpha) + e^\alpha - m\alpha - m$$
$$= (e^\alpha - m)x - \alpha e^\alpha + m\alpha + e^\alpha - m\alpha - m$$
$$= (e^\alpha - m)x + (1-\alpha)e^\alpha - m$$
$$= e^\alpha x + (1-\alpha)e^\alpha - mx - m$$

$$f_m(x) - \left(e^\alpha x + (1-\alpha)e^\alpha - mx - m\right)$$
$$= e^x - e^\alpha x - (1-\alpha)e^\alpha$$

$f_1(x) = e^x - x - 1$
≥ 0
ssi $x \geq 0$

c) segment [MH] : éq. $x=\alpha$ pour droite (MH)

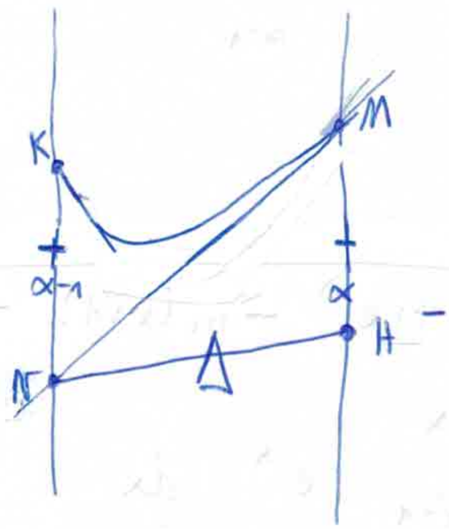
segment [HN] : ~~éq.~~ Δ

segment [NK] : éq. $x=\alpha-1$ pour droite (NK)

segment [MN] : T

sur $[\alpha-1,\alpha]$ $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de Δ

sur $[\alpha-1;\alpha]$, $\mathcal{C}_m$ est au dessus de T



par exemple

$$A = \int_{\alpha-1}^{\alpha} e^x - m(x+1) - e^\alpha x - (1-\alpha)e^\alpha + mx + m$$

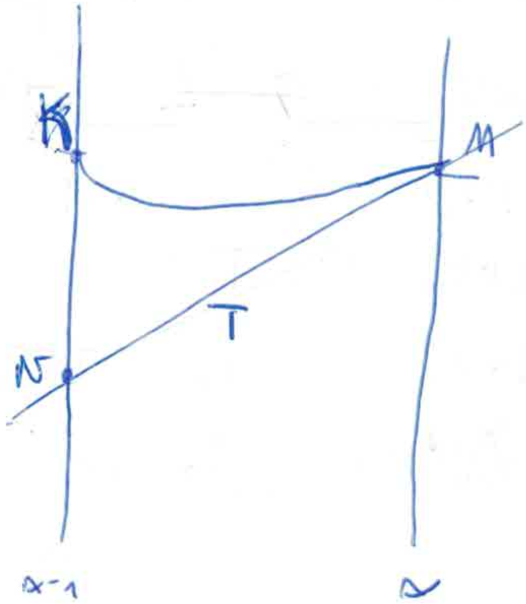
$$= \int_{\alpha-1}^{\alpha} e^x - e^\alpha x - (1-\alpha)e^\alpha \, dx$$

$$= \left.e^x\right]_{\alpha-1}^{\alpha} - \left.\frac{e^\alpha}{2}x^2\right]_{\alpha-1}^{\alpha} - \left.(1-\alpha)e^\alpha x\right]_{\alpha-1}^{\alpha}$$

$$= e^\alpha - e^{\alpha-1} - \frac{e^\alpha}{2}\left(\alpha^2-(\alpha-1)^2\right) - (1-\alpha)e^\alpha(\alpha-\alpha+1)$$

$$= -e^{\alpha-1} + \alpha e^\alpha - (2\alpha+1)\frac{e^\alpha}{2} \quad \text{u.a.}$$

~~sur [α-1, α] on devrait avoir Cm au dessus de T en quelque part..~~



T est au-dessus de Cm

$$A = \int_{\alpha-1}^{\alpha} e^{x} - m(x+1) - (-mx - x) \, dx$$

$$= \int_{\alpha-1}^{\alpha} e^{x} \, dx$$

$$= e^{\alpha} - e^{\alpha-1}$$

$$= e^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ u.a.}$$

Concours de recrutement — **Épreuve d'analyse**

Mathématiques — **Mardi, le 20 avril 2010**

15h-18h

I. Soit g la fonction définie par $g(x) = -x + \ln\left|x^2 - 1\right|$.

1) a) Etudiez g : domaine de définition, parité, branches infinies et asymptotes éventuelles, sens de variation, concavité, tableau de variation, courbe représentative C_g dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

b) Démontrez que pour tout réel k distinct de -1, il existe deux réels distincts x_1 et x_2 appartenant à $\operatorname{dom} g$ tels que la pente de la tangente à C_g aux points d'abscisses x_1 et x_2 soit égale à k. Exprimez x_2 en fonction de x_1.

2) Déterminez la primitive de g sur $\left]-1;1\right[$ qui s'annule en 0 après avoir justifié son existence.

3 **5+3= 8 points**

II. Pour tout réel $a \in \left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$, on considère la fonction f_a définie par $\mathrm{f}_a(x) = xe^{\frac{1}{x+a}}$ et C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

1) Précisez $\operatorname{dom}\mathrm{f}_a$ et déterminez les asymptotes éventuelles à C_a. 3

2) Etudiez le sens de variation de f_a et esquissez C_{-2} et C_0. 4

3) Soit h la restriction de f_0 à $\left]-\infty;0\right[$. Démontrez que h définit une bijection de $\left]-\infty;0\right[$ sur un ensemble J à préciser. Démontrez que h^{-1} est dérivable sur J. Calculez $\left(\mathrm{h}^{-1}\right)'(-e^{-1})$. Indication: On pourra calculer d'abord $\mathrm{h}(-1)$.

3+4+2= 9 points

III. Soit f la fonction définie par $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\left(-4x^2 + 4x\right)\left(2x + \sqrt{x+3}\right)}{4x^3 - 5x^2 - 2x + 3}$.

Déterminez $\operatorname{dom}\mathrm{f}$ et calculez les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \mathrm{f}(x)$ et $\lim\limits_{x \to \frac{-3}{4}} \mathrm{f}(x)$.

3 points 2

Q1

$g(x) = -x + \ln|x^2-1|$

C.E. $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

1) a) $\text{dom}\, g = \mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$

$g(-x) = x + \ln|x^2-1| \neq \begin{cases} -g(x) \\ g(x) \end{cases}$

g est ni paire, ni impaire

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{-x}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln|x^2-1|}_{\to+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} = -1$

calcul à part

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1}2x}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln|x^2-1| = +\infty$

$\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique (en $-\infty$) de direction $y=-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to-\infty} + \underbrace{\ln|x^2-1|}_{\to+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x\left(\underbrace{1 + \frac{\ln|x^2-1|}{x}}_{\to 1}\right)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - (-x) = +\infty$

$\mathcal{C}_g$ admet aussi une b.p. (en $+\infty$) de direction $y=-x$

$$\lim_{x \to (-1)} \underbrace{-x}_{\to 1} + \underbrace{\ln|x^2-1|}_{\to -\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to (1)} -x + \ln|x^2-1| = -\infty$$

A.V d'éq. $x=-1$ et $x=1$

dom $g' =$ dom g

$\forall x \in$ dom g',

$$g'(x) = -1 + \frac{2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{-x^2+1+2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{-x^2+2x+1}{x^2-1}$$

Résolvons $-x^2+2x+1=0$

$\Delta = 4+4=8$
$= (2\sqrt{2})^2$

$$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	$-$		0	$+$	$+$		0	$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	max I_1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	max I_2	$\searrow$	$-\infty$

$I_1\,(1-\sqrt{2}\,;\,g(1-\sqrt{2}))$ $\quad$ $I_2\,(1+\sqrt{2}\,;\,g(1+\sqrt{2}))$

dom $g'' =$ dom g

$$g''(x) = 0 + \frac{2(x^2-1)-2x(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$\forall x \in$ dom g'', $g''(x) < 0$, g concavité vers le bas sur dom g

b) Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, alors $\forall x \in \text{dom } g$

$$g'(x) = k$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x + 1 = k(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k+1)x^2 - 2x + (-k-1) = 0$$

$$\Delta = 4 + 4(k+1)(k+1)$$
$$= 4 + 4(k+1)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{1+(k+1)^2}}{2(k+1)} = \frac{1+\sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1} \qquad (k \neq -1)$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1} = x_1 - \frac{2\sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1}$$

$$x_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{1+(k+1)^2} = k+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + (k+1)^2 = k^2 \quad \text{avec } k > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2k+2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad k = -1 \qquad \text{ainsi } x_1 \neq 1 \text{ car } k \neq -1$$

$$x_1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{1+\ldots} = -k-1$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\ldots} = -k-2 \qquad \Rightarrow -k-2 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -2$$
$$\Leftrightarrow \quad 1+(k+1)^2 = (k+2)^2 \quad \text{avec } k \leq -2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2k+2 = 2k+4 \quad \lightning \quad \text{ainsi } x_1 \neq -1$$

$$x_2 = 1 \Leftrightarrow \quad 1 - \sqrt{1+(k+1)^2} = k+1$$
$$\Leftrightarrow \quad 1+(k+1)^2 = k^2 \quad \text{avec } k \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2k+2 = 0$$
$$\text{or } k \neq -1 \quad \lightning \quad \text{ainsi } x_2 \neq 1$$

$$x_2 = -1 \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+(k+1)^2} = k+2 \quad \text{avec } k \geq -2 \quad \lightning \quad \text{ainsi } x_2 \neq -1$$

On en déduit que x_1, x_2 ... donc $\forall k \neq -1$

2) On va d'abord déterminer une primitive de g sur $]-1;1[$

g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

ainsi g est continue sur l'intervalle $]-1;1[$

↳ g admet une primitive sur $]-1;1[$

sur $]-1;1[$, $x^2-1<0$

$$\int g(x)\,dx = \int -x + \ln(-x^2+1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + \int \ln(1-x^2)\,dx$$

$$\begin{array}{ll} \ln(1-x^2) & 1 \\ \frac{1}{1-x^2}(-2x) & x \end{array}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{1-x^2}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & \cancel{} -x^2+1 \\ -2x^2-2 & -2 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow 2x^2 = -2(1-x^2)-2$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x^2) - 2x + \int \frac{2}{1-x^2}\,dx$$

Or $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx$ $\quad a+b=1$, $a-b=0$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + k$$

$k \in \mathbb{R}$

d'où $G(x) = -\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x^2) \overset{-2x}{\vee} + \ln|1+x| - \ln|1-x| + k$, $k \in \mathbb{R}$

$G(0)=0 \Leftrightarrow k=0$ $\quad$ la primitive de g sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0

Q2

Soit $a \in]-\infty ; \frac{1}{4}[$

posons $\quad f_a(x) = x e^{\frac{1}{x+a}}$

C.E. $\quad x+a \neq 0 \iff x \neq -a$

1) $\quad \text{dom } f_a = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{x}_{\to \pm\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x+a} \to 0}}_{\to 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x+a} \to 0}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_a(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} x e^{\frac{1}{x+a}} - x$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x+a}} - 1\right) \to 0}{\frac{1}{x} \to 0}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+a}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+a)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x+a}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{(x+a)^2}}_{\to 1}$$

$$= 1$$

$\mathcal{C}_{f_a}$ admet une A.O d'éq. $\quad y = x + 1$

si $a = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(\cancel{-\frac{1}{x^2}}\right)} = +$$

$$\lim_{x \to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to (-a)^+} f_a(x) = \lim_{x \to (-a)^+} \underbrace{x}_{\to (-a)} e^{\frac{1}{x+a} \to +\infty} = \text{sign tab}$$

$$\lim_{x \to (-a)^-} f_a(x) = \lim_{x \to (-a)^-} x e^{\frac{1}{x+a} \to -\infty} = 0$$

$\lim_{x \to (-a)} f_a(x)$ n'exi... pas

Néanmoins, $\mathcal{C}_{f_a}$ admet une asymptote verticale d'éq. $x = -a$

2) On a $\text{dom } f_a' = \text{dom } f_a$

$\forall x \in \text{dom } f_a'$, on obtient

$$f_a'(x) = e^{\frac{1}{x+a}} + x\, e^{\frac{1}{x+a}} \left(-\frac{1}{(x+a)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+a}} \left(1 - \frac{x}{(x+a)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+a}} \; \frac{x^2 + 2ax - x + a^2}{(x+a)^2}$$

$$= e^{\frac{1}{x+a}} \; \frac{x^2 + (2a-1)x + a^2}{(x+a)^2}$$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2a-1)x + a^2 = 0$

$\Delta = (2a-1)^2 - 4a^2$

$= -4a + 1$ avec $a \in \left]-\infty ; \frac{1}{4}\right[$

$-4a+1 > 0 \Leftrightarrow -4a > -1$

$\Leftrightarrow a < \frac{1}{4}$

$\Delta > 0$, donc 2 solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-2a+1+\sqrt{-4a+1}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2a+1-\sqrt{-4a+1}}{2}$$

$x_1 = -a \Leftrightarrow -2a+1+\sqrt{-4a+1} = -2a$ $\qquad x_1 > -a$

$\Leftrightarrow \sqrt{-4a+1} = -1$ impossible $\qquad \Leftrightarrow \sqrt{\ldots} > -1$

tjs vrai

$x_2 = -a \Leftrightarrow -\sqrt{-4a+1} = -1$

$\Leftrightarrow -4a+1 = 1$ $\qquad$ si $a=0$ $\quad x_2 \overset{=0}{\notin} \text{dom } f_0$

Si $a = 0$,

$$f'_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (x = 0 \notin \text{dom } f_0)$$

---

si $a = 0$, $\quad f'_0(x) = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x^2 - x}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x(x-1)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	min I_1	$\nearrow$	

$f_0(1) = 1 e^{\frac{1}{1}} = e$

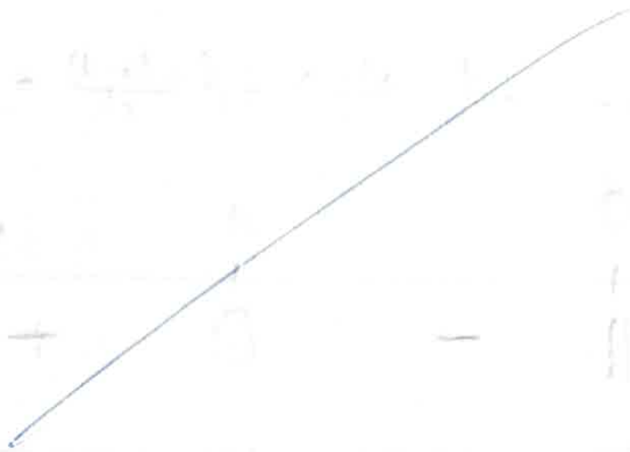
$I_1(1; e)$

si $a \in]-\infty; 0[$ $\quad$ (rem. on a toujours $x_1 > x_2$ et $x_1 > -a$ $\quad x_2 > -a$ si $a > 0$)

x	$-\infty$		x_2		$-a$		x_1		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max $I_1(x_2, f(x_2))$	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	min $I_2(x_1, f(x_1))$	$\nearrow$	$+\infty$

si $a \in]0; \frac{1}{4}[$ $\quad$ $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

x	$-\infty$		$-a$		x_2		x_1		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert -\infty$	$\nearrow$	max I_1	$\searrow$	min I_2	$\nearrow$	$+\infty$



3) $h := f_0\big|_{]-\infty;0[}$

$\forall x \in]-\infty;0[$

$f_0'(x) > 0$, c'est-à-dire f_0' est strictement croissante

de plus f_0 est continue sur $]-\infty;0[$

en tant que composée de fct. continues sur $]-\infty;0[$

Ainsi f_0 est injective sur $]-\infty;0[$

Soit $y = \text{im } f_0 =]-\infty;0[$

alors f_0 définit une bijection de $]-\infty;0[$ dans $]-\infty;0[$.

on a que $\forall x \in]-\infty;0[$ $f_0'(x) \neq 0$, et la bijection f_0 est dérivable sur $]-\infty;0[$. D'où la bijection réciproque est dérivable sur $f_0(]-\infty;0[) =]-\infty;0[$.

$$(h^{-1})'(e^{-1}) = (h^{-1})'(h(-1)) = \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{\frac{-1-1}{-1}\, e^{-\frac{1}{1}}} = \frac{1}{2}e$$

$$h(-1) = f_0(-1) = -\frac{1}{e} = e^{-1}$$

Q3

Soit $f(x) = \dfrac{(-4x^2+4x)(2x+\sqrt{x+3})}{4x^3-5x^2-2x+3}$

Posons $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3$

$P(1) = 4 - 5 - 2 + 3 = 0$

	4	-5	-2	3
1		4	-1	-3
	4	-1	-3	0

$P(x) = (x-1)\underline{(4x^2 - x - 3)}$

$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$x_1 = \dfrac{1+7}{8} = 1$

$x_2 = \dfrac{1-7}{8} = -\dfrac{3}{4}$

$f(x) = \dfrac{-\cancel{4}x(x-1)(2x+\sqrt{x+3})}{\cancel{4}(x-1)^2(\cancel{4}x+\frac{3}{4})}$

$\lim\limits_{x\to(1)^\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to(1)^\pm} \dfrac{-x(2x+\sqrt{x+3})}{(x-1)(x+\frac{3}{4})}$ $\begin{cases} \to -4 \\ \to 0^\pm \end{cases}$

$= \mp\infty$

$\hookrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas

$$\lim_{x \to (-\frac{3}{4})} f(x) = \lim_{x \to (-\frac{3}{4})} \frac{-x\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$$-\frac{6}{4}+\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{12}{4}} = -\frac{6}{4}+\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to (-\frac{3}{4})} \left(\frac{-2x-\sqrt{x+3}}{\underbrace{\left(x+\frac{3}{4}\right)+(x-1)}_{\to 0}} - \frac{x\left(2+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)}{2x-\frac{1}{4}} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(2 + \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{6}{3}+\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{-\frac{7}{4}}$$

$$= -1$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ANALYSE

Mardi, le 9 novembre 2010
15h00 à 18h00

QUESTION I : 12 points

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -xe^{2x+1} & si\ x \leq 0 \\ \left|ln\frac{x+1}{2}\right| - ln2 & si\ x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition, le domaine de continuité et le domaine de dérivabilité de f.

2) Etudier f. (limites, branches infinies, dérivée, concavité, tableau des variations)

3) Construire C_f, la représentation graphique de f, dans un RON. (unité : 2 cm)

4) Soit λ un réel strictement négatif. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les deux droites $x = \lambda$ et $x = 3$.
Calculer en cm^2 la limite de cette aire $\mathcal{A}(\lambda)$ si λ tend vers $-\infty$.

QUESTION II : 4 points

1) Résoudre : $5 \cdot 3^{\frac{3x-4}{2}} - 11 \cdot 3^{x-2} - 13 \cdot 3^{\frac{x-4}{2}} + \frac{1}{3} \leq 0$

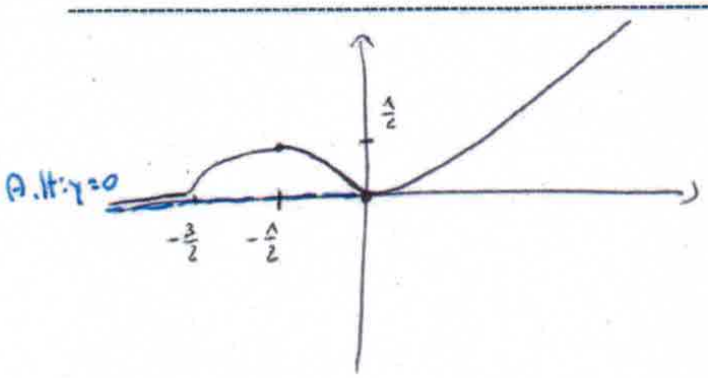
2) Calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sint \cdot ln(1 + sint)dt$ $= \frac{\pi}{2} - \lambda + \cancel{ln\pi} = \frac{\pi}{2} - \lambda$

QUESTION III : 4 points

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
Indiquer les caractéristiques de la bijection réciproque f^{-1} et établir son expression analytique.

2) Indiquer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
Calculer $(f^{-1})'(x)$ et $f'(f^{-1}(x))$, quelle relation y a-t-il entre ces deux expressions ?



Q1

1) Posons

$$f(x) = \begin{cases} -x\, e^{2x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \left| \ln \frac{x+1}{2} \right| - \ln 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \left(\text{C.E.} \quad \frac{x+1}{2} > 0 \iff x > -1 \right)$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \geq 0 \iff \frac{x+1}{2} \geq 1 \iff x+1 \geq 2 \iff x \geq 1$$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

f est continue sur $]-\infty; 0[$ en tant que composée de fonctions continues

f est ———— $]0;+\infty[$ ————

continuité en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left| \ln \frac{x+1}{2} \right| - \ln 2 = |-\ln 2| - \ln 2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x\, e^{2x+1} = 0$$

ainsi $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

il s'ensuit que f est continue en 0

$\text{dom}_c f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{2x+1} - 2x\, e^{2x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]1;+\infty[\\ -\frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]0;1[\end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -e$

f n'est pas dérivable en 0

$(0; f(0))$ est un point anguleux

dérivable à gauche et à droite mais dérivées $\neq$

$\lim\limits_{x \to (1^-)} f(x) = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to (1)^+} f(x) = \frac{1}{2}$

f n'est pas dérivable en 1
$(1; f(1))$ est un point anguleux

$\text{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left| \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| - \ln 2$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$

$= 0$

B.P. de direction Ox en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x\, e^{2x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-2x-1}} \begin{cases} \to +\infty \\ \to +\infty \end{cases}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{-2x-1} \cdot (-2)}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$= 0$

A.H d'éq. $y = 0$.

Dérivée $\forall x \in \text{dom} f'$

$$f'(x) = \begin{cases} \overbrace{-e^{2x+1} - 2x\, e^{2x+1}}^{= (-1-2x)\, e^{2x+1}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ -\frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}$$

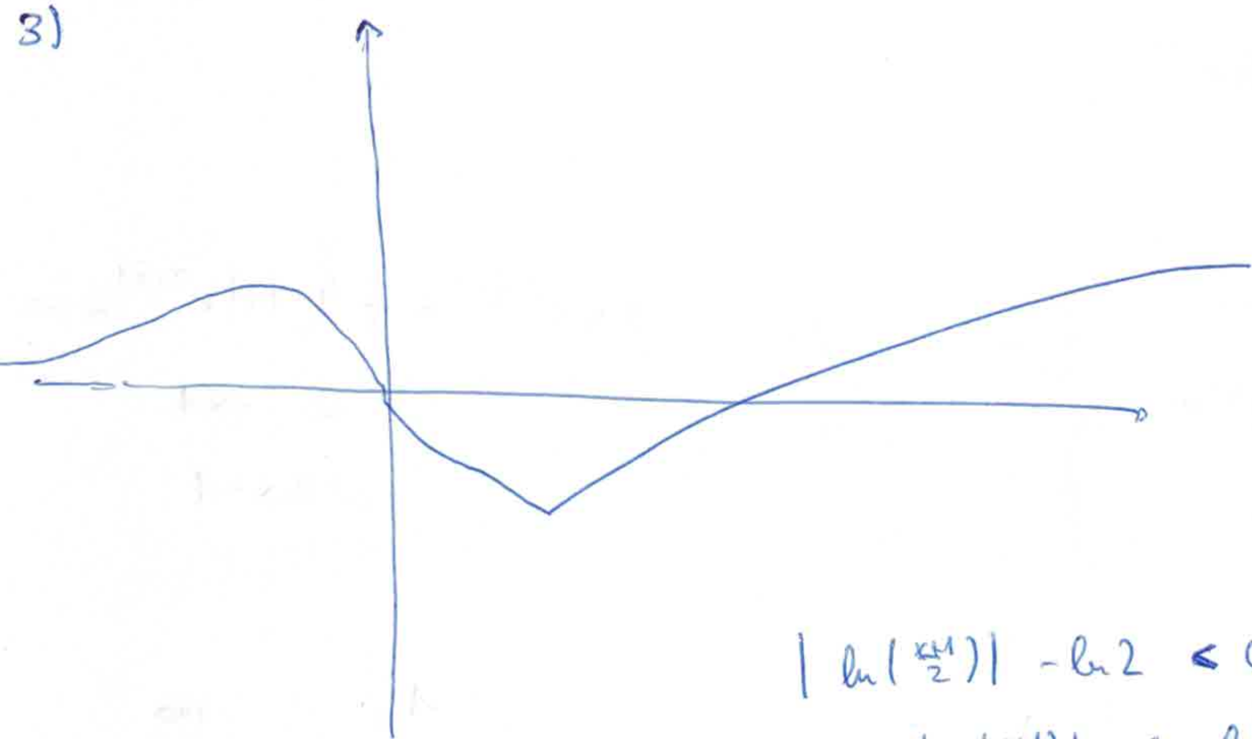
$\mathrm{dom}\, f'' = \mathrm{dom}\, f'$

$\forall x \in \mathrm{dom}\, f''$,

$$f''(x) = \begin{cases} -2e^{2x+1} - 2e^{2x+1} - 4x\, e^{2x+1} = (-4-4x)\, e^{2x+1} & \text{si } x<0 \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x>1 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } 0<x<1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			max	$\searrow$	$(0,0)$ point anguleux	$\searrow$	$(1; -\ln 2)$ point anguleux	$\nearrow$	$+\infty$
concavité de f		$\cup$	P.I	$\cap$				$\cup$		$\cap$	

3)



$$|\ln(\tfrac{x+1}{2})| - \ln 2 \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 3$$

$$\iff |\ln(\tfrac{x+1}{2})| \leq \ln 2$$

$$\iff \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{x+1}{2} \leq 2$$

4) Vu que l'on regarde la limite en $\lambda \to -\infty$, on peut supposer que $\lambda < 0$, ainsi on a

$$A(\lambda) = \int_\lambda^0 -x e^{2x+1} - \int_0^3 \left(\left| \ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right) \right| - \ln 2 \right) dx$$

$$= -\int_\lambda^0 x e^{2x+1} + \int_0^1 \ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right) - \int_1^3 \ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right) + \int_0^3 \ln 2$$

x	e^{2x+1}	$\ln(\frac{x+1}{2})$	1
1	$\frac{e^{2x+1}}{2}$	$\frac{1}{1+x}$	x

$$= \left[-x \frac{e^{2x+1}}{2}\right]_\lambda^0 + \int_\lambda^0 \frac{e^{2x+1}}{2} dx + \left[x \ln(\tfrac{x+1}{2})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$$

$$- \left[x \ln(\tfrac{x+1}{2})\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{x}{1+x} dx + 3\ln 2$$

$$= -0 + \lambda \frac{e^{2\lambda+1}}{2} + \left[\frac{e^{2x+1}}{4}\right]_\lambda^0 + 0 - 0 - 3\ln 2 + 3\ln 2 + 0$$

$$- \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx + \int_1^3 \frac{x}{1+x} dx$$

$$= \lambda \frac{e^{2\lambda+1}}{2} + \frac{e}{4} - \frac{e^{2\lambda+1}}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx + \int_1^3 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= (2\lambda-1)\frac{e^{2\lambda+1}}{4} + \frac{e}{4} - \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_1^3 1\,dx - \int_1^3 \frac{1}{x+1}$$

$$= (2\lambda-1)\frac{e^{2\lambda+1}}{4} + \frac{e}{4} - [x]_0^1 + [\ln|x+1|]_0^1 + [x]_1^3 - [\ln|x+1|]_1^3$$

$$= (2\lambda-1)\frac{e^{2\lambda+1}}{4} + \frac{e}{4} - 1 + \cancel{\ln 2} + 2 - \cancel{\ln 4 + \ln 2}$$

$$= (2\lambda-1)\frac{e^{2\lambda+1}}{4} + \frac{e}{4} + 1 \quad u.a.$$

$$= 4 \cdot \left(\underline{\qquad\qquad} \right)$$

$$= (2\lambda-1)e^{2\lambda+1} + e + 4 \quad cm^2$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \left[\underbrace{(2\lambda-1)}_{\to -\infty} \underbrace{e^{2\lambda+1}}_{\to 0} \right] + e + 4$$

$$\overset{H}{=} \lim_{\lambda \to -\infty} \frac{2}{-2e^{-2\lambda-1}} + e + 4 \qquad dx$$

$$= e + 4$$

$$A(\lambda) \longrightarrow e+4 \quad \text{si } \lambda \to -\infty$$

Q2

1) (I) $\Leftrightarrow 5 \cdot 3^{\frac{3x-4}{2}} - 11 \cdot 3^{x-2} - 13 \cdot 3^{\frac{x-4}{2}} + \frac{1}{3} \leq 0$

Domaine d'étude : $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, (I) $\Leftrightarrow 5 \cdot 3^{\frac{3x}{2}} - 11\, 3^{x} - 13 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-1} \cdot 3^{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow 5\, 3^{\frac{3x}{2}} - 11 \cdot 3^{x} - 13 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 3^{1} \leq 0$

posons $t = \sqrt{3^{x}} > 0$

$\Leftrightarrow 5 \cdot t^{3} - 11 t^{2} - 13 t + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow 5\,(t+1)\,(t - \frac{1}{5})\,(t-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow (t-\frac{1}{5})\;(t-3) \leq 0$

		$\frac{1}{5}$		3	
$t-\frac{1}{5}$	$-$	0	$+$		$+$
$t-3$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Leftrightarrow t \in [\frac{1}{5} ; 3]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq 3^{\frac{x}{2}} \leq 3^{1}$

$\Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{5} \leq \frac{x}{2} \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \log_3 5 \leq x \leq 2$

$S = \ldots$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ \ln(1+\sin t) \ dt$

~~posons~~ $\cancel{x = \sin t}$

$\cancel{\Leftrightarrow t = \arcsin x}$

$\cancel{\Leftrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}$

$\cancel{= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x)}$

$\cancel{\ln(1+x)} \qquad \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\cancel{\frac{1}{1+x}} \qquad \cancel{-\sqrt{1-x^2}}$

Calcul à part :

$\ln(1+\sin t) \qquad \sin t$

$\frac{1}{1+\sin t} \cdot \cos t \qquad -\cos t$

$$I = \left[-\cos(t) \ln(1+\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{1+\sin(t)} \, dt}_{\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin(t) \ dt}_{\left[t+\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}}$$

$= 0 + \frac{\pi}{2} - 1$

$= \frac{\pi}{2} - 1$

Q3

$\forall x \in]0;+\infty[$, posons $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $\text{dom} f = \text{dom} f' =]0;+\infty[$

1) $\forall x \in \text{dom} f'$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0$ sur $]0;+\infty[$

f' ne s'annule pas et f strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

de plus ~~...~~ f est continue sur $]0,+\infty[$,

aussi f est injective

Il s'ensuit que f est une bijection de $]0;+\infty[$ dans

$\text{im} f =]1;+\infty[= Y$.

f^{-1} est une bijection, strictement décroissante, de $]1;+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

De plus comme f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$,

f^{-1} (la bijection réciproque) est aussi dérivable sur $]1,+\infty[$.

Ainsi f^{-1} est aussi continue sur $]0;+\infty[$

~~...~~ Soit $y, x \in]0,+\infty[$

$y = e^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln y}$

Ainsi $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x}$ $\quad \forall x \in]1;+\infty[$

2) $\text{dom}(f^{-1})' =]1,+\infty[$

$\forall x \in \text{dom}(f^{-1})'$, $(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$

$f'(f^{-1}(x)) = -\frac{e^{\frac{1}{f^{-1}(x)}}}{[f^{-1}(x)]^2} = -\frac{e^{\ln(x)}}{x} \ln^2(x) = -x \ln^2$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot f'^{-1}(x) = 1$$

Ceci est naturel vu que

$\forall x \in$

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$$

$$\begin{array}{c} (f \circ f^{-1})'(x) \\ \| \\ (id)'(x) \\ \| \\ 1 \end{array}$$

$f \circ f^{-1} = x \longmapsto x$

ou $\quad f'(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(x)}$

Concours de recrutement | **Épreuve d'analyse**

Mathématiques | **Jeudi, le 10 février 2011**

15h-18h

I. Soit f_n ($n \in \mathbb{R}_+^*$) la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n \cdot e^{1-x}$ lorsque $x > 0$ et $f_n(0) = 0$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1) Etudiez la continuité de f_n en 0 et l'existence d'asymptotes au graphe de f_n.

2) Etudiez la dérivabilité de f_n à droite en 0 et le sens de variation de f_n et dressez le tableau de variation.

3) Déterminez les points d'inflexion éventuels au graphe de f_n.

4) Représentez graphiquement f_n pour $n = \frac{1}{4}$, $n = 1$ et $n = \frac{9}{4}$. **7 points**

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + x^3\right)\sqrt{1 - x^2}$, soit G la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan et soit C le demi-cercle de centre O et de rayon 1 dans le même repère et situé au dessus de l'axe des abscisses.

1) Etudiez f : domaine, continuité, dérivabilité aux bornes du domaine avec interprétation graphique, sens de variation, tableau de variation, extrema éventuels, représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
Quelle est la nature du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de G ? Justifiez !

2) Démontrez que la partie du plan délimitée G et l'axe des abscisses a la même aire que la partie du plan délimitée par C et l'axe des abscisses. **7 points**

III. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Etudiez f : domaine, parité, sens de variation, représentation graphique.

2) Calculez $\int_1^x \arctan(t)\,dt$ et ensuite $\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt$ pour tout $x > 0$, après avoir justifié l'existence de ces intégrales. **4 points**

IV. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 8x}$.
Calculez la limite de f en $+\infty$. **2 points**

Q1

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n e^{1-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad n \in]0;+\infty[$$

dom $f_n = [0;+\infty[$

1) f_n est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

Continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^n}_{\to 0} \underbrace{e^{1-x}}_{\to e} = 0 = f_n(0)$$

Ainsi comme $\lim_{x \to 0} f_n(x) = f_n(0)$ il s'ensuit que f_n est continue en 0.

D'où Dom$_c$ $f_n = [0;+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^n}_{\to +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to 0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{x-1}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^{x-1}} \quad n \text{ fois}$$

$$= 0$$

AH (en $+\infty$) : $y = 0$

(Pas d'AV. en $x = 0$)

(a) si $n \in]0;1[$;

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^{n-1}}_{\to +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to 1} = +\infty$$

2) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'_n(x) = n x^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x}$

$$\lim_{x \to 0} f'_n(x) = \lim_{x \to 0^+} n x^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n < 1 \\ 0, & \text{si } n > 1 \\ e^1 - e^1 = 0 & \text{si } n = \end{cases}$$

Par le théorème : lien entre limite de f' en a et dérivabilité de f en a,

il s'ensuit que f_n est dérivable à droite de 0 si $n \geq 1$ et dans ce cas $f'_n(0)$

et si $n \in]0;1[$, f_n n'est pas dérivable à droite en 0 dom $f'_n = \begin{cases} [0;+\infty[& \text{si} \\ ]0;+\infty[& \text{si } n \end{cases}$

$\forall x \in \text{dom } f'_n \,, \quad f'_n(x) = (n-x)\, x^{n-1} e^{1-x}$

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = n \quad$ ou $\quad (x=0 \quad$ si $n \geq 1)$

	0		n		$+\infty$
$f'_n(x)$	$+\infty$ si $n \in]0;1[$ 0 si $n \geq 1$	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	max I_1	$\searrow$	0

$I_1(n;\, n^n e^{1-n})$

3) $\forall x \in]0;+\infty[$

$$f''_n(x) = n(n-1)x^{n-2} e^{1-x} - nx^{n-1}e^{1-x} - nx^{n-1}e^{1-x} + x^n e^{1-x}$$
$$= x^{n-2} e^{1-x} \left(n(n-1) - 2nx + x^2 \right)$$
$$= x^{n-2} e^{1-x} \left[x^2 - 2nx + (n^2-n) \right]$$

$$\lim_{x \to 0^+} f''_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2 \\ 4 - 2 = 2e^1 & \text{si } n = 2 \\ +\infty & \text{si } n \in]1;2[\\ -\infty & \text{si } n \in]0;1] \end{cases}$$

$f''_n(x) = 0 \Leftrightarrow \quad (x = 0$ si $n \geq 2) \quad$ ou $\quad x^2 - 2nx + (n^2-n)$

Résolution de l'équation du 2^{nd} degré

$x^2 - 2nx + (n^2-n) = 0$

$\Delta = 4n^2 - 4(n^2-n) = 4n > 0$

$x_1 = \dfrac{2n - 2\sqrt{n}}{2} = n - \sqrt{n} > 0$

$x_2 = n + \sqrt{n} > 0$

<u>si $n \geq 1$</u> $\quad n-\sqrt{n} > 0 \iff n > \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n^2 > n \iff n(n-1) \geq 0$

n		0		1	
		0	$-$	0	$+$

x	0		$n-\sqrt{n}$		$n+\sqrt{n}$	
x^{n-2}	0 si $n>2$; 1 si $n=2$; $+\infty$ si $n\in]0;2[$	$+$		$+$		$+$
$x^2-2nx+(n^2-n)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f''_n(x)$	$2e$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	0	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I	$\cup$

$I_2(n-\sqrt{n} ; (n-\sqrt{n})^n e^{1-(n-\sqrt{n})})$ $\quad I_3(n+\sqrt{n} ; (n+\sqrt{n})^n e^{1-(n+\sqrt{n})})$

<u>si $n \leq 1$</u> $\quad n-\sqrt{n} \leq 0$

x	0		$n+\sqrt{n}$		$+\infty$
x^{n-2}		$+$		$+$	
$x^2-2nx+(n^2-n)$		$-$	0	$+$	
$f''_n(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\cap$	P.I.	$+$	

I_3

4)

Q2

$f(x) = (1+x^3)\sqrt{1-x^2}$

C.E. $1-x^2 \geq 0 \iff x \in [-1;1]$

1) $\text{dom } f = [-1;1]$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$ → f est continue en -1 et 1

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$

$\text{dom}_C f = [-1,1]$

Conclusion : pas d'A.H (ni A.O), et pas d'A.V.

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x \to -1} (1-x+x^2)\sqrt{1-x^2} = 0$ en $x=-1$ tangente horizontale

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-0}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1+x^3)\sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x}} = -\infty$

en $x=1$ tangente verticale

f est dérivable en $x=-1$, mais f n'est pas dérivable en $x=1$

$\text{dom } f' = [-1;1[$

$\forall x \in \text{dom} f'$

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{1-x^2} + (1+x^3)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= 3x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{(1+x^3)x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2(1-x^2) - (x+x^4)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^4 - x - x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2 - x - 4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $3x - 1 - 4x^3 = 0$

($\iff x=-1$, $x=\frac{1}{2}$ Cusco)

	4	0	-3	1
-1		-4	4	-1
	4	-4	1	0

$$4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1)$$
$$= (x+1)(2x-1)^2$$

$$-4x^4 + 3x^2 - x = -x(x+1)(2x-1)^2$$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$x+1$	0	+		+		+	
$-2x(2x-1)^2$		+	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$	0	+	0	$-$	0	$-$	||
$f(x)$	0	$\nearrow$	max I_1	$\searrow$	I_2	$\searrow$	||

$I_1(0;1)$

$f'(\frac{1}{2}) = 0$

$f' < 0$ sur $]0;\frac{1}{2}[$

et $f' < 0$ sur $]\frac{1}{2};1[$

$(\frac{1}{2}; f(\frac{1}{2}))$ est un point d'inflexion.

2) Aire d'un demi-cercle de centre O et de rayon 1

$$\frac{\pi 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{-1}^{1} (1+x^3)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}}_{\text{fonction paire sur un intervalle symétrique}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}}_{=0 \text{ fonction impaire sur un intervalle symétrique}}$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Posons $x = \cos t$
$dx = -\sin t\, dt$
$x=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$
$x=1 \Rightarrow t=0$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{\sin^2 t}}_{\substack{=|\sin t| \\ = \sin t \text{ sur } [0;\frac{\pi}{2}]}}\,\sin t\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos 2t\,dt$$

$$= \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Q3

$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parité; $\forall x \in \text{dom} f$:

$$f(-x) = \arctan(-x) - \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -f(x)$$

f est impaire sur domf, il suffit d'étudier la fonction sur $]0;+\infty[$, les caractéristiques de cette fonction sur $]-\infty;0[$ sont obtenues par symétrie par rapport au point $(0;0)$

dom f' = dom f, ainsi

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

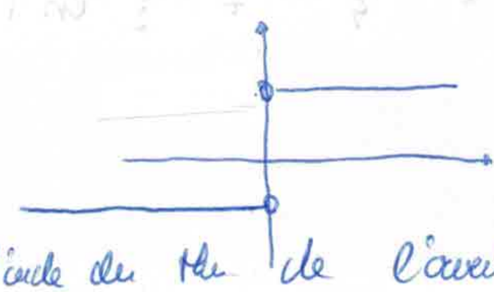
$$= 0$$

f n'est ni croissante et ni décroissante, il s'agit d'une fonction constante sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in \text{dom} f$, prenons p.ex $x = 1$

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



[on peut démontrer ceci à l'aide du thm de l'arc connexe]

2) $I = \int_1^x \arctan(t)\, dt$ pour $x>0$

Ok, car $g : t \longmapsto \arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
$\cup$
$]1;x[$
ou $]x;1[$

$\arctan(t)$. 1

$\frac{1}{1+t^2}$ t

$$I \overset{\text{i.p.p}}{=} [\arctan(t) \cdot t]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= x \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln|1+t^2|\right]_1^x$$

$$= x \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$I = \int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ (avec $x>0$) existe, car

$h : t \longmapsto \arctan(\frac{1}{t})$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

donc aussi sur $]0;+\infty[\supseteq]1;x[$
ou $]x;1[$

$\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ 1

$-\frac{1}{1+t^2}$ t

$$y = x\arctan x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Q4

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3+5x^2} - \sqrt[3]{x^3+8x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2 - x^3 - 8x}{\sqrt[3]{(x^3+5x^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3+5x^2)(x^3+8x)} + \sqrt[3]{(x^3+8x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-8x}{\sqrt[3]{x^6+10x^5+25x^4} + \sqrt[3]{x^6+8x^4+5x^4+40x^3} + \sqrt[3]{x^6+16x^4+64x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-8x}{x^2\left(\underbrace{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{13}{x^2}+\frac{40}{x^3}} + \sqrt[3]{1+\frac{16}{x^2}+\frac{64}{x^4}}}_{\to 3}\right)}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Concours de recrutement

Mathématiques

<u>Épreuve d'analyse</u>

Mardi, le 31 janvier 2012

15h-18h

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

1) Étudiez f : domaine de définition, continuité, branches infinies et asymptotes éventuelles, dérivabilité à gauche en -1, sens de variation, tableau de variation, extrema, courbe représentative C_f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

2) Soit h la restriction de f à $]-\infty;-1]$. Démontrez que h définit une bijection de $]-\infty;-1]$ sur un ensemble J à préciser. Représentez h^{-1} dans le même repère. La fonction h^{-1} est-elle dérivable à gauche en 0? Justifiez ! Calculez $(h^{-1})'(-\sqrt{2})$.

Indication : calculez $h(-3)$.

3) Soit A la surface du plan délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=-3$. Calculez le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface A.

<u>4 + 1,5 + 1,5 = 7 points</u>

II. 1) Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\ln\left|e^x-m\right|$, m étant un paramètre réel non nul et soit C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé du plan.

a) Pour tout réel non nul m, précisez le domaine de définition de f_m, étudiez le sens de variation de f_m et déterminez les asymptotes éventuelles à C_m.

b) Soit q la restriction de f_1 à $]-\infty;0[$ et p la restriction de f_1 à $]0;+\infty[$.

Démontrez que q (resp. p) définit une bijection de $]-\infty;0[$ (resp. $]0;+\infty[$) sur un ensemble I (resp. J) à préciser. Déterminez l'expression analytique de q^{-1} et de p^{-1}. Déduisez-en que $C_1 \cup C_{-1}$ admet un axe de symétrie que l'on précisera. Tracez C_1 et C_{-1} dans un même repère orthonormé.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^{x}\right)$.

a) Démontrez : $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[,\ \ln(x+1) < x$.

b) Étudiez g : domaine de définition, branches infinies et asymptotes éventuelles, sens de variation, tableau de variation, courbe représentative C_g dans le même repère orthonormé que C_1 et C_{-1}.

3) Soit a un réel strictement positif. Calculez l'aire $A(a)$ de la partie du plan délimitée par les courbes C_g et C_{-1} et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

<u>**4,5 + 4,5 + 2 = 11 points**</u>

III. Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(3x)\cdot\cos^5(3x)\,dx$ après avoir justifié son existence.

<u>**2 points**</u>

Q1

$$f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad C.E \to x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

1) $\operatorname{dom} f = \left]-\infty;-1\right] \cup \left]1;+\infty\right[$

continuité : $\operatorname{dom}_c f \ \left]-\infty;-1\right] \cup \left]1;+\infty\right[$

en tant que composée de fonctions continues

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

A.V. $x=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}-1\right)\right]+1$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot\frac{1+\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}+1}+1$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{2}{\underbrace{(1-\frac{1}{x})}_{\to 1}\underbrace{(\sqrt{}+1)}_{\to 2}}}_{\to 1}+1$$

$$= 2$$

A.O. (en $\pm\infty$) d'éq. $y = x+2$

$\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{(x+1)}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

dérivabilité en -1 :

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}$ n'a pas de sens

$$\lim_{x\to(-1)^-}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}}_{\to 0}\right) = 0$$

$f'_g(-1) = 0$ → demi-tangente horizontale

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{(x+1)}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)}{(x-1)} \geq \frac{(x+1)}{(x-1)^2} \quad \text{avec} \quad x \neq -1$$

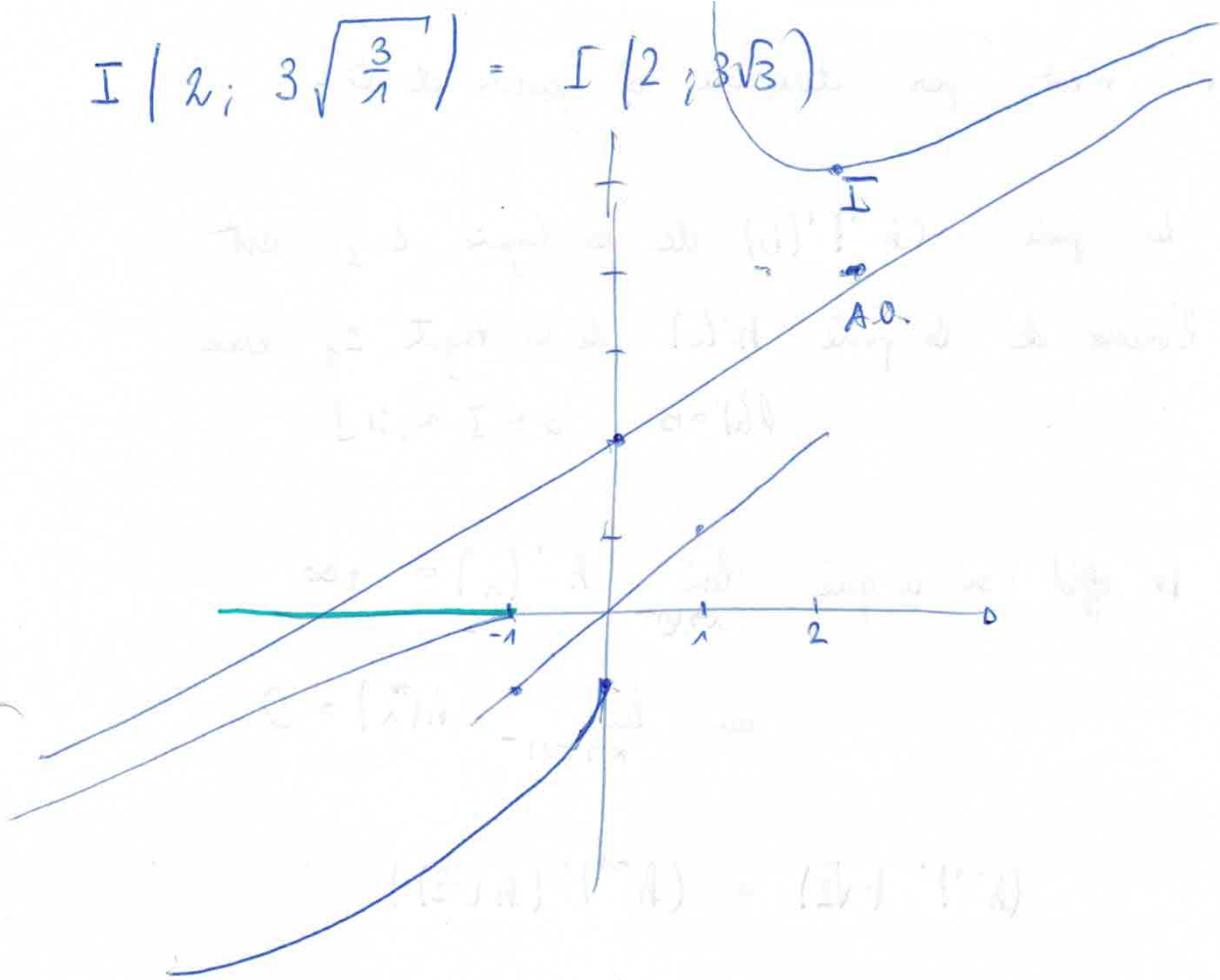
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1-(x+1)}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2} \geq 0$$

	$-\infty$		-1		1		2	
f'		$+$	$\|$		$\|$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	↗	0		$+\infty$	↘	min I	↗

$I\left(2 ; 3\sqrt{\frac{3}{1}}\right) = I\left(2 ; 3\sqrt{3}\right)$



2) $h = f|_{]-\infty;-1]}$

h est continue sur $]-\infty;-1]$ et strictement croissante, càd injective

$\text{im } h =]-\infty ; f(-1)] =]-\infty ; 0] = Y$

Ainsi h est une bijection entre $]-\infty;-1]$ et $]-\infty;0]$.

Dans le même repère, on obtient h en traçant le symétrique de f par rapport à la 1ère bissectrice du plan

h^{-1} n'est pas dérivable à gauche de 0 :

la pente $(h^{-1})'(b)$ de la tangente t_2 est l'inverse de la pente $h'(a)$ de la tangente t_1 avec

$h(a) = b \qquad a \in]-\infty; -1]$

en effet on a que $\lim_{x \to 0^-} h^{-1}(x) = +\infty$

car $\lim_{x \to (-1)^-} h(x) = 0$

$$(h^{-1})'(-\sqrt{2}) = (h^{-1})'(h(-3))$$

$$= \frac{1}{h'(-3)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{-2}{16}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}}$$

$$= \frac{8}{9\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{18}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

3)

$$V = \pi \int_{-3}^{-2} (x+1)^2 \frac{(x+1)}{(x-1)} \, dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{-2} \frac{(x+1)^3}{(x-1)} \, dx$$

$t = x-1$

$$= \pi \int_{-4}^{-3} \frac{(t+2)^3}{t} \, dt$$

$$= \pi \int_{-4}^{-3} t^2 + 6t + 12 + \frac{8}{t} \, dt$$

$$= \pi \left[\frac{t^3}{3} + 3t^2 + 12t + 8 \ln|t| \right]_{-4}^{-3}$$

$$= \pi \left[-\frac{27}{3} + 27 - 36 + 8 \ln 3 + \frac{64}{3} - 48 + 48 - 8\ln\right.$$

$$= \pi \left[\frac{37}{3} - 9 + 8 \ln \frac{3}{4} \right]$$

$$= \pi \left(\frac{10}{3} + 8 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right) \quad cm^3$$

Q2

1) $f_m(x) = \ln|e^x - m|$, $m \in \mathbb{R}_0$

C_m la courbe représentative de f_m dans un ROV du plan.

a) $e^x - m \neq 0 \iff e^x \neq m$ → tjs vrai si $m<0$

→ $\iff x \neq \ln m$ si $m>0$

si $m>0$

$\text{Dom } f_m = \mathbb{R} \setminus \{\ln m\}$

si $m<0$

$\text{Dom } f_m = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln|\underbrace{e^x - m}_{\to+\infty}| = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|e^x - m|}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^x-m}\cdot e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln|e^x - m| - x = \lim_{x\to+\infty} \ln \underbrace{\frac{|e^x-m|}{e^x}}_{\to 1}$$

$$= 0$$

A.O. d'équation $y = x$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln|e^x - m| = \ln|m|$$

A.H d'équation $y = \ln|m|$ en $-\infty$

si $m > 0$,

calculons $\lim\limits_{x \to \ln m} \ln|e^x - m| = -\infty$

A. V. d'éq $x = \ln m$

fixons $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\forall x \in D_m$, on a

$$f'_m(x) = \frac{1}{e^x - m} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x - m}$$

si $m < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$\ln(-m)$	$\nearrow$	$+\infty$

si $m > 0$

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f_m(x)$	$\ln(m)$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$e^x - m \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq m$

$\Leftrightarrow x \geq \ln m$

b) $f_1(x) = \ln|e^x - 1|$

Soit $q := f_1|_{]-\infty;0[}$ $\quad p' < 0$

$p = f_1|_{]0;+\infty[}$ $\quad q' > 0$ $\Big\}$ voir a)

Comme q (resp. p) est continue et strictement décroissante (resp str. croissante) donc injectif.

ainsi q est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $I =]-\infty;0[$

p est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

$y = \ln|e^x - 1|$ $\quad x \in]-\infty;0[$

$\Leftrightarrow e^y = |e^x - 1|$

$\Leftrightarrow e^y = 1 - e^x$

$\Leftrightarrow e^x = 1 - e^y$ avec $y \in]-\infty;0[$

$\Leftrightarrow x = \ln|e^y - 1|$

$q^{-1}(x) = \ln|e^x - 1|$

$e^y = e^x - 1$ pour $x \in]0;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^x = e^y + 1$

$\Leftrightarrow x = \ln|e^y + 1|$

$\Leftrightarrow p^{-1}(x) = f_1(x)$

Considérons $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_{-1}$

$\mathcal{C}_1$ est obtenue à partir de q et p

si on reflète q et p (càd f_1) par rapport à la 1ère bissectrice du plan, on obtient à nouveau

q et f_{-1}

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_{-1}$ admet $y = x$ comme axe de symétrie.

2) Soit $g(x) = (1 + e^{-x}) \ln(1 + e^{x})$

a) Posons $h(x) = \ln(x+1) - x \qquad \forall x \in]-1; 0[\cup]0, +\infty[$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1$$
$$= \frac{1 - x - 1}{x+1}$$
$$= \frac{-x}{x+1}$$

	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$-$	
$x+1$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
$h(x)$	$\| -\infty$	$\nearrow$	$0 \| 0$	$\searrow$	$-\infty$

h sera toujours < 0 en 0 on aurait 0, mais c'est privé du domaine de

b) $\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 1} \underbrace{\ln(1+e^{x})}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 1} \underbrace{\frac{\ln(1+e^{x})}{x}}_{\to 1} = 1 \qquad \overset{H}{} \quad \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \to 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) \ln(1+e^{x}) - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right) + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{x})}{e^{x}}$$

$$\overset{H}{=} 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{x}}\cdot e^{x}}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{x}}$$

$$= 0$$

A.O en $+\infty$ d'éq. $y = x$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to+\infty} \underbrace{\ln(1+e^{x})}_{\to 0^+}$$

$$= \lim_{x\to} \frac{\ln(1+e^{x})}{\frac{1}{1+e^{-x}}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}{\frac{1}{(1+e^{-x})^2}e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}(1+e^{-x})^2}{1+e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to} \frac{e^{2x}(1+2e^{-x}+e^{-2x})}{1+e^{x}}$$

A.H en $-\infty$: $y=1$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}+2e^{x}+1}{1+e^{x}} = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + (1+e^x) \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + 1$$

or $y = e^x > 0 \quad \in \,]-1;0[\, \cup \,]0;+\infty[\quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $\quad \ln(1+e^x) < e^x$

donc $\quad g'(x) > \underbrace{-e^{-x}}_{<0} \ln(1+e^x) + 1$

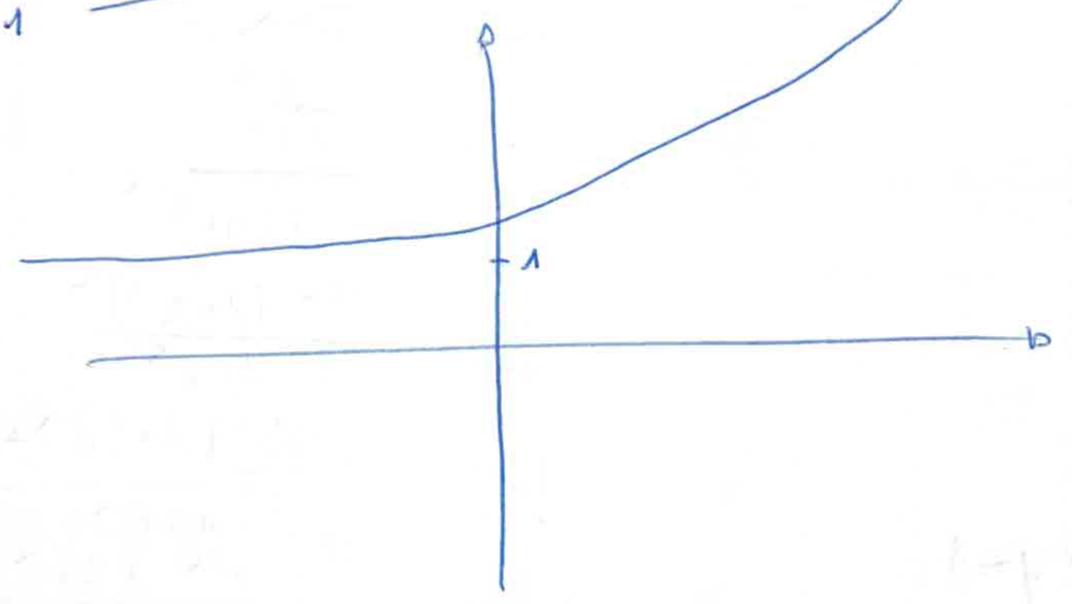
$$> -e^{-x} \cdot e^x + 1$$

$$> -1+1$$

$$= 0$$

donc $\quad g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$$A(a) = \int_0^a \left[(1+e^{-x}) \ln(1+e^x) - \ln(1+e^x) \right]$$

$$= \int_0^a e^{-x} \ln(1+e^x)\, dx$$

$t = e^x$

$\ln(1+e^x)$ $\qquad e^{-x}$

$\frac{e^x}{1+e^x}$ $\qquad -e^{-x}$

$$= \left[-e^{-x} \ln(1+e^x) \right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+e^x}\, dx$$

$$= \underline{\qquad\qquad\qquad} + \int_1^{e^a} \frac{1}{t(t+1)}\, dt$$

$$= -e^{-a} \ln(1+e^a) + \ln(2) + \int_1^{e^a} \frac{1}{t} + \frac{-1}{t+1}$$

$$= -e^{-a} \ln(1+e^a) + \ln(2) + \left[\ln t \right]_1^{e^a} - \left[\ln|1+t| \right]_1^{e^a}$$

$$= -e^{-a} \ln(1+e^a) + \ln(2) + a - \ln(1+e^a) + \ln(2)$$

Q3

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(3x)\cos^5(3x)\,dx$$

posons $t = 3x \Leftrightarrow x = \frac{t}{3}$

$\Leftrightarrow dt = 3dx$

$x = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^2(t)\cos^5(t)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,(1-\cos^2(t))\cos^5(t)\,dt)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^5(t)\,dt - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^7(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{18}\cos^6(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{24}\cos^8(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{72}$$

1

I $f(x) = (x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

1) $\mathrm{dom}\, f = \left]-\infty;-1\right] \cup \left]1;+\infty\right[= \mathrm{dom}_c f$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \underbrace{(x+1)}_{\to 2}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x+1 \to 2}{x-1 \to 0^+}}}_{\to +\infty} = +\infty$ A.V. : $x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 1} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 1} = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\Big[\underbrace{f(x)-x}_{\text{f.i. "}(+\infty)-(+\infty)\text{"}}\Big] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)^2\cdot\frac{x+1}{x-1} - x^2}{(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{(x+1)^3 - x^2(x-1)}{x-1}}{(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{4x^2+3x+1}{x-1}}{(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2\left(4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x\cdot\underbrace{\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 1}+1\Big]}_{\to 2}}$

$= \frac{4}{2} = 2$

A.O.D. : $y = x+2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\big[f(x)-x\big] = 2$ A.O.G. : $y=x+2$

2

f est dérivable sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$,

$\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$,

$f'(x) = 1\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\overbrace{\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}}^{=-2}$

$= \dfrac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{-(x+1)}{(x-1)^2}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{x^2-1-x-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

dérivabilité à gauche en -1 :

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 0$

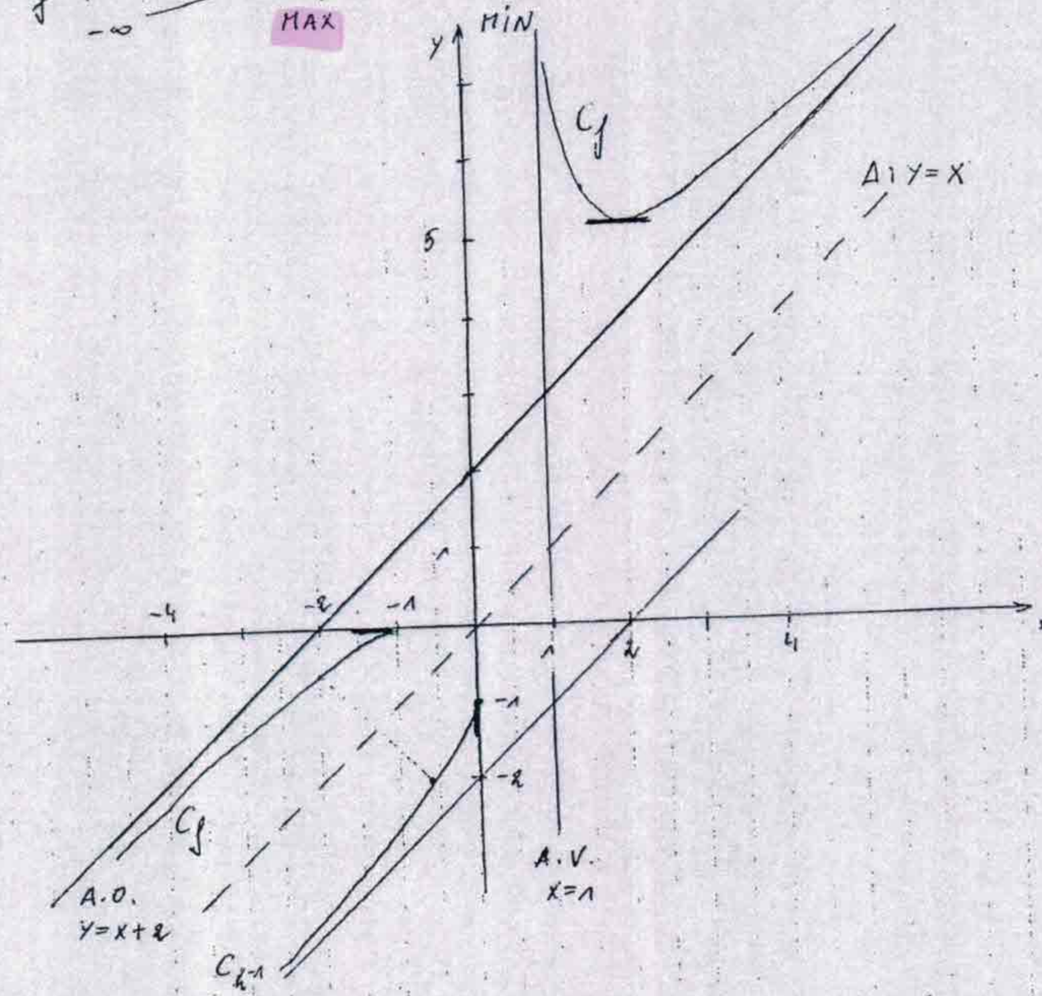
donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'(-1) = 0$.

tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	//	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	//	|| $+\infty$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
			MAX				MIN		

tableau de valeurs :

x	-4	-2	-1	$1{,}5$	2	3	4
$f(x)$	$-2{,}3$	$-0{,}6$	0	$5{,}6$	$5{,}2$	$5{,}7$	$6{,}5$



2

2) $h = f|_{]-\infty;-1]}$ Comme h est une fonction continue ①

et strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, h est une bijection

de $]-\infty;-1]$ sur $J =]-\infty;0]$. (+ courbe représentative)

② h^{-1} n'est pas dérivable en 0 car son graphe admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0, image de la demi-tangente horizontale au graphe de h au point d'abscisse -1.

$h(-3) = (-2)\sqrt{\frac{-2}{-4}} = -\sqrt{2}$; $h'(-3) = \frac{10}{16}\sqrt{\frac{-4}{-2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

h^{-1} est dérivable sur $]-\infty;0[$ car h est dérivable sur $]-\infty;-1[$

et h' ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$.

justification

$(h^{-1})'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{h'(-3)} = \frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. 1.

3) $V = \pi \int_{-3}^{-2} \left[f(x) \right]^2 \, dx = \pi \int_{-3}^{-2} \frac{(x+1)^3}{x-1} \, dx = \pi \int_{-3}^{-2} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x-1} \, dx$

HORNER

	1	3	3	1
1		1	4	7
	1	4	7	8

$$= \pi \int_{-3}^{-2} \left(x^2+4x+7+\frac{8}{x-1} \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 7x + 8 \cdot \ln|x-1| \right]_{-3}^{-2}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{-8}{3} + 8 - 14 + 8 \ln 3 \right] - \left[(-9) + 18 - 21 + 8 \ln \right. \right.$$

$$= \pi \left(\frac{10}{3} + 8 \ln \frac{3}{4} \right) cm^3$$

$$\approx 3{,}2418 \ cm^3$$

1,5

1) a) $f_m : x \longmapsto \ln|e^x - m| \qquad (m \in \mathbb{R})$

si $\boxed{m=0}$, $f_0(x) = \ln|e^x| = x$ et $\operatorname{dom} f_0 = \mathbb{R}$.

(Dans la suite, on considère les cas où $m \neq 0$.)

C.E. : $e^x - m \neq 0 \iff e^x \neq m$

si $\boxed{m<0}$, $\operatorname{dom} f_m = \mathbb{R}$

si $\boxed{m>0}$, $\operatorname{dom} f_m = \mathbb{R} - \{\ln m\}$

Pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, f_m est dérivable sur $\operatorname{dom} f_m$

et $f'_m(x) = \dfrac{e^x}{e^x - m}$.

si $\boxed{m<0}$:

$$\begin{array}{c|ccc}
x & -\infty & & +\infty \\
\hline
f'_m & & + & \\
\hline
f_m & \ln|m| & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

si $\boxed{m>0}$:

$$\begin{array}{c|ccc||ccc}
x & -\infty & & & \ln m & & +\infty \\
\hline
f'_m & & - & & & + & \\
\hline
f_m & \ln|m| & \searrow & -\infty & -\infty & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln|e^x - m| = +\infty$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln|e^x - m| = \ln|m| \qquad (m \neq 0)$

<u>A.H. : $y = \ln|m|$ en $-\infty$</u>

si $m>0$, $\lim\limits_{x\to \ln m} f_m(x) = -\infty$. <u>A.V. : $x = \ln m$ $\quad (m>0)$</u>

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|e^x - m|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \ln\left|1 - \frac{m}{e^x}\right|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \underbrace{\dfrac{\ln\left|1 - \frac{m}{e^x}\right|}{x}}_{\to 0} \right) = 1.$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f_m(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left|1-\frac{m}{e^x}\right|}{x} = 0.$

<u>A.O. : $y = x$ en $+\infty$</u>

b) Comme $q = f_1|_{]-\infty;0[}$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, q est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]-\infty;0[$.
De même, p est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$.

$\forall x \in]-\infty;0[$,
$\forall y \in]-\infty;0[$,

$y = q(x)$

$\Leftrightarrow y = \ln|e^x-1|$

$\Leftrightarrow e^y = |\underbrace{e^x-1}_{\text{str. négatif sur }]-\infty;0[}|$

$\Leftrightarrow e^y = 1-e^x$

$\Leftrightarrow e^x = 1-e^y$

$\Leftrightarrow x = \ln(1-e^y)$

$\Leftrightarrow x = \ln|e^y-1|$

Ainsi $q^{-1}(x) = \ln|e^x-1|$
$= q(x)$

Donc $C_q = C_{q^{-1}}$ et C_q est symétrique par rapport à Δ d'éq. $y=x$ dans un repère orthonormé.

$\forall x \in]0;+\infty[$,
$\forall y \in \mathbb{R}$,

$y = p(x)$

$\Leftrightarrow y = \ln|e^x-1|$

$\Leftrightarrow e^y = |\underbrace{e^x-1}_{\text{str. positif sur }]0;+\infty[}|$

$\Leftrightarrow e^y = e^x-1$

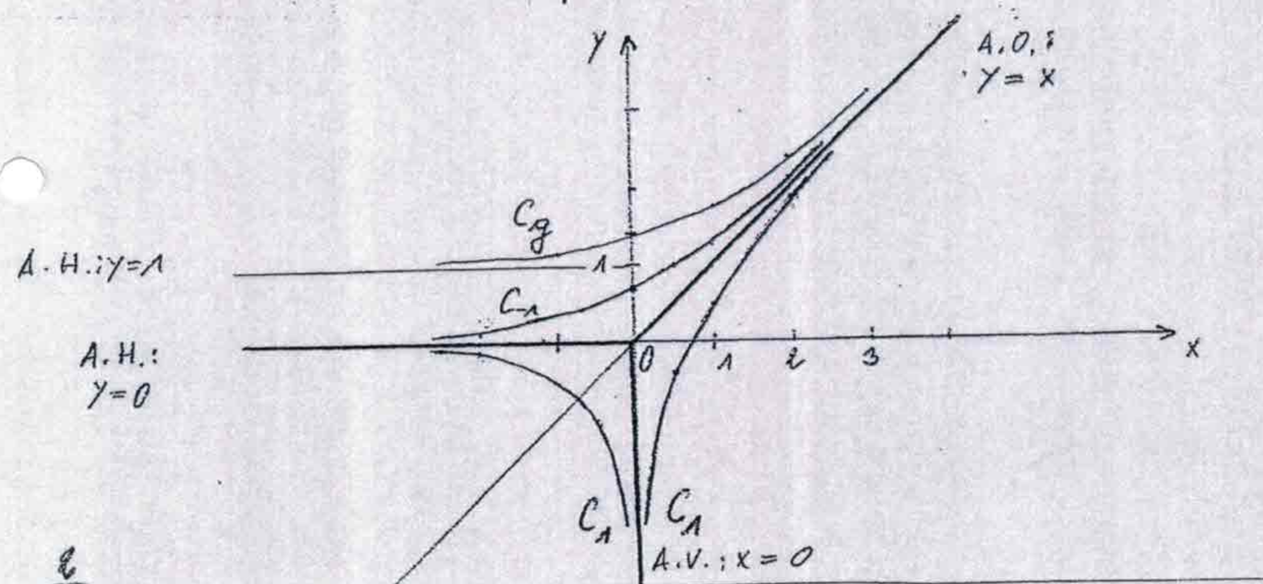
$\Leftrightarrow e^x = e^y+1$

$\Leftrightarrow x = \ln(e^y+1)$

$\Leftrightarrow x = \ln|e^y+1|$

Ainsi $p^{-1}(x) = \ln|e^x+1|$
$= f_{-1}(x)$

Donc C_{-1} et C_p sont symétriques par rapport à Δ d'éq. $y=x$ dans un repère orthonormé.



l

2) a) Posons $h(x) = \ln(x+1) - x$. dom $h =]-1;+\infty[$

$\forall x \in$ dom h, $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
h'	///	‖	$+$	0	$-$	
h	///	‖	$\nearrow$	0 MAX	$\searrow$	

Donc, pour tout $x \in$ dom $h \setminus \{0\}$, $h(x) < 0$
c'est-à-dire $\ln(x+1) < x$.

0.5

$\frac{6}{2''}$

b) $g(x) = (1+e^{-x}) \ln(1+e^{x})$

$\text{dom } g = \mathbb{R} = \text{dom}_c\, g = \text{dom } g'$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to+\infty} \underbrace{\ln(1+\underbrace{e^{x}}_{\to 0})}_{\to 0}$ f.i. "$(+\infty)\cdot 0$"

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^{x}) \to 0}{\frac{1}{1+e^{-x}} \to 0} \quad \text{f.i. "}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}(1+e^{-x})^2}{1+e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(e^{x}+1)^2}{e^{x}+1} = \lim_{x\to-\infty} (e^{x}+1) = 1 \qquad \underline{\underline{\text{A.H.G. : } y=1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})}_{\to 1} \underbrace{\ln(1+e^{x})}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 1} \underbrace{\frac{\ln(1+e^{x})}{x}}_{\to 1} = 1$$

en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{x})}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} [g(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[(1+e^{-x}) \cdot \left(x + \ln(e^{-x}+1)\right) - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\cancel{x} + \underbrace{\frac{x}{e^{x}}}_{\to 0} + \underbrace{\ln(\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}+1)}_{\to 0} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \underbrace{\ln(e^{-x}+1)}_{\to 0} - \cancel{x}\right]$$

$$= 0 \qquad \underline{\text{A.O.D. } y = x}$$

$\frac{2}{1}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (-e^{-x}) \cdot \ln(1+e^{x}) + (1+e^{-x}) \cdot \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^{x}) + 1$$

$\forall x \in \mathbb{R},$

$g'(x) > 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x} \ln(1+e^{x}) > -1$

$\Leftrightarrow e^{-x} \ln(1+e^{x}) < 1 \quad \Big| \cdot e^{x}$ str. positif

$\Leftrightarrow \ln(1+e^{x}) < e^{x}$

vrai pour tout réel x, d'après 2)a).

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
g'		$+$	
g	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) Étudions la position relative de C_g et C_{-1}.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$g(x) > f_{-1}(x)$

$\iff (1+e^{-x})\ln(1+e^{x}) > \ln(e^{x}+1)$

$\iff \underbrace{e^{-x}}_{\text{str. positif}} \cdot \underbrace{\ln(1+e^{x})}_{\substack{\text{str. positif} \\ \text{car } 1+e^{x}>1}} > 0$ vrai pour tout réel x.

Ainsi C_g est situé au-dessus de C_{-1}.

$$A(a) = \int_0^a \left(g(x) - f_{-1}(x)\right) dx$$

$$= \int_0^a e^{-x} \ln(1+e^{x})\, dx$$

Par parties :
$u(x) = \ln(1+e^{x})$ $\quad v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})\right]_0^a + \int_0^a e^{-x}\cdot\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+e^{x}}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})\right]_0^a + \int_0^a \frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})\right]_0^a + \int_0^a \left(1 - \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right) dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^{x})\right]_0^a + \left[x - \ln(1+e^{x})\right]_0^a$$

$$= \left[x - (1+e^{-x})\ln(1+e^{x})\right]_0^a$$

$$= \left[a - (1+e^{-a})\ln(1+e^{a})\right] - \left[0 - 2\ln 2\right]$$

2 $$= a - (1+e^{-a})\ln(1+e^{a}) + 2\ln 2$$

$$= a - g(a) + 2\ln 2$$

$$\lim_{a\to+\infty} A(a) = \lim_{a\to+\infty} 2\ln 2 - \underbrace{\left[g(a) - a\right]}_{\substack{\to 0 \\ \text{cf. étude}}} = 2\ln 2$$

iii $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(3x)\cdot\cos^5(3x)\,dx$ *

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\left(1-\cos^2(3x)\right)\cdot\cos^5(3x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\cos^5(3x)\sin(3x) - \cos^7(3x)\cdot\sin(3x)\right]dx$$

$$= \left[-\frac{1}{18}\cos^6(3x) + \frac{1}{24}\cos^8(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= (0+0) - \left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{24}\right)$$

$$= \frac{4}{72} - \frac{3}{72}$$

$$= \frac{1}{72}$$

* L'intégrale existe car $f : x \longrightarrow \sin^3(3x)\cdot\cos^5(3x)$ est continue sur $[0 ; \frac{\pi}{6}]$.

2

/

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Mercredi, le 23 janvier 2013
15h-18h

Question 1 **(2,5 + 0,5 + 2,5 + 1 + 1 + 2 + 1,5 = 11 points)**

Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par

$f_m(x)=\sqrt{mx^2-2(m-1)x+m}$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 cm).

1) Déterminez le domaine de définition D_m de f_m suivant les valeurs du paramètre réel m. Si $f_m(x)$ admet deux racines réelles distinctes, comparez celles-ci et déterminez-en le signe.

2) Tracez C_0 et $C_{\frac{1}{2}}$.

3) Déterminez les équations des asymptotes obliques éventuelles à C_m suivant les valeurs du paramètre $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;\frac{1}{2}\}$.

4) Dressez le tableau de variation de f_m suivant les valeurs du paramètre $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;\frac{1}{2}\}$.

5) Démontez que la droite T d'équation $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$ est tangente à toutes les courbes C_m $(m\in\mathbb{R})$.

6) Démontrez que C_{-1} est un demi-cercle. Calculez $\int_2^{3,5} f_{-1}(x)\,dx$.

7) Soit S la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x=2$, $x=4$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$ et la courbe C_0. Calculez l'aire A de la surface S. Calculez le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de la surface S autour de l'axe des abscisses.

Question 2 **(1 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 0,5 = 6 points)**

Soit f la fonction définie par $\mathrm{f}(x)=\ln\left(2+\sqrt[3]{e^{6x}-1}\right)$.

1) Déterminez $\mathrm{dom}\,\mathrm{f}$ et étudiez la continuité de f.

2) Déterminez les asymptotes éventuelles au graphe de f.

3) Étudiez le sens de variation de f et déterminez le domaine de dérivabilité de f.

4) Démontrez que f définit une bijection de $\mathrm{dom}\,\mathrm{f}$ sur un ensemble J à préciser.

Tracez le graphe de f et celui de f^{-1} dans un même repère orthonormé d'unité 2 cm.

5) Déterminez une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\dfrac{\ln 2}{6}$.

Sans déterminer l'expression analytique de f^{-1}, calculez $\left(\mathrm{f}^{-1}\right)'(\ln 3)$.

__**Question 3**__ **(1,5 + 1,5 = 3 points)**

1) Soit f la fonction définie par $\mathrm{f}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}}$.

Calculez $\int_1^{41} \mathrm{f}(x)\,dx$ après avoir justifié son existence.

Indication : poser $t^4 = 2x-1$.

2) Démontrez que l'équation $2^x + 3^x = 4^x$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$. (On ne demande pas de déterminer la solution.)

Q1

$f_m(x) = \sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m}$, $m \in \mathbb{R}$

$\mathcal{C}_m$: la courbe rep. de f_m dans un ROV de plan

1) C.E. $\forall m \in \mathbb{R}$, $mx^2 - 2(m-1)x + m \geq 0$

si $m=0$, $f_0 = -2(-1)x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $x \geq 0$

$D_0 = [0; +\infty[$

si $m \neq 0$, $\Delta_m = 4(m-1)^2 - 4m \cdot m$

$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2$

$= 4 - 8m$

si $\underline{\Delta_m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}}$, alors $D_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$\frac{2(\frac{1}{2}-1)}{2\cdot\frac{1}{2}} = -1$		$+\infty$
$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$		+	0	+	

si $\underline{\Delta_m < 0 \Leftrightarrow -8m + 4 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}}$, alors $D_m = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$mx^2 - 2(m-1)x + m$		+ $(m > \frac{1}{2})$	

si $\Delta_m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$, alors

$$x_{1,m} = \frac{2(m-1) + \sqrt{4-8m}}{2m}$$

$$x_{2,m} = \frac{2(m-1) - \sqrt{4-8m}}{}$$

si $m \in]0; \frac{1}{2}[$, $x_{1,m} > x_{2,m}$

x		$x_{2,m}$		$x_{1,m}$	
$mx^2 - 2(m-1)x + m$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_m =]-\infty ; x_{2,m}] \cup [x_{1,m}, +\infty[$$

si $m \in]-\infty; 0[$, $x_{1,m} < x_{2,m}$

x		$x_{1,m}$		$x_{2,m}$	
$mx^2 - 2(m-1)x + m$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D_m = [x_{1,m}, x_{2,m}]$$

Au total,

m	D_m
0	$[0, +\infty[$
$\frac{1}{2}$	$\mathbb{R}$
$]\frac{1}{2}, +\infty[$	$\mathbb{R}$
$]0; \frac{1}{2}[$	$]-\infty; x_{2,m}] \cup [x_{1,m}, +\infty[$
$]-\infty; 0[$	$[x_{1}m; x_{2}m]$

si $m < \frac{1}{2}$ et $m \neq 0$, f_m admet 2 racines réelles distinctes

$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m} = 1 \Rightarrow P > 0$ les racines sont de même signe

$S = -\frac{b}{a} = \frac{2(m-1)}{m} = 2 - \frac{1}{m}$

Ainsi

pour $m \in]0;\frac{1}{2}[$, $S < 0$ les 2 racines sont négatives

pour $m \in]-\infty;0[$, $S > 0$ les 2 racines sont positives

2)

3) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0;\frac{1}{2}\}$

si $m > 0$, limites en $\pm\infty$ (pas d'A.O. si $m<0$)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x| \sqrt{\overbrace{\ldots}^{\to m}}}{x}$$

$$= \pm\sqrt{m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) - \sqrt{m}\,x = \lim_{x\to+\infty} \frac{mx^2 - 2(m-1)x + m - mx^2}{\sqrt{mx^2-2(m-1)x+m} + \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(m-1)x + m}{\sqrt{m}\,x\left(\underbrace{\sqrt{1-\ldots}}_{\to 1} + 1\right)}$$

$$= \frac{1-m}{\sqrt{m}}$$

A.O en $+\infty$ d'éq. $y = \sqrt{m}\,x + \frac{1-m}{\sqrt{m}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} + \sqrt{m}\, x$$

$$= \ldots$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2(m-1)x + m}{\sqrt{m}\, x \, (\underbrace{\sqrt{}}_{\to -1} - 1)}$$

$$= \frac{m-1}{\sqrt{m}}$$

A.O en $-\infty$ d'éq. $y = -\sqrt{m}\, x + \frac{m-1}{\sqrt{m}}$

(
si $m < 0$

$$\lim_{x \to x_{1,m}} f_m(x) = 0$$

$$\lim_{x \to x_{2,m}} f_m(x) = 0$$
)

4) Si $m > \frac{1}{2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m}} \cdot (2mx - 2m + 2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{mx^2 - 2(m-1) + m}} \cdot (mx - m + 1)$$

Or $mx - m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \quad x > \frac{m-1}{m}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-m}{m}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f_m\left(\frac{1-m}{m}\right) = \sqrt{\frac{(1-m)^2}{m} + 2\frac{(m-1)^2}{m} + m}$$

$$= \sqrt{\frac{3(m-1)^2 + m^2}{m}}$$

si $m \in]0;\frac{1}{2}[$

$\forall x \in]-\infty; x_{2,m}[\cup]x_{1,m}; +\infty[$ on obtient $f'_m(x)$, on a $\underbrace{\frac{m-1}{m}}_{\text{doit être entre } x_{1,m} \text{ et } x_{2,m}} < 0$ et racines < 0

		$x_{2,m}$		$\frac{m-1}{m}$		$x_{1,m}$	
f'	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$
f	$-\infty \searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

si $m \in]-\infty;0[$, $\frac{m-1}{m} > 0$ et racines > 0

on obtient $f'_m(x)$

$\forall x \in]x_{1,m}; x_{2,m}[$

$x_{1,m} = \frac{m-1}{m} + \underset{<0}{\overline{\quad}} < \frac{m-1}{m}$

$x_{2,m} = \frac{m-1}{m} - \underset{<0}{\overline{\quad}} > \frac{m-1}{m}$

$mx - m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow mx > m-1$

$\Leftrightarrow x < \frac{m-1}{m}$

$m < 0$

	$x_{1,m}$		$\frac{m-1}{m}$		$x_{2,m}$
f'	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
f	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

5) Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé, alors $\forall x \in D_m$ on a

$(*) : \sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) \iff mx^2 - 2(m-1)x + m = \frac{1}{2}(x+1)^2$ avec $x \geq -1$

$\iff (m-\frac{1}{2})x^2 - 2(m-\frac{1}{2})x + (m-\frac{1}{2}) = 0$ avec $x \geq -1$

$\iff m = \frac{1}{2}$ ou $x^2 - 2x + 1 = 0$ avec $x \geq -1$

$\iff m = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$ avec $x \geq -1$

Si $m = 0$; $m = \frac{1}{2}$ on a $1 \in D_m$

Si $m \in]0; \frac{1}{2}[$, $1 \in [x_{1,m}, +\infty[$, car $x_{1,m} < 0$ et donc $1 \in D_m$ (et $1 \neq x_{1,m}$)

Si $m < 0$ $\quad \frac{2(m-1) + \sqrt{4-8m}}{2m} \leq 1 \leq \frac{2(m-1) - \sqrt{4-8m}}{2m}$

$\iff (m-1) + \sqrt{1-2m} \geq m \geq (m-1) - \sqrt{1-2m}$

$\iff \underbrace{\sqrt{1-2m} \geq 1 \geq -\sqrt{1-2m}}_{\text{ceci est trivialement vérifié pour } m<0}$) OK, car $m < 0$

$\Rightarrow 1 \in]x_{1,m}, x_{2,m}[\subset D_m$

Ainsi pour tout m, $1 \in D_m$. (et on peut dériver f_m en 1).

En outre si $m = \frac{1}{2}$, $\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|x+1|$

Ainsi pour $x = 1$, $f_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+1) = \sqrt{2}$ (abscisse commune à T et $f_{\frac{1}{2}}$).

Comme $f'_m(1) = \frac{1}{\sqrt{m-2m+2+m}} \cdot 1\, m - m + 1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\frac{\sqrt{2}}{2}$ la pente de T, on déduit que T est tangent à $\mathscr{C}_m$ $\forall m$ au point $\boxed{(1;\sqrt{2})}$

6) $f_{-1}(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$ avec $x \in \left[\frac{-4+\sqrt{12}}{-2} ; \frac{-4-\sqrt{12}}{-2}\right]$

$\shortparallel$

$[2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3}]$

Soit $y \geq 0$ tq

$y = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$, alors

$y^2 = -x^2 + 4x - 1$

$\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 3$

$\iff (x-2)^2 + y^2 = \sqrt{3}^2$ demi-cercle de centre $(2, 0)$) partie supérieure

$$\int_2^{3,5} f_{-1}(x)\,dx$$

$$= \int_2^{3,5} \sqrt{3 - (x-2)^2}\,dx$$

$$= \sqrt{3} \int_2^{3,5} \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx$$

posons $\cos t = \frac{x-2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}\cos t + 2$

$dx = \sqrt{3}\sin t\,dt$

$\Leftrightarrow t = \operatorname{Arccos}\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)$

si $x = 2$, $t = \operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$

si $x = 3,5$, $t = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$= -3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

$$= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\underbrace{|\sin t|}_{\substack{\geq 0 \\ \text{sur } [\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]}}\,dt$$

$$= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t\,dt$$

$$= \frac{3}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

7) $\mathcal{A} = \int_2^4 \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2x} \; dx$

calcul direct
$= \ldots$

$V = \pi \int_2^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)\right)^2 - 2x \quad dx$

calcul direct
$= \ldots$

Q2

$f(x) = \ln(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1})$

1) $2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1} > 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{6x} - 1 > -8$

$\Leftrightarrow \quad e^{6x} > -7$ tjs vrai

$\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}_c f = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2 + \text{———}) = 0$ A.H : $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1})}{x}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\frac{1}{2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}} (\sqrt[3]{e^{6x} - 1})'}{1}$

$= \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}} \left(\dfrac{1}{3 \sqrt[3]{(e^{6x} - 1)^2}} 6e^{6x} \right)$

$= \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{2e^{6x}}{(e^{6x} - 1) + 2\sqrt[3]{(e^{6x} - 1)^2}}$

$= 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(2+\sqrt[3]{e^{6x}-1}\right) - \underbrace{2x}_{\ln(e^{2x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{2}{e^{2x}}}_{\to 0} + \underbrace{\sqrt[3]{\frac{e^{6x}-1}{e^{6x}}}}_{\to 1} \right)$$

$$= 0$$

A.O. d'éq. $y = 2x$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2e^{6x} \}>0}{\underbrace{(e^{6x}-1)^{\frac{2}{3}}}_{>0} \underbrace{\left((e^{6x}-1)^{\frac{1}{3}}+2\right)}_{>1}} > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$$

f n'est pas dérivable en 0

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

	$-\infty$	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $+\infty$

4) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Im} f$ est une bijection

car f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante

$y = \mathrm{Im} f =]0 ; +\infty[$

Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f en utilisant la 1ère bissectrice.

⋮

5) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x_0 = \frac{\ln 2}{6}$

⋮

avec $f\left(\frac{\ln 2}{6}\right) = \ln 3$ et $f'\left(\frac{\ln 2}{6}\right) = \frac{4}{3}$

$f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow (f^{-1} \circ f)' = 1$

$\hookrightarrow (f^{-1})'|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ $\quad \rightarrow (f^{-1})'(\ln 3) = (f^{-1})'\left(f\left(\frac{\ln 2}{6}\right)\right)$

$$= \frac{1}{f'\left(\frac{\ln 2}{6}\right)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Q3

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}$

C.E. 1) $2x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$

2) $\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1}{2}$

$\text{dom } f =]\frac{1}{2}; +\infty[= \text{dom}_c f$

f étant une fonction continue sur $[1;41]$ on peut calculer

$$\int_1^{41} f(x)\,dx = \int_1^{41} \frac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}\,dx$$

poser $t = \sqrt[4]{2x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{t^4+1}{2} \qquad dx = 2t^3\,dt$

si $x = 1$, $t = 1$

si $x = 41$, $t = 3$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+1 \\ \underline{t^2+t} & \overline{t-1} \\ -t & \\ \underline{-t-1} & \\ 1 & \end{array}$$

$t^2 = (t+1)(t-1) + 1$

$$= \int_1^3 \frac{2t^3}{t^2+t}\,dt$$

$$= \int_1^3 \frac{2t^3}{t(t+1)}\,dt$$

$$= 2\int_1^3 \frac{t^2}{t+1}\,dt$$

$$= 2\int_1^3 t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right]_1^3$$

$$= 2\left(\frac{9}{2} - 3 + \ln(4) - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2)\right)$$

$$= 2(2 + \ln(2))$$

$$= 4 + \ln(4)$$

2) $2^x + 3^x = 4^x$ $\quad\quad$ $1 : 4^x > 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1}_{:= g(x)} = 0$$

$g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = \underbrace{\underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x \ln\left(\frac{3}{4}\right)}_{<0}}_{<0}$

g est str. décroissante et continue sur $\mathbb{R}$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$

$\Rightarrow$ par le thm. des valeurs intermédiaires

il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = 0$.

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ANALYSE

Mardi, le 21 janvier 2014 de 15h00 à 18h00

QUESTION I : 8 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x+1)ln|x+1|$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$.

1) Faire une étude complète de f. (domaine de définition, domaine de continuité, limites, branches infinies, domaine de dérivabilité et dérivée première, dérivée seconde, tableau des variations, intersections de la courbe C_f avec les axes de coordonnées)

2) Tracer C_f, la représentation graphique de f, dans un RON$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.(unité : 2 cm)

3) **a)** Déterminer, lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = (x+1)^2 ln|x+1|$

b) α étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$, calculer l'aire $A(\alpha)$ de la surface $S(\alpha)$ ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $-1+\alpha \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \to o^+} A(\alpha)$.

QUESTION II : 5 points

Discuter le nombre de solutions de l'équation suivante selon les valeurs du paramètre réel m et résoudre l'équation aux cas où elle admet une solution unique.

$$(E) \equiv (4-m)(0{,}2)^x + (2m-6)\sqrt{(0{,}2)^x} - 4m + 12 = 0$$

QUESTION III : 4 points

Un flotteur a la forme d'un solide de révolution engendré par la rotation autour de (Ox) de la surface délimitée par (Ox) et la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = sin^2\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer la valeur exacte du volume du flotteur.

QUESTION IV : 3 points

On donne la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} a - b^x & si\ x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \epsilon \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x = 0$.

Q1

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\ln|x+1| & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Continuité}}$

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que composée de fonctions continues

Continuité en -1 :

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \overbrace{(x+1)}^{\to 0^+} \overbrace{\ln(x+1)}^{\to +\infty}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{\ln(x+1)}{\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to +\infty}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to (-1)^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} -(x+1)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \overbrace{(x+1)}^{\to 0^-} \overbrace{\ln(-x-1)}^{\to +\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to (-1)^-} -(x+1)$$

$$= 0$$

Ainsi $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = 0$,

c'est-à-dire la limite en -1 de f existe et vaut 0 : $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$

Comme $f(-1) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

c'est-à-dire f est continue en -1 :

$$\mathrm{dom}_c f = \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{limites aux bornes du domaine}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1) \ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{(x+1)}{x}}_{\to 1} \underbrace{\ln(x+1)}_{\to +\infty} = +\infty$$

C_f admet (en $+\infty$) une branche parabolique de direction Oy.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to -\infty} \ln \underbrace{(-x-1)}_{\to +\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{(x+1)}{x}}_{\to 1} \ln \underbrace{(-x-1)}_{\to +\infty} = +\infty$$

C_f admet (en $-\infty$) une branche parabolique de direction Oy

dérivabilité

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

$$f'(x) = \ln|x+1| + (x+1)\frac{1}{x+1}$$
$$= \ln|x+1| + 1$$

$0 \leq |x+1| \leq 1$
$\Leftrightarrow -1 \leq x+1 \leq 1$
$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$

dérivabilité en -1

$$\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} [\ln(x+1)+1] = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} [\ln(\bar{x+1})+1] = -\infty$$

Ainsi f n'est pas dérivable en -1 et

$(-1;0)$ est un point d'inflexion à tangente verticale.

(Autre méthode : regarder $\lim_{x\to(-1)^+}$ et $\lim_{x\to(-1)^-}$ de $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R}\setminus\{-1\} = \mathrm{dom}\, f''$

Dérivée seconde

$\mathrm{dom}\, f'' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

et $\forall x \in \mathrm{dom}\, f''$, $f''(x) = \frac{1}{x+1}$.

Tableau

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x+1| = \ln e^{-1}$

$\Leftrightarrow |x+1| = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} - 1$

ou $x = -\frac{1}{e} - 1$

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{e}$		-1		$-1+\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$ $-\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $-$	0	$+$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$
concavité de f			$\cap$ $\downarrow$				$\cup$ $\uparrow$		

maximum local : $f\left(-1-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left|\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e}$

$I_1\left(-1-\frac{1}{e} , \frac{1}{e}\right)$

minimum local : $f\left(-1+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left|\frac{1}{e}\right| = -\frac{1}{e}$

$I_2\left(-1+\frac{1}{e} ; -\frac{1}{e}\right)$

Intersection avec les axes

$C_f \cap O_x \Leftrightarrow (x+1)\ln|x+1| = 0 \quad \forall x \in \text{dom} f$

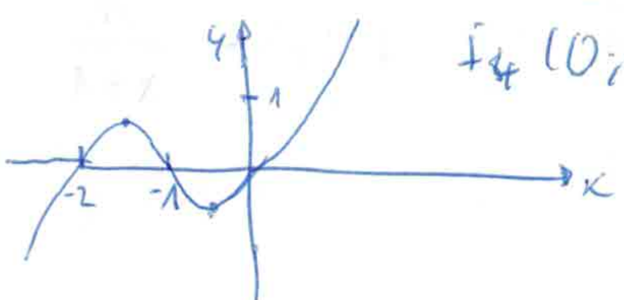
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = -2$

$I_3(-1;0)$; $I_4(0,0)$; $I_5(-2;0)$

$C_f \cap O_y$: $f(0) = 1 \ln|1| = 0$

$I_4(0;0)$.

2)



3) a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = 2(x+1)\ln|x+1| + (x+1)^2 \frac{1}{(x+1)}$$

$$= 2(x+1)\ln|x+1| + (x+1)$$

$$= (x+1)\left(2\ln|x+1| + 1\right)$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{2\ln(x+1) + 1}{\frac{1}{(x+1)}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to (-1)^+} \frac{\frac{2}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} -2(x+1)$$

$$= 0$$

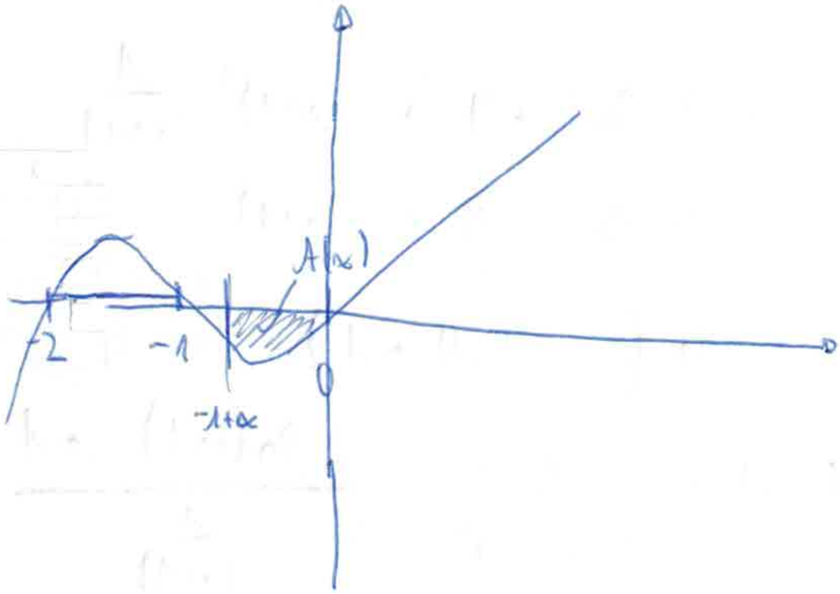
$$\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \dots = 0$$

Ainsi $\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} f'(x)$

mais f n'est pas dérivable en -1, vu que f n'est pas définie en -1.

On a $f_g'(-1) = 0 = f_d'(-1) = 0$

b) Soit $\alpha \in]0;1[$



sur $\underbrace{[-1+\alpha}_{\geq -1}, 0]$ $\qquad x+1$ est positif : $\quad x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -1$

$$A(\alpha) \int_{-1+\alpha}^{0} -f(x) \, dx$$

$$= \int_{-1+\alpha}^{0} -(x+1) \ln(x+1) \, dx$$

$$\ln(x+1) \qquad\qquad (x+1)$$

$$\frac{1}{x+1} \qquad\qquad \frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1)\right]_{-1+\alpha}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-1+\alpha}^{0} x+1 \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1)\right]_{-1+\alpha}^{0} + \frac{1}{4}\left[(x+1)^2\right]_{-1+\alpha}^{0}$$

$$= 0 + \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) + \frac{1}{4}(1-\alpha^2)$$

c) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha^2}} + \frac{1}{4} \overset{(H)}{=} \frac{1}{2}\lim \overbrace{\frac{\frac{1}{\alpha}}{-2\frac{1}{\alpha^3}}}^{\to 0} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Q2

$(E) \equiv (4-m)(0,2)^{x} + (2m-6)\sqrt{(0,2)^{x}} - 4m+12 = 0$

$D_m = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, posons $t = (0,2)^{\frac{x}{2}} > 0$, alors (E) s'écrit

$(E_{mod}) \equiv (4-m)\,t^2 + (2m-6)\,t - 4m+12 = 0$

si $\underline{m=4}$, on obtient

$$\begin{aligned} & 2t - 16 + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = 2 \\ \Leftrightarrow\ & (0,2)^{\frac{x}{2}} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2\log_{0,2} 2 \end{aligned}$$

(solution unique)

si $\underline{m \neq 4}$, calculons $\Delta_m = (2m-6)^2 - 4(4-m)(-4m+12)$

$= -12m^2 + 88m - 156$

$\Delta_m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ ou $m = \frac{13}{3}$

m	$-\infty$		3		$\frac{13}{3}$	
Δ_m		$-$	0	$+$	0	$-$

si $m=3$ $\Delta_m = 0$

$t = \frac{6-2m}{2(4-m)} = 0$ $\lightning$ car $t>0$ pas de solution

si $m = \frac{13}{3}$ $\Delta_m = 0$ $t = \frac{6-2m}{2(4-m)} = 4 \Leftrightarrow (0,2)^{\frac{x}{2}} = 4$

$\Leftrightarrow \quad (0{,}2)^{\frac{x}{2}} = 0{,}2^{\log_{0,2} 4}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \log_{0,2} 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 4 \log_{0,2} 2$

Au total,

si $m \in]-\infty ; 3] \cup]\frac{13}{3}, +\infty[$, (E) n'admet pas de solutions

si $m \in]3;4[\cup]4;\frac{13}{3}[$, $(E)_{\text{mod}}$ admet 2 solutions (*)

si $m = 3$, (E) admet la solution unique $4 \log_{0,2} 2$

si $m = 4$, (E) admet la solution unique $2 \log_{0,2} 2$.

(*) Il faut étudier le signe de t_1 et t_2 car ~~t~~ $t>0$

On considère le produit P et la somme S des 2 solutions

$P = \frac{c}{a} = \frac{-4m+12}{4-m} = \frac{12-4m}{4-m} = \frac{4(3-m)}{4-m}$

$S = \frac{-b}{a} = -\frac{(2m-6)}{4-m} = \frac{6-2m}{4-m} = \frac{2(3-m)}{4-m}$

	3		4		$\frac{13}{3}$
P	0	$-$	||	$+$	
S	0	$-$	||	$+$	

Une solution est >0 et l'autre <0.

Les 2 solutions sont >0

Conclusion : si $m \in]3,4[$ (E) admet une solution unique pour $m \in]3;4[$

$$t_{1/2} = \frac{\overbrace{6-2m}^{<0} \pm \sqrt{-12m^2+88m-156}}{\underbrace{2(4-m)}_{>0}}$$

donc la solution positive est

$$t_1 = \frac{3-m + \sqrt{-3m^2+22m-39}}{(4-m)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,2)^{\frac{x}{2}} = \text{―――――}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \log_{0,2} \frac{3-m+\sqrt{-3m^2+22m-39}}{4-m}$$

QIII :

Posons

$f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} = \operatorname{dom}_c f$

De plus $\forall x \in [0;\pi]$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$$

Volume du flotteur

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\left(1-\cos(x)\right)^2 \frac{1}{2}\left(1+\cos(x)\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \left(1-\cos(x)\right) \underbrace{\left(1-\cos^2(x)\right)}_{\sin^2(x)} dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\int_0^{\pi} \sin^2(x)\, dx - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\cos(x)\, dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x)\, dx - \frac{1}{3}\underbrace{\left[\sin^3(x)\right]_0^{\pi}}_{=0}\right]$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{\quad} \;\text{u.v.}$$

Q IV

$$f(x) = \begin{cases} a - b^x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}, \; b > 0 \text{ et } b \neq 1$$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

continuité de f en 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a - b^x = a - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 - 2x^2 + x = 0$$

f est continue en $0 \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\Leftrightarrow a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -b^x \ln(b) & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\ln(b)$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$

si $\lim_{x \to a} f'(x) = l$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$

dérivabilité en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - b^x - 0}{x} = \cancel{-b^x} \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - b^x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-b^x \ln(b)}{1} = -[illegible]$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} x^2 - 2x + 1 = 1$$

~~Rép~~

Or f est dérivable en 0

$\Leftrightarrow$ dérivées à droite et à gauche $\exists$ et coincident

$\Leftrightarrow$ $-\ln(b) = 1$

$\Leftrightarrow$ $b = \frac{1}{e}$

ainsi $a = 1$ et $b = \frac{1}{e}$

et

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Concours de recrutement en mathématiques
Épreuve d'analyse

Mardi, le 30 janvier 2018
de 15h00 à 18h00

Question 1 **(6 points)**

(a) Résolvez l'équation $\quad x^{|x-1|} = \sqrt{x}^{\frac{1}{x}}$

(b) Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{-1+e^{\frac{\pi}{2}}} (1+x)^2 \sin\big[\ln(1+x)\big]\, dx$

(c) On donne les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = e^{2x}$.
Tracez les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g. (RON; unité 1cm)
Déterminez le volume du solide obtenu en faisant tourner la surface fermée délimitée par C_f, C_g et la droite d d'équation $x = 1$ autour de l'axe (Oy).

Question 2 **(7 points)**

On donne la famille de fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x-1)\sqrt[3]{ax+1}$ où a est un paramètre réel.

(a) Etudiez la dérivabilité de f_a et précisez le domaine de dérivabilité en fonction de la valeur de a.
Pour les valeurs éventuelles en lesquelles f_a n'est pas dérivable, donnez l'interprétation graphique des résultats trouvés.

(b) Pour $a = -4$, calculez l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f_a, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Question 3 **(7 points)**

$\boxed{\text{A}}$ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ par $g(x) = x\ln|x| - (x-2)\ln|x-2|$.
Etudiez les variations de la fonction g et déduisez-en le signe de $g(x)$.

$\boxed{\text{B}}$ Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.

(a) Déterminez le domaine de définition de f. Calculez les limites aux bornes du domaine et précisez les équations des asymptotes éventuelles.

(b) Déterminez la dérivée de f et établissez le tableau de variation de f.

(c) Esquissez la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (unité: 1 cm).

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE ORALE
2018

1) Définir les notions suivantes : fonction, application, injection, surjection, bijection.

2) On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-2}{4x+1}$.

a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de f à l'ensemble A, notée $\bar{f}$, soit une bijection de A vers B.

b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{f}^{-1}$ de la fonction $\bar{f}$.

3) On donne la fonction g définie par $g(x) = x^2 - x - 1$.

a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de g à l'ensemble A, notée $\bar{g}$, soit une bijection de A vers B.

b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{g}^{-1}$ de la fonction $\bar{g}$.

c) Faire la représentation graphique des fonctions $\bar{g}$ et $\bar{g}^{-1}$.

4) On donne la fonction h définie par $h(x) = 3 - \sqrt{x^2 - 4}$.

a) Déterminer des ensembles A et B « aussi grands que possible » tels que la restriction de h à l'ensemble A, notée $\bar{h}$, soit une bijection de A vers B.

b) Déterminer une expression de la réciproque $\bar{h}^{-1}$ de la fonction $\bar{h}$.

c) Compléter : $\forall x \in \cdots : \bar{h} \circ \bar{h}^{-1}(x) = \cdots$

$\forall x \in \cdots : \bar{h}^{-1} \circ \bar{h}(x) = \cdots$