EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

PROBLEME

Le problème a pour but l'étude de la famille des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_m(x) = x + m\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad m \in \mathbb{R}^*$$

et des courbes C_m d'équation $y = f_m(x)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 2 cm pour unité graphique)

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2 - 1}$$

1) Faire l'étude de la fonction φ. (Branches infinies, dérivée, table de variations)

2) Représenter graphiquement la fonction φ.
Discuter graphiquement suivant les valeurs de m $(m \in \mathbb{R}^*)$ le signe de $\varphi(x) - m$.
(la discussion mettra en évidence, entre autres, le nombre $\frac{1}{2}\,e^{\frac{3}{2}}$ que l'on désignera par m_o)

3) Etudier les variations des fonctions f_m. L'étude du signe de la dérivée utilisera la fonction φ. Donner les tableaux de variations

4) Montrer que les courbes C_m admettent une même asymptote Δ et étudie la position de C_m par rapport à Δ.

5) Représenter sur un même graphique C_1, C_{m_o}, C_4, C_{-1} et C_{-3}.

6) Démontrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : (1 - x^2) f_m(x) = x\,f_m'(x) - x^3 \qquad (R)$$

7) Soit L l'ensemble des points des courbes C_m quand m décrit $\mathbb{R}^*$ où la tangente à la courbe est parallèle à $(O, \vec{i})$.
Montrer, en utilisant la relation (R), que L est une partie d'une courbe Γ dont on donnera une équation cartésienne. Etudier brièvement la fonction dont L est la courbe représentative (asympto dérivée, tableau de variations) et construire L sur le graphique précédent.

8) Que deviennent les courbes C_m si f_m est définie sur $\mathbb{R}$? (au lieu d'être définie sur $\mathbb{R}_+$)

Concours de recrutement 1997

Mathématiques

EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

Problème

Soit m un paramètre pouvant prendre toute valeur réelle. Pour chaque valeur de m on considère la fonction f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_m(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m|+m}$$

A 1) Déterminer suivant les valeurs de m

- l'ensemble D_m des points où f_m est définie
- l'ensemble C_m des points où f_m est continue
- l'ensemble F_m des points où f_m est dérivable

2) Soit Γ_m la courbe représentative de f_m dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé.

a) Quelles sont les asymptotes de Γ_m ?
b) La courbe admet-elle un centre de symétrie ?
c) Etudier les variations de f_m.
d) Représenter graphiquement Γ_{-1}, Γ_0, et Γ_1.

3) a) Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes Γ_m correspondant aux m strictement positifs.

b) Montrer que, pour chaque m strictement positif, il existe une application affine transformant Γ_1 en Γ_m et Γ_{-1} en Γ_{-m}.

B Dans cette partie m est strictement positif.

1) a) Calculer l'intégrale $\int_0^a [2-f_m(x)]dx$, où a est un réel vérifiant $0<m\leq a$.

b) En déduire que, a étant fixé, cette intégrale tend vers une limite lorsque m tend vers 0 par valeurs positives.

2) Soit un entier $p\geq 2$:

a) Montrer que, pour chaque $m>0$: $\int_0^m [2-f_m(x)]^p dx \leq 3^p m$

(sans chercher à calculer l'intégrale)

b) Calculer $\int_m^a [2-f_m(x)]^p dx$ lorsque $0<m\leq a$

c) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{m\to 0^+} \int_0^a [2-f_m(x)]^p dx$

Concours de recrutement en mathématiques 12 novembre 1998

Epreuve d'analyse

Exercice 1

Soit la fonction f_a, définie $\forall x \in IR_+^*$ de la façon suivante:

$$f_a(x) = \left(1 + x^a\right)^{\frac{1}{a}} \qquad avec \quad a \in IR^*.$$

C_a est la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Etude des limites de f_a aux bornes du domaine, des asymptotes et des branches infinies de C_a.
2) Montrer que f_a peut être prolongée par continuité en x = 0 par une fonction g_a. Dérivabilité de g_a au point x = 0.
3) Variations de f_a.
4) Représenter sur le même graphique les courbes C_{-2} , C_2 , C_1 et $C_{\frac{1}{2}}$.

(10 pts)

Exercice 2

1) Calculer et discuter suivant les valeurs des paramètres p et q :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin px}{x - \sin qx} \qquad \text{sachant que } (p,q) \in IN^2$$

2) Calculer l'intégrale suivante:

$$A = \int_{1}^{64} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

3) Soit la fonction f définie de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x} & si \quad x \leq 1 \\ ax + b & si \quad x > 1 \end{cases} \quad et\ (a;b) \in IR^{2}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable au point x = 1.

(4 + 3 + 3 pts)

Epreuve de géométrie

17 novembre 1998

(14h30-17h30)

I. *Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que:* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

On désigne par: r_A *la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$

r_B *la rotation de centre B et d'angle* $\frac{\pi}{3}$

r_C *la rotation de centre C et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

On note D et E les points tels que: $r_B(A)=D$ *et* $r_C(D)=E$.

1. Déterminer $r_C \circ r_B \circ r_A(B)$ et préciser la nature de l'application $r_C \circ r_B \circ r_A$. Préciser la position du point E.

2. On désigne par s la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ telle que s(A)=B. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD})$. En déduire que s(E)=D.

3. Soit Ω le centre de la similitude s. Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.

(3+3+2=8 points)

II. *On considère dans le plan orienté rapporté au repère orthonormé direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *la courbe (C) d'équation:* $x\cdot y - 2x - 3y - 1 = 0$.

Soit f la transformation du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que: $z'=\frac{1-i}{2}z - 2 + 2i$.

1. Montrer que f admet un point invariant unique que l'on déterminera. Reconnaître la nature de la transfomation f et en donner les éléments caractéristiques.
2. Exprimer les coordonnées (x,y) de M en fonction des coordonnées (x',y') de M'.
3. Montrer que l'image de la courbe (C) par la transfomation f est la courbe (C') d'équation: $x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0$.
4. Préciser les éléments caractéristiques de (C') et représenter (C') dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$

(2+1+2+3 = 8 points)

III. Dans l'espace affine euclidien (E) de dimension 3, on donne deux points fixes A et B.

Déterminer l'ensemble S des couples (P,Q) de ExE qui vérifient:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0} \\ \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ} = 0 \end{cases}$$

1 novembre 1998 x angles

(Indication: On pourra utiliser I=mil[PQ])

(4 points)

Epreuve de géométrie du 17 novembre 1998

Exercice I

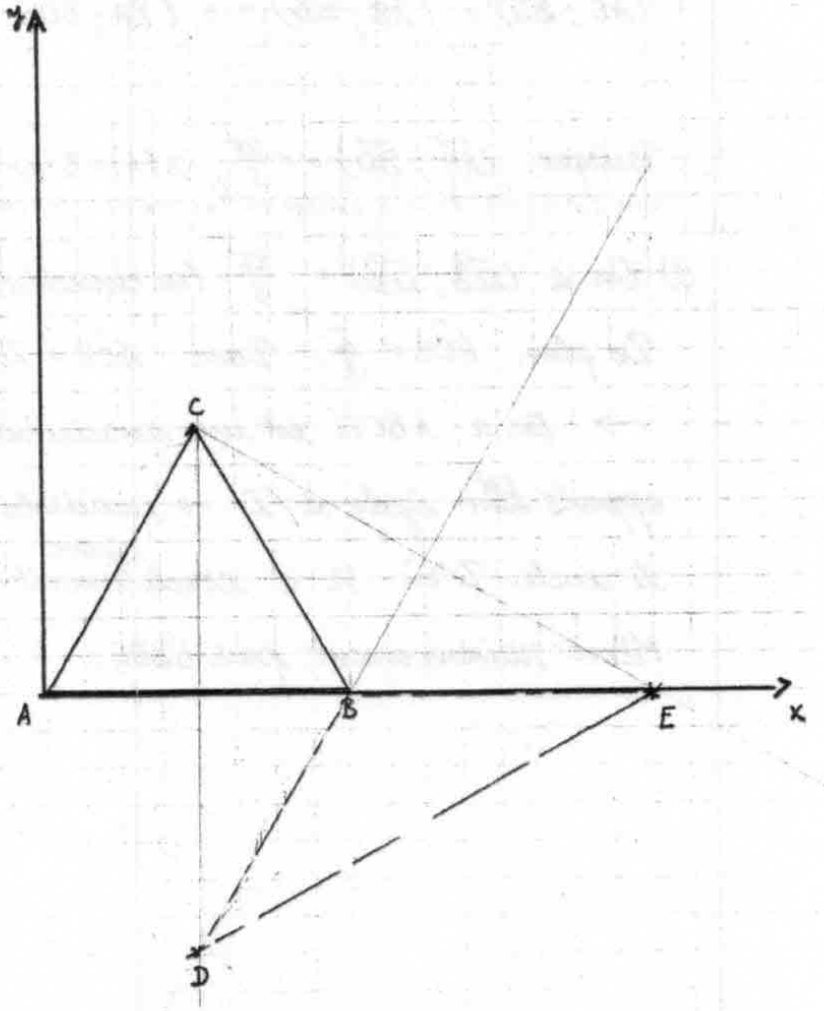
ABC triangle équilatéral avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$r_A = r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$

$r_B = r\left(B; \frac{\pi}{3}\right)$

$r_C = r\left(C; \frac{\pi}{3}\right)$

$r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.



1) On a : $r_A(B) = C$, car $\overline{AB} = \overline{AC}$ (triangle équilatéral) et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$

de même $r_B(C) = A$, car $\overline{BC} = \overline{BA}$ et $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$

et $r_C(A) = B$, car $\overline{CA} = \overline{CB}$ et $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$.

D'où $r_C \circ r_B \circ r_A(B) = r_C \circ r_B(C) = r_C(A) = B$

Donc B est un point fixe pour $r_C \circ r_B \circ r_C$.

Angle de $r_C \circ r_B \circ r_C = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

Donc $r_C \circ r_B \circ r_C = r(B; \pi) = s_B$ (symétrie centrale de centre B).

On a $E = s_B(A)$, en effet :

$s_B(A) = r_C \circ r_B \circ r_A(A) = r_C \circ r_B(A) = r_C(D) = E$.

2) $s = s(\Omega; \lambda = \frac{1}{2}; \theta = -\frac{2\pi}{3})$ telle que $s(A) = B$.

On a $\overline{BD} = \overline{BA}$ car $D = s_B(A)$, et $\overline{AE} = 2\,\overline{BA}$ car $E = s_B(A)$ d'où $B = \text{mil}[AE]$.

Donc : $\frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BA}}{2\overline{BA}} = \frac{1}{2}$.

$(\vec{AE}; \vec{BD}) = (\vec{AB}; \vec{BD}) = +(\vec{BA}; \vec{BD}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi$ car $D = r_B(A)$

$= \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

Puisque $(\vec{AE}; \vec{BD}) = -\frac{2\pi}{3}$, $s(A) = B$ et $\frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = \frac{1}{2}$ on a $s(E) = D$.

Une similitude directe conserve les angles orientés

3) On a $(\vec{\Omega B}; \vec{\Omega BA}) = \frac{2\pi}{3}$ (on considère l'angle non orienté)

De plus $A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$. Donc $A\hat{C}B = \pi - A\hat{\Omega}B$.

→ On a $AB C\Omega$ est un quadrilatère dont les angles opposés ~~sont~~ est égale à π → quadrilatère convexe inscrit dans le cercle. D'où Ω c cercle circonscrit à ABC.

Même raisonnement pour ΔBDE.

Exercice II

$\mathcal{C}$: $xy - 2x - 3y - 1 = 0$.

$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$
$M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = \frac{1-i}{2} z - 2 + 2i$. $a = \frac{1-i}{2}$ et $b = -2+2i$

1) f admet un point invariant $\Leftrightarrow \exists z$ tel que $z = \frac{1-i}{2} z - 2 + 2i$

$\Leftrightarrow (1 - \frac{1-i}{2}) z = -2 + 2i$

$\Leftrightarrow \frac{1+i}{2} z = -2 + 2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-4+4i}{1+i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{4(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$\Leftrightarrow z = -2(1 - 2i - 1)$

$\Leftrightarrow z = 4i$

Donc f est une similitude de centre $\Omega(4i)$

Rapport de f : $|a| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{i^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Angle de f : $\arg(a) = \arg(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i)$

$= \arg(\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i)) = -\frac{\pi}{4}$

$f = s(\Omega(4i) ; \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \theta = -\frac{\pi}{4})$

2) $z' = \frac{1-i}{2} z - 2 + 2i$

$x' + iy' = \frac{1-i}{2}(x + iy) - 2 + 2i$

$x' + iy' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\,i + \frac{1}{2}yi + \frac{1}{2}y - 2 + 2i$

$= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 2) + (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2)\,i$

Ainsi on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 & (1) \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 & (2) \end{cases}$$

On calcule (1) + (2) : $x' + y' = y$

On calcule (1) − (2) : $x' - y' = x - 4 \Leftrightarrow x = x' - y' + 4$

Donc $\begin{cases} x = x' - y' + 4 \\ y = x' + y' \end{cases}$

3. $x \cdot y - 2x - 3y - 1 = 0$ on utilise les égalités trouvées en 2.)

$(x'-y'+4)(x'+y') - 2(x'-y'+4) - 3(x'+y') - 1 = 0$

$x'^2 + x'y' - x'y' - y'^2 + 4x' + 4y' - 2x' + 2y' - 8 - 3x' - 3y' - 1 = 0$

$x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0$

4. $\mathcal{C}'$: $(x'^2 - x' + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - (y'^2 - 3y' + \frac{9}{4}) + \frac{9}{4} - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x' - \frac{1}{2})^2 - (y' - \frac{3}{2})^2 = 7$

$\Leftrightarrow \frac{(x' - \frac{1}{2})^2}{7} - \frac{(y' - \frac{3}{2})^2}{7} = 1$

$\mathcal{C}'$ est une hyperbole de centre $\Omega(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ avec $a = b = \sqrt{7}$.

$c = \sqrt{7+7} = \sqrt{14}$

Dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

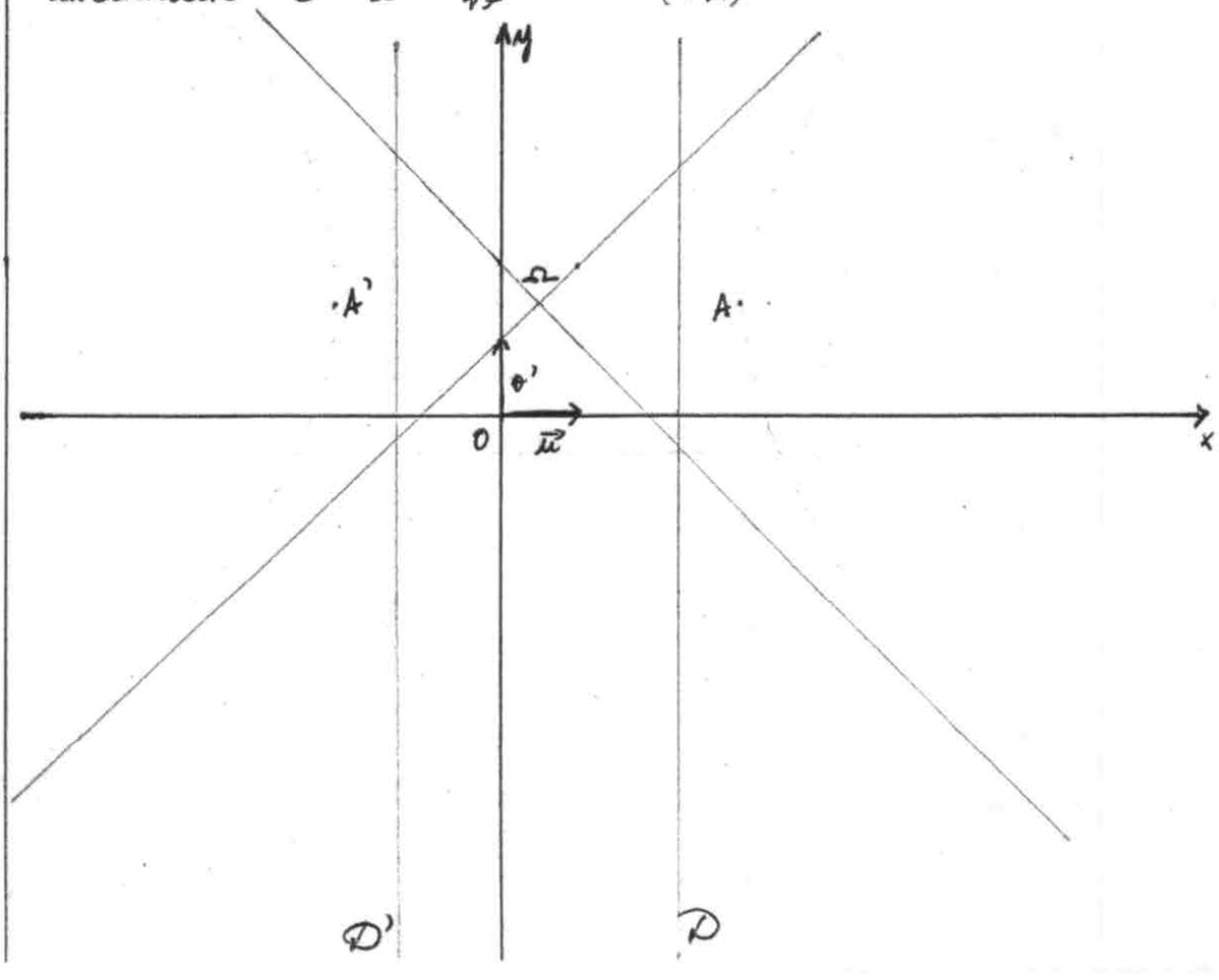
Sommets : $A(\sqrt{7} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et $A'(-\sqrt{7} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

foyers : $F(\sqrt{14} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et $F'(-\sqrt{14} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

directrice : $D : x = \frac{7}{\sqrt{14}} + \frac{1}{2}$ et $D' : x = \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{1}{2}$

asymptotes : $\mathcal{A}_1 : y = x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = x + 1$ et $\mathcal{A}_2 : y = -x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -x + 2$

excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \sqrt{2}$ (> 1)



Exercice 311

$$\begin{cases} \vec{AB} + \vec{AP} + \vec{AQ} = \vec{0} & (1) \\ \|\vec{AB}\|^2 + \vec{AP} \cdot \vec{AQ} = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) : $\vec{AB} + \vec{AP} + \vec{AQ} = \vec{0}$, alors A est le barycentre des points (B;1), (P;1) et (Q;1,

ou $\vec{AB} + \vec{AI} + \vec{IP} + \vec{AI} + \vec{IQ} = 0$ avec I = mil [PQ]

$\vec{AB} + 2\vec{AI} = 0$ (*) A est le barycentre des points (B;1) et (I;2)

(2) : $\|\vec{AB}\|^2 + \vec{AP} \cdot \vec{AQ} = 0$

$\|\vec{AB}\|^2 + (\vec{AI} + \vec{IP}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IQ}) = 0$

$\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AI}\|^2 + \vec{AI} \cdot \vec{IQ} + \vec{IP} \cdot \vec{AI} + \vec{IP} \cdot \vec{IQ} = 0$

Comme $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{BA}$ (d'après (*)) on a $\|\vec{AI}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{AB}\|^2$

~~et comme I = mil [PQ] $\vec{IP} \cdot \vec{IQ} = 0$~~ , on a donc :

$\|\vec{AB}\|^2 + \frac{1}{4}\|\vec{AB}\|^2 + \vec{AI}(\vec{IQ} + \vec{IP}) + \vec{IP} \cdot \vec{IQ} = 0$

$\frac{5}{4}\|\vec{AB}\|^2 + \vec{IP} \cdot \vec{IP} = 0$

$\frac{5}{4}\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{IP}\|^2$

$\|\vec{IP}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}\|\vec{AB}\|$

$\frac{5}{4}\|\vec{AB}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{PQ}\|^2$

$\|\vec{AB}\|^2 = \frac{1}{5}\|\vec{PQ}\|^2$

$\vec{PQ} = \sqrt{5} \cdot \vec{AB}$

⇒ Sphère

Concours de recrutement 1999

Mathématiques

EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

I. Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité = 2 cm)
Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = x - e^{nx}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et soit C_n sa courbe représentative dans le plan P.

1) Etudier f_n : branches infinies, variations; construire C_1 .

2) Etudier la position de C_{n+1} par rapport à C_n ; montrer qu'il existe un seul point commun à toutes les courbes C_n ; tracer C_2 sur le même graphique que C_1 .

3) α étant un nombre réel donné non nul, calculer, en cm^2, l'aire (géométrique) $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion du plan comprise entre les courbes C_n et C_{n+1} et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$;
déterminer ensuite en fonction de n : $\lim_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$

4) A chaque point M d'abscisse x de C_n on associe le point N, de même abscisse, situé sur la droite D d'équation $y = x$.

On pose $\overline{MN} = g_n(x)$. Exprimer $g_n(x)$ en fonction de x et calculer
$S_n(k) = g_n(0) + g_n(-1) + g_n(-2) + \cdots + g_n(-k)$ $(k \in \mathbb{N})$

Déterminer, en fonction de n, $\lim_{k \to +\infty} S_n(k)$

11 points sur 20

II. 1) Définir la fonction Arc sin et montrer que la dérivée de cette fonction est :

$$(\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{avec } |x| < 1$$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \text{Arc sin } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

- déterminer le domaine de f et celui de f'
- calculer f'(x)

3) Evaluer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$

4) Simplifier l'expression de la fonction g définie par $g(x) = \text{Arc sin } (\cos x)$ si $x \in [0, 2\pi]$

Indication : on pourrait calculer g'(x) = ...

9 points sur 20

Concours de recrutement en mathématiques
10 novembre 2000 $(14^{30} - 17^{30})$
EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x\cdot|x|}$ si $x \in [-1;0[\cup]0;1]$ et $f(0) = 0$.
1) Etudier la parité de f , la continuité de f et la dérivabilité de f.
2) Déterminer le sens de variation de f .
3) Démontrer que f définit une bijection de $[-1;1]$sur $[-1;1]$.
Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in]0;1[$.
4) Montrer que pour tout $y \in [-1;1]$, $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.
En déduire l'expression de $f^{-1}(y)$pour $y \in]-1;0[$.
5) Déterminer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$ après avoir justifié son existence.

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x - x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$sur $]0;+\infty[$ et h la fonction définie par $h(x) = \ln x - 1$ sur $]0;+\infty[$.
1) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $0 \leq x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq 1$.
(On peut utiliser l' inégalité: $\forall x \in]0;+\infty[, \ln(x) \leq x-1$).
En déduire l'encadrement: $\forall x \in]0;+\infty[, h(x) \leq f(x) \leq \ln x$.
2) Calculer la dérivée et la dérivée seconde de f et les limites de la dérivée en 0 et en $+\infty$.En déduire le sens de variation de f.
3) Soit I et J deux intervalles inclus dans IR, u et v deux fonctions continues,strictement croissantes sur I et telles que $J = u(I) = v(I)$ et pour tout $x \in I, u(x) \leq v(x)$.
Démontrer que: $\forall y \in J, v^{-1}(y) \leq u^{-1}(y)$.
(On pourra p.ex. comparer $u^{-1}(u(x))$; $v^{-1}(v(x))$ et $v^{-1}(u(x))$ pour $x \in I$.)
4) Utiliser les résultats établis sous 1) et 3), pour montrer que: $\forall y \in IR, e^y \leq f^{-1}(y) \leq e^{y+1}$.
En déduire un encadrement de $f^{-1}(\ln 10)$.
5) Démontrer que pour tout $a \in]0;+\infty[$, $a^{a+1} > 10\cdot(a+1)^a \Leftrightarrow a > f^{-1}(\ln 10)$.
6) Soit pour tout réel $a > e$, g_a la fonction définie sur $[a;+\infty[$ par $g_a(x) = a^x\cdot x^{-a}$.Démontrer que g_a est strictement croissante sur $[a;+\infty[$.
7) Démontrer que pour tous les entiers naturels a et x, si $a \geq 28$ et $x \geq 28$ et les écritures décimales de a^x et x^a ont le même nombre de chiffres alors $x = a$.

Répartition des points: 9 ; 11

Concours de recrutement en mathématiques

Epreuve d'analyse

7 novembre 2001

(14h30-17h30)

I. *Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie par:*

$$f(x)=\frac{1}{8}\ln x - x\ln x + x$$

1. Etudier f (ensemble de définition, limites, branches infinies de la courbe représentative (C_f),, fonction dérivée (*),sens de variation, tableau de variation).

(*)On montrera que l'équation f'(x)=0 admet une solution unique notée x_o . Justifier $1<x_o<1,2$. Pour étudier le signe de f', on pourra utiliser f".

2. Prouver que:

$$0\le f(x_o)-f(1)\le (x_o-1)\cdot f'(1)\le 0{,}2\cdot f'(1).$$

En déduire un encadrement de $f(x_o)$.

II. 1. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$

Déduire de l'étude des variations de φ le signe de φ.

2. Soit g la fonction définie par: $g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0\end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en $x_o = 0$.

b) Donner le sens de variation de g et préciser les branches infinies de (C_g).

c) Représenter graphiquement la fonction g.

III. Pour tout entier naturel n, on note h_n l'application de [0;1] dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$h_n(x)=\begin{cases}x^n\cdot\sqrt{1-x} & \text{si } n\in\mathbb{N}^*\\ \sqrt{1-x} & \text{si } n=0\end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de h_n.

2. Donner, suivant les valeurs de n, le tableau de variation de h_n.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes (C_o), (C_1) et (C_2) représentatives de h_o , h_1 et h_2 .

3. Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n = \int_0^1 h_n(x)dx$.

a) Calculer I_0.

b) Montrer que pour $n \geq 1$: $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

c) Établir: $I_n \leq \frac{1}{n+1}$

IV. *Soit f la fonction numérique f_1 de variable réelle x définie par:*

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,x - 4 + \sqrt{3x^2+4}\right)$$

1. Étudier f_1 (ensemble de définition, limites, continuité, dérivabilité limites, branches infinies de la courbe représentative (C_1), sens de variation, tableau de variation).
2. Montrer que f_1 est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une partie de $\mathbb{R}$ à préciser. Déterminer f_1^{-1}. Construire dans le plan muni d'un même repère les courbes représentatives (C_1) et (C_1^{-1}).
3. On considère: $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f_1(x)\,dx$. Comment peut-on interpréter $|I|$? En déduire un calcul de I à l'aide de f_1^{-1}.

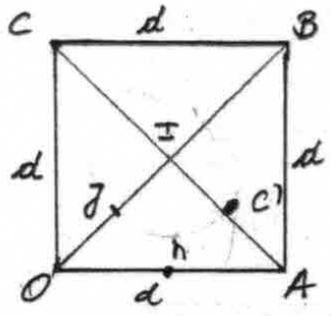
(Répartition des points: 4+5+6+5 points)

Géométrie novembre 2001

$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{AB}, \vec{u})$

$(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (-\vec{AB}, \vec{v})$

Exercice I



1) $f(0) = I$ et $f(A) = J$

a) angle de f : $(\vec{OA}, \vec{IJ}) = (\vec{OA}, \vec{OE})$

$= \pi + (\vec{OA}, \vec{OE})$

$= \pi + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

Rapport de f : $\lambda = \frac{\overline{IJ}}{\overline{OA}}$

On a $\overline{OA} = d$. On a $\overline{OB} = \sqrt{2}\, d$

et $\overline{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{4} d$

D'où $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Soit Ω le centre de similitude, on a alors

~~$(\Omega O, \Omega I) = \frac{5\pi}{4}$ et $(\Omega A, \Omega J) = \frac{5\pi}{4}$~~

On a $(\vec{CO}, \vec{CI}) = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{\overline{CI}}{\overline{CO}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \overline{CI} = \frac{\sqrt{2}}{4} \overline{CO}$

et $(\vec{CA}, \vec{CJ}) = \frac{5\pi}{4}$ et $\frac{\overline{CJ}}{\overline{CA}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \overline{CJ} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2}\, d = \frac{1}{2} d$

Donc $C' \in$ à $\cap$ des cercles $(I ; \frac{\sqrt{2}}{4} d)$ et $(J ; \frac{1}{2} d)$

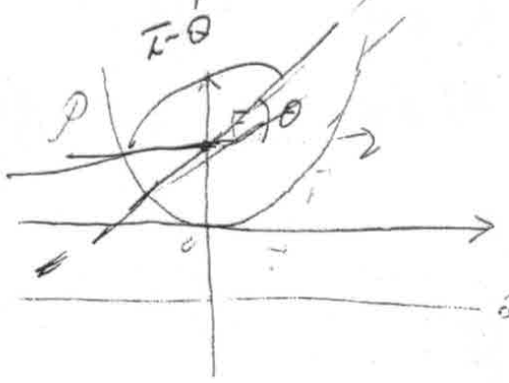
$B' \in \cap$ $(I ; \frac{1}{2} d)$ et $(J ; \frac{\sqrt{2}}{4} d)$

) $\Omega O I C$ cocycliques $\Leftrightarrow$ 3 à 3 non alignés

$(\Omega\vec{O}, \Omega\vec{I}) = (\vec{CO}, \vec{CI})$ [π]

$\longrightarrow \frac{5\pi}{4}$ car $f(0) = I$)

$y = \frac{1}{2p} x^2 = ax^2$ $\quad p \neq 0$



$F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$

Changement de repère de $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vers $(F; \vec{i}, \vec{j})$

Équation de P dans $(F; \vec{i}; \vec{j})$

Nouvelle équation : $y = ax^2 - \frac{1}{4a}$

Posons : $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$

Equation polaire de $\mathcal{P}$:

$$r \cdot \sin\theta = a r^2 \cos^2\theta - \frac{1}{4a}$$

$$\Rightarrow a \cdot \cos^2\theta \, r^2 - \sin\theta \cdot r - \frac{1}{4a} = 0$$

Cherchons r :

$$\Delta = \sin^2\theta + 4 \frac{1}{4a} \cdot a \cos^2\theta$$
$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$
$$= 1$$

d'où : $r = \frac{\sin\theta + 1}{2a\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta + 1}{2a(1 - \sin^2\theta)}$

* remarque : $a \neq 0$ car sinon $\frac{1}{2p} = 0$ impossible !

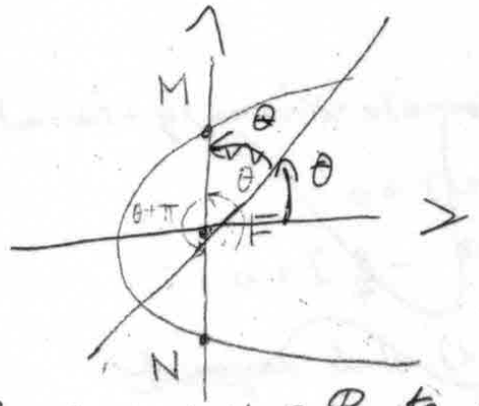
$$= \frac{1}{2a(1 - \sin\theta)}$$

ou $r = \frac{\sin\theta - 1}{2a(1 - \sin^2\theta)} = \frac{-1}{2a(1 + \sin\theta)}$

< 0 à rejeter !

Equation polaire :

$$r = \frac{1}{2a(1 - \sin\theta)}$$



F centre du repère

Soient M et N ∈ P tq M et N ∈ D ∧ P

Supposons ~~M(r, θ)~~ → M(r, θ) et N(r', θ+π)

Alors la deuxième coordonnée de N vaut $\theta + \pi$ et $\overline{FM} = r$ et $\overline{FN} = r'$.

Calculons

$$\frac{1}{\overline{FM}} + \frac{1}{\overline{FN}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$$

$$= 2a(1 - \sin\theta) + 2a(1 - \sin(\theta+\pi))$$

$$= 2a(1 - \sin\theta) + 2a(1 + \sin\theta)$$

$$= 4a \qquad a = \frac{1}{2p}$$

$$= \frac{2}{p} \qquad \square$$

A.W

Géométrie avril 2002

Exercice 1

$mx^2 + (m-1)y^2 + 3mx + 2(1-m)y + m - 1 = 0 \quad m \in \mathbb{R}$.

1) On a : $E_m = E_n$

$(m-n)x^2 + (m-n)y^2 + 3(m-n)x + 2(-m+n)y + (m-n) = 0$

$(m-n)(x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1) = 0$

$(m-n)\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 - \frac{9}{4}\right] = 0$

→ cercle de centre $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$

$mx^2 + my^2 - y^2 + 3mx + 2y - 2my + m - 1 = 0$

$m(x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1) + (-y^2 + 2y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ x^2 + 3x + y^2 + 1 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x^2 + 3x + 1 - 2 + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x(x+3) = 0 \end{cases}$

→ $\Omega_1(-3; 1)$ et $\Omega_2(0; 1)$

2) Si $m = 0$ → $-y^2 + 2y - 1 = 0$

$-(y-1)^2 = 0 \quad y = 1 \quad E_0 = D \quad D \equiv y = 1.$

Si $m = 1$ → $x^2 + 3x = 0$

$x = 0$ ou $x = -3 \quad E_1 = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 : x = 0$ et $D_2 : x = -3$.

Si $m \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$:

$E_m : \quad m\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (m-1)(y-1)^2 = \frac{9}{4}m$

$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9m}{4m}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9m}{4(m-1)}} = 1 \qquad a^2 = \frac{9}{4} \text{ et } b^2 = \frac{9m}{4(m-1)}$

(b/a)

asymptotes ~~$y = x$~~ et ~~$y = -x$~~

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ → $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $v\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

↑ unitaires

$\frac{x^2}{9/4} - \frac{y^2}{9/4} = 1$

$\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\quad \vec{u}+\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{i}$

$\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ $\quad \vec{u}-\vec{v} = \sqrt{2}\,\vec{j}$

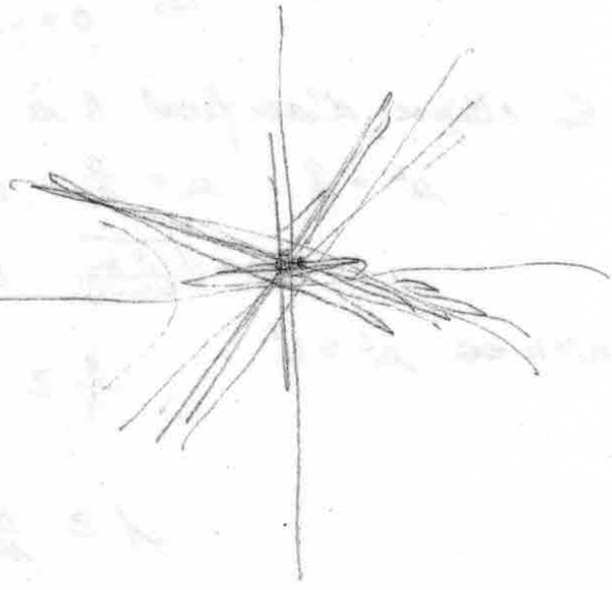
$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$= x\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}+\vec{v}) + y\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}-\vec{v})$

$= \frac{x+y}{\sqrt{2}}\vec{u} + \frac{x-y}{\sqrt{2}}\vec{v}$

$X \cdot Y = \frac{x^2-y^2}{2} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow Y = \frac{9}{8X}$



$\vec{OM} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}\vec{u} + \frac{x-y}{\sqrt{2}}\vec{v}$

$\frac{X^2}{9/4} - \frac{Y^2}{9/4} =$

$x^2 - y^2 = \frac{9}{4}$

$\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{9}{4}$

$\frac{x^2+2xy+y^2 - x^2+2xy-y^2}{2} = \frac{9}{4}$

$\frac{4xy}{2} = \frac{9}{4}$ $\quad 2xy = \frac{9}{4}$

$y = \frac{9}{8x}$

signe de $\frac{9m}{4(m-1)}$

m		0		1	
m	$-$	0	$+$		$+$
$m-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{9m}{4m-1}$	$+$	0	$-$		$+$
$\frac{9}{4}$	$+$		$+$		$+$
E_m	$\mathcal{E}$	D	$\mathcal{H}$	$D_1 \cup D_2$	$\mathcal{E}$

3) a) E_m est un cercle $\Leftrightarrow a^2 = b^2$

$\Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{9m}{4(m-1)}$

$\Leftrightarrow m = (m-1)$

$\Leftrightarrow 0 = -1$ impossible $\rightarrow$ pas de cercles !

b) E_m ellipse d'axe focal // à Ox $\Leftrightarrow a > b$

$a^2 = \frac{9}{4}$ $\quad a = \frac{3}{2}$ (car $a > 0$)

$b = \sqrt{\frac{9m}{4(m-1)}}$ $\quad (b > 0)$

$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

$\frac{9}{4} \geq \frac{9m}{4(m-1)}$ $\quad (m-1) \geq m$

$\Leftrightarrow$

$1 \geq \frac{m}{m-1} - m + 1$

$0 \geq \frac{1}{m-1}$

$\Leftrightarrow m \leq 1$

Donc pour $m \in]-\infty ; 0[$ E_m est une ellipse —

4) $E_{\frac{1}{2}}$: $\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9}{4}} = 1$ $\quad$ Centre $\Omega\left(-\frac{3}{2} ; 1\right)$ $\quad \frac{\frac{9}{2}}{-4 \cdot \frac{1}{2}}$

axe focal Ox

hyperbole equilatère $\quad \frac{\frac{9}{2}}{-2}$

Concours de recrutement en mathématiques
10 avril 2002 (15.00 –18.00)
ÉPREUVE ÉCRITE I (ANALYSE)

I. **Partie A (5 points)**

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

a) Étudier g (limites, variations, tableau de variation).

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution λ et vérifier que $1,8<\lambda<1,9$.

c) Déterminer le signe de g(x).

2) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

a) Étudier h (limites, asymptotes, variations, tableau de variation).

b) Montrer que $h(\lambda)=\dfrac{1}{2\lambda^2}$. En déduire un encadrement de $h(\lambda)$.

c) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthogonal en adoptant 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 4 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B (6 points)

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, on pose: $H(x)=\int_1^x h(t)dt$, avec $h(t)=\dfrac{\ln t}{1+t^2}$.

On ne cherchera en aucune manière de calculer $H(x)$.

1) Préciser $H'(x)$ après avoir justifié l'existence de $H(x)$.

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=H\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Calculer $F'(x)$ pour $x>0$. En déduire que pour tout $x>0$, $H(x)=H\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) Démontrer que: $\forall t\geq 1$, $\dfrac{\ln t}{(1+t)^2}\leq h(t)\leq\dfrac{\ln t}{t^2}$.

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, on pose: $U(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{t^2}dt$ et $V(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{(1+t)^2}dt$.

Calculer $U(x)$ et $V(x)$ après en avoir justifié l'existence.
En déduire un encadrement de $H(2)$.

3) Calculer une valeur approchée de $H\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en calculant $\int_1^{\frac{1}{2}}p(t)dt$, p étant la fonction affine définie par $p(1)=h(1)$ et $p\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Épreuve d'analyse du 10 avril 2002

Exercice II

1. $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a) $Dg = \mathbb{R}_0^+$

Limites:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 + \underbrace{x^2}_{\to 0} - \underbrace{2x \cdot x \ln x}_{\to 0} = 1$$

Dérivée:

$$g'(x) = 2x - 4x \ln x - 2x^{\not 2} \cdot \frac{1}{\not x}$$

$$= -4x \ln x$$

$$g'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

tableau de variation

x	0		1	
$-4x$	$+$	0		$-$
$\ln x$	$-$	$\|$	$-\ 0$	$+$
$g'(x)$	$-$	$\|\ 0$	$+\ 0$	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$\|$	$\nearrow\ 2$	$\searrow$
		$\|\ 1$		$-\infty$

b) g est strictement positif sur $[0;1]$. Donc $g(x) = 0$ est exclu.
$g(x)$ est strictement décroissant sur $[1; +\infty[$ et $g(1) > 0$ alors que $\lim_{x \to +\infty} g(x) < 0$. D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists \lambda \in [1; +\infty[$ tq $g(\lambda) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 2 > 0 \\ g(2) = -0{,}54\ldots < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \lambda < 2$$

$$g(1{,}5) = 0{,}817\ldots > 0 \Rightarrow 1{,}5 < \lambda < 2$$

$$\vdots$$

c) signe de $g(x)$:

x	0		1		λ		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	

2. $h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

a) $D_h = \mathbb{R}_0^+$

Limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\to 0} = 0$ A.H. d'équation $y=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$ A.V. d'équation $x=0$.

Dérivée sur $]0;+\infty[$:

$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2) - \ln x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x\cdot(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x\cdot\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}}$

$\left(= \frac{1+x^2(1-2\ln x)}{x(1+x^2)^2}\right)$

Tableau de variations :

x	0		λ		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	
x	‖	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{\ln\lambda}{1+\lambda^2}$	↘	0

b) $h(\lambda) = \frac{\ln\lambda}{1+\lambda^2}$

$1+\lambda^2-2\lambda^2\ln\lambda = 0$

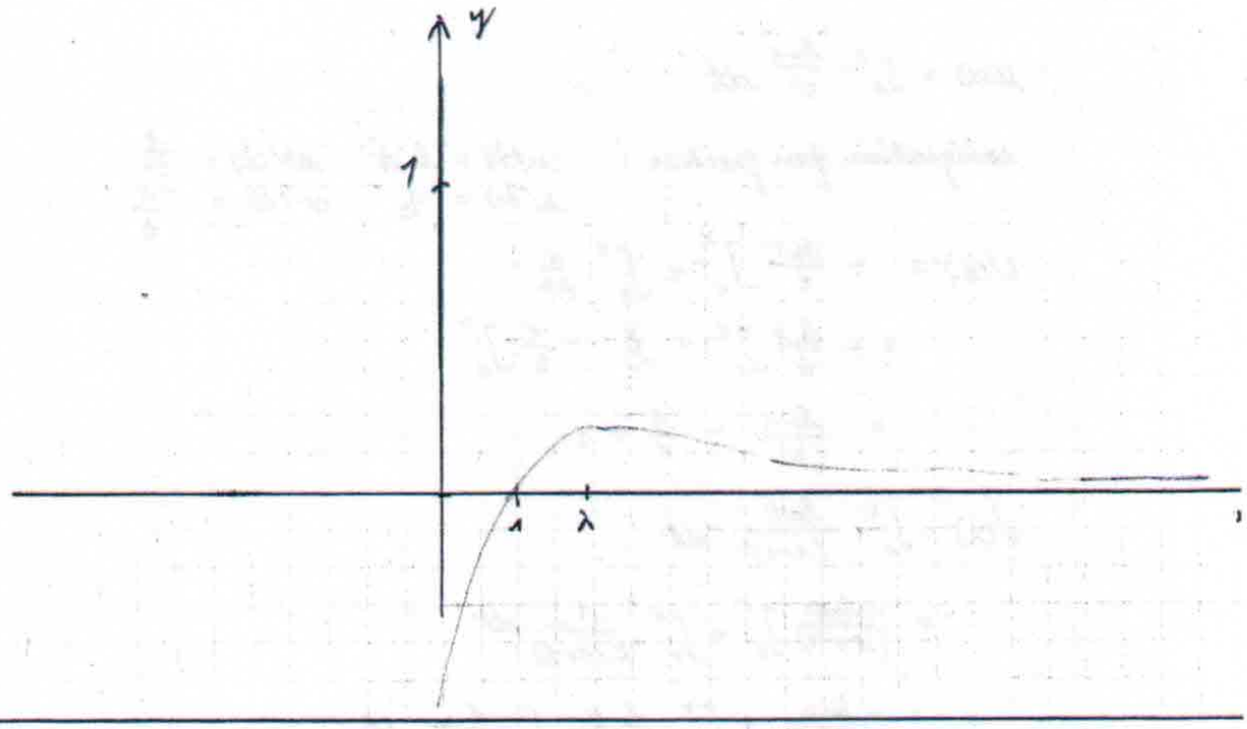
$\Leftrightarrow \quad \lambda^2(1-2\ln\lambda) = -1$

$\Leftrightarrow \quad 1-2\ln\lambda = -\frac{1}{\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \quad -2\ln\lambda = \frac{-1-\lambda^2}{\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\lambda = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda^2}$ $\quad\quad$ $g(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda^2}$



Partie B

$H(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

1) La fonction $\frac{\ln t}{1+t^2}$ est définie sur $]0;+\infty[$. Donc en particulier pour $]1;x[$ $x \in]0;+\infty[$.

$H'(x) = \frac{\ln t}{1+t^2}$

$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln x}{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-x^2 \ln x}{x^2+1}\,dx$

$F'(x) = \frac{-x^2 \ln x}{x^2+1}$

$H'(x) - F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{x^2 \ln x}{x^2+1}$

$= \frac{\ln x\,(1+x^2)}{(1+x^2)} = \ln x$

$F'(x) = H'(x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = h\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2 \ln x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{1+x^2}$

2) $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq h(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$h(x) = \ln t$ on a $(1+t)^2 \geq 1+t^2$

$\frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ $\quad | \cdot \ln t > 0$ car $t \in]1;+\infty[$

$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2}$

on a $1+t^2 \geq t^2$

$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq h(x) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$$U(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

intégration par parties : $u(t) = \ln t$ $\quad v'(t) = \frac{1}{t^2}$

$u'(t) = \frac{1}{t}$ $\quad v(t) = \frac{-1}{t}$

$$U(x) = -\frac{\ln t}{t}\Big]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}$$

$$= -\frac{\ln t}{t}\Big]_1^x + \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^x$$

$$= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

$$V(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= \frac{-\ln t}{(1+t)}\Big]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{1+x} + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \frac{-\ln x}{1+x} + \ln t\Big]_1^x - \ln|1+t|\Big]_1^x$$

$$= \frac{-\ln x}{1+x} + \ln x - \ln|1+x| + \ln 2$$

On a $\quad V(2) \le H(2) \le U(2)$

$$0{,}0566 \le \vdots \le 0{,}1534$$

3) $p(x) = \frac{-8\ln 2}{15}x + \frac{8\ln 2}{15}$

$$\int_1^{1/2} p(t)\,dt = \frac{-8\ln 2}{15}\,\frac{x^2}{2}\Big]_1^{1/2} - \frac{8\ln 2}{15}x\Big]_1^{1/2}$$

$$= \frac{7\ln 2}{15}$$

23 64 00 64

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'analyse

Mercredi, le 6 novembre 2002-10-30
15h-18H

I. Soit : $f_n : x \mapsto f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$f_0 : x \mapsto f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. a) Pour n entier naturel non nul, étudier la parité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et le sens de variation de f_n.

b) Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Donner la nature des branches infinies des courbes (C_n) représentatives des fonctions f_n (n entier naturel non nul).

c) Etudier l'existence de points fixes aux courbes (C_n) (n entier naturel non nul).

d) Construire les courbes $(C_1),(C_2),(C_3)$ (unité : 2cm)

2. On note $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ (n entier naturel)

a) Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est une primitive de f_0. En déduire I_0.

b) Calculer I_1.

c) Démontrer que, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$n \cdot I_n = \sqrt{2} - (n-1) \cdot I_{n-2}$$

En déduire I_2 et I_3.

3. Pour n entier naturel non nul, on note g_n la restriction de f_n à l'intervalle [0 ;1].

a) Etudier l'existence de l'application réciproque de g_n.

b) Construire les courbes représentatives des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1}.

c) Déterminer g_1^{-1} et g_2^{-1}.

(10 points)

II. Soit h la fonction définie par $h(x)=4^x-2^{x+1}$.

1. Etudier h (ensemble de définition, limites de h aux bornes de l'ensemble de définition, branches infinies de la courbe (C_h) représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé. fonction dérivée et tableau de variation ; tracé de (C_h).
2. Déterminer graphiquement et algébriquement le nombre de solutions de l'équation h(x)-a=0.

(5 points)

III. Soit φ la fonction de variable réelle x définie par :

$$\varphi(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{t+1}\cdot e^{-t}dt \quad x\in[-1;+\infty[$$

(N.B. On ne cherchera pas à calculer $\varphi(x)$.)

On note Γ la courbe représentative de φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Déterminer φ'. Donner le sens de variation de φ.
2. Démontrer que si $t\in[-1;+\infty[$, alors $\sqrt{t+1}\leq\dfrac{t+3}{2\sqrt{2}}$

En déduire que :

$(\forall x\in[-1;+\infty[)\quad \varphi(x)\leq k(x)$ avec $k(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^{x}(t+3)e^{-t}dt$

Déterminer k(x) et en déduire que : $k(x)\leq\dfrac{3e}{2\sqrt{2}}$ $\quad(\forall x\in[-1;+\infty[)$

3. Donner l'allure de la courbe Γ et préciser sa demi-tangente en $x_0=-1$ à droite.

(5 points)

Epreuve Analyse 6/11/02

I $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1) a) Parité : $f_n(-x) = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{x^2+1}}$

si n pair $f_n(-x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ paire

si n impair $f_n(x) = \dfrac{-x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ impaire

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\,x^{n-1}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

Sens de variation : $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}\sqrt{x^2+1} - x^n \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1}$

$= \dfrac{x^{n-1}\left(n\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$

$= \dfrac{x^{n-1}\left(n\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$

$f_n'(x) \geq 0$ ssi $= \dfrac{x^{n-1}\left(n(x^2+1) - x^2\right)}{x^2+1\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow x^{n-1}\left(nx^2+n-x^2\right) > 0$

$\Leftrightarrow x^{n-1}\left(\underbrace{x^2(n-1)}_{\geq 0} + n\right) > 0$

$\rightarrow f_n'(x)$ a le signe de x^{n-1}

$x < 0 \rightarrow f_n'(x) > 0$ si n impair

$f_n'(x) < 0$ si n pair

$x > 0 \quad f_n'(x) > 0$

n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_n'		$-$	$\|$	$-$	
f_n	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

n impair

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		$+$	
f_n	$-\infty$	↗	$+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= +\infty$

$\Rightarrow$ branche parabolique Oy

Si $n=1$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ A.H $x=0$

Si $n=2$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} - x$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n - x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\left(= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(x^{n-2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right) \right)$

$x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$= +\infty$

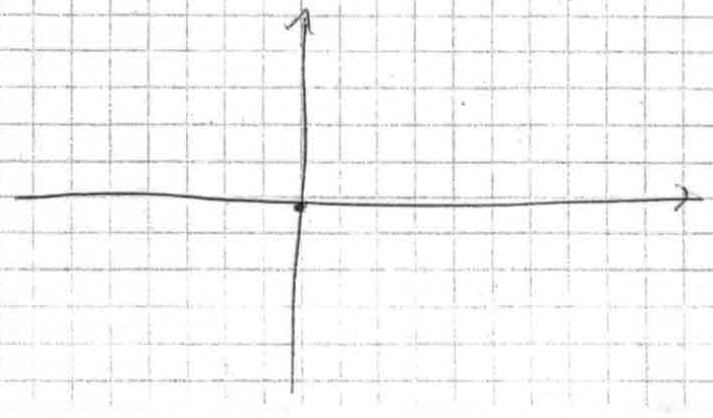
$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$

$f_n(x) = f_{n'}(x) \Leftrightarrow \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^{n'}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow x^n = x^{n'} \Leftrightarrow n = n'$ ou $x = 0$

$\Leftrightarrow x^n - x^{n'} = 0$



2) $I_n = \int_0^1 f_n(x)$

a) $\int f_0(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \int$

$F(x)' = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot 2x$

$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}\cdot 2\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}$

$=$

$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$I_0 = \int_0^1 f_0(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1$

$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

b) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$

$= \sqrt{2} - 1$

$2\sqrt{x} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $n I_n = \sqrt{2} - (n-1) I_{n-2}$

$1 \cdot I_1 = \sqrt{2}$

Épreuve d'analyse du 6 novembre 2002

Exercice I.

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \qquad f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) a) Domaine de définition: $D_{f_n} = \mathbb{R}$ et $D_{f_0} = \mathbb{R}$

Parité: ~~pour f_0~~:

- pour f_0: $f_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f_0(x)$

  → f_0 est une fonction paire

- pour f_n (n pair):

$$f_n(x) = \frac{(-x)^n}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = f_n(x)$$

→ f_n est une fonction paire pour n pair

- pour f_n (n impair):

$$f_n(-x) = \frac{(-x)^n}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-x^n}{\sqrt{x^2+1}} = -f_n(x)$$

→ f_n est une fonction impaire pour n impair.

Limites:

- pour f_0:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}} = 0$$

A.V. d'équation $y=0$

- pour $n=1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

A.V. d'équation $y=1$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

A.V. d'équation $y=-1$

- pour n pair ($n\neq 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^{n-1}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

· pour n impair

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

· Sens de la variation

$$f_n'(x) = \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+1}^3 - x^n \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^{n-1}\cdot n\cdot(x^2+1) - x^{n+1}}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{n\cdot x^{n+1} + n x^{n-1} - x^{n+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n\cdot x^2 + n - x^2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{n-1}\left[(n-1)x^2 + n\right]}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f_n'(x) = 0 \iff x^{n-1} = 0$ ou $(n-1)x^2 + n = 0$

$\iff x = 0$ $\iff x^2 = \frac{-n}{(n-1)}$ impossible

Tableau de variation

Pour n pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

Pour n impair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$ (le dénominateur $\to 1$) branche parabolique de direction (Oy)

Pour $n=1$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

Pour $n=2$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ asymptote d'équation $y=x$.

$$\lim \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x = \lim \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^4 - x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(1-\sqrt{x^2+1})} = 0$$

c) Points fixes aux courbes C_n :

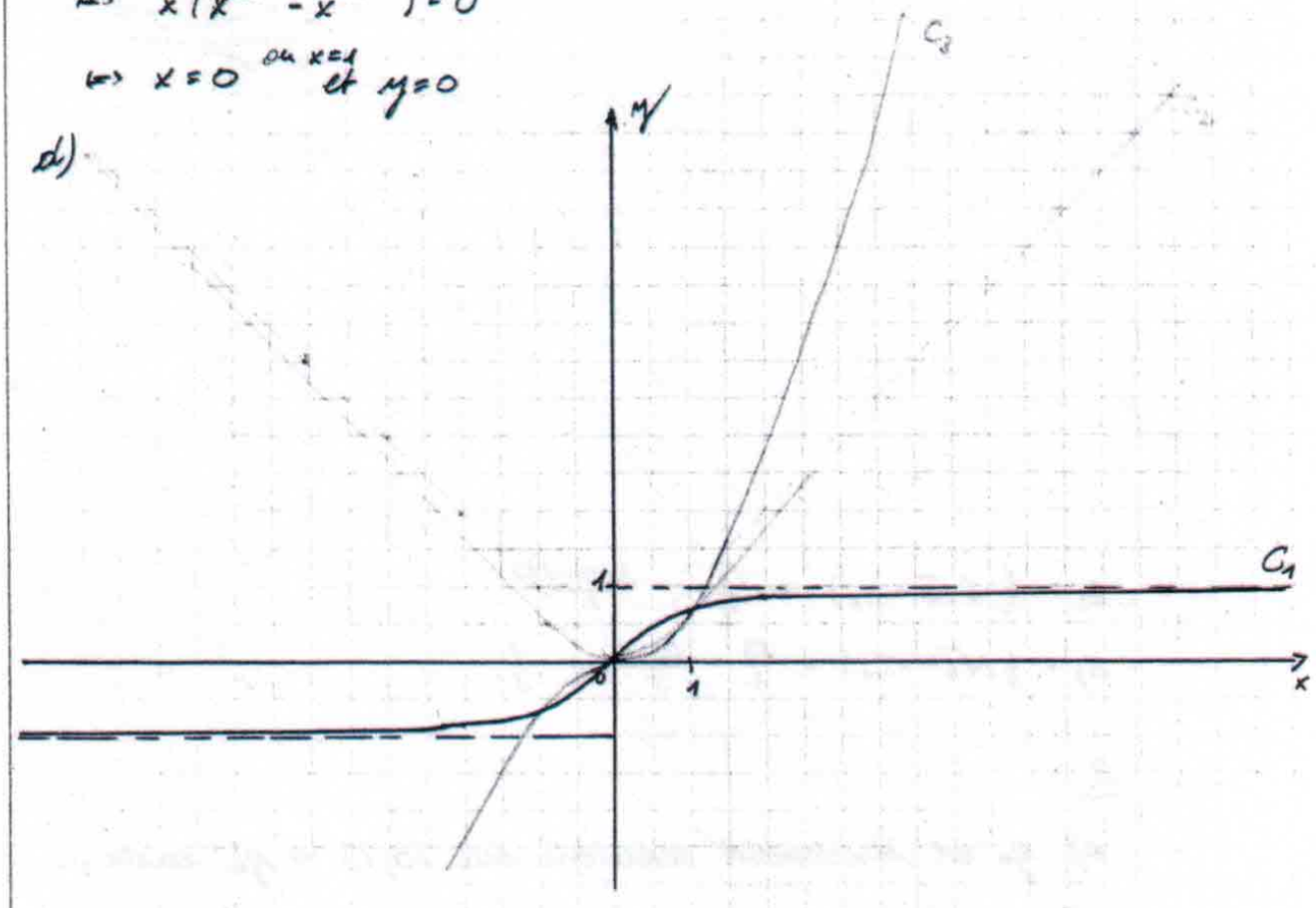
$f_m(x) = f_n(x)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^m - x^n}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \qquad \frac{x^n (x^{m-n} - 1)}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x^{m-1} - x^{n-1}) = 0$ $\qquad x = 0$ ou $x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = 1$ et $y = 0$

d)



2.

a) $F(x)$ est une primitive de $f_0(x) \Leftrightarrow F'(x) = f_0(x)$

$$F'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x + \sqrt{x^2+1}) \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f_0(x)$$

Donc $F(x)$ est bien une primitive de $f_0(x)$.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big]_0^1$$

$$= \ln(1 + \sqrt{1^2+1}) - \ln(0 + \sqrt{0^2+1})$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

b) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} \Big]_0^1$

$$= \sqrt{2} - 1$$

c) $n I_n = \sqrt{2} - (n-1) I_{n-2}$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - I_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

$$I_3 = \frac{1}{3}(\sqrt{2} - I_1) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}-1}{3} = \frac{1}{3}$$

3.

a) g_n est strictement monotone sur $[0;1] \Rightarrow g_n^{-1}$ existe ...

b) $\rightarrow$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice

c) $g_1 : \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow y\sqrt{x^2+1} = x$$
$$\Leftrightarrow y^2(x^2+1) = x^2$$
$$\Leftrightarrow y^2x^2 + y^2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow y^2x^2 - x^2 = -y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2(y^2-1) = -y^2$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-y^2}{y^2-1}}$$

$g_{-1}(x) = \sqrt{\frac{-x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in [0;1]$

$g_{-2}(x) = \sqrt{\quad}$ ... eq du 2e degré...

Exercice II

$h(x) = 4^x - 2^{x+1}$

1.

• **Domaine de définition:** $D_h = \mathbb{R}$

• **Limites:**

$$\lim_{x \to +\infty} 4^x - 2^{x+1} = \lim_{x \to +\infty} 2^{2x} - 2^{x+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{2^x}_{\to +\infty} \underbrace{(2^x - 2)}_{\to +\infty} = +\infty \quad \text{branche infinie}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{2^x}_{\to 0} \underbrace{(2^x - 2)}_{\to -2} = 0 \qquad \text{A.H. d'équation } y = 0$$

• **Dérivée:** sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^{x \ln 4} \cdot \ln 4 - e^{(x+1)\ln 2} \cdot \ln 2$$

$$= e^{2x \ln 2} \cdot 2 \ln 2 - e^{(x+1)\ln 2} \ln 2$$

$$= \ln 2 \, (2 \cdot 4^x - 2^{x+1})$$

$h'(x) = 0 \iff 2 e^{2x \ln 2} = e^{(x+1)\ln 2}$ | $\exp(\,)$ fct str. monotone

$\iff \ln 2 + 2x \ln 2 = (x+1) \ln 2$

$\iff \cancel{\ln 2} + 2x \cancel{\ln 2} = x \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2}$

$\iff x = 0$

(plus facile :

$2 \cdot 4^x - 2^x \cdot 2 = 0$

$2^{2x} - 2^x = 0$

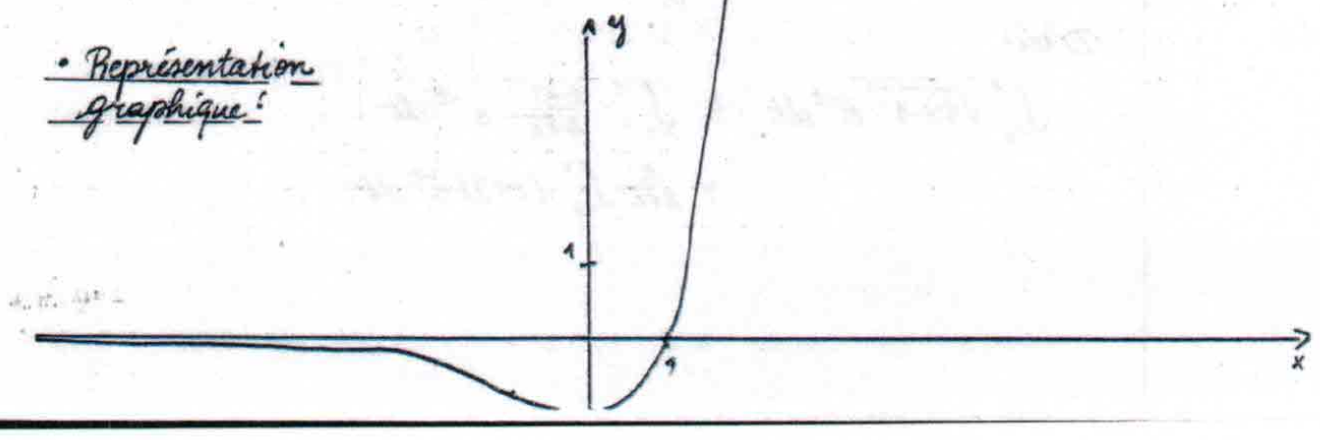
$\iff 2x - x = 0$

$\vdots$

• **Tableau de variation**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

• **Représentation graphique:**



2.

$h(x) - a = 0 \Leftrightarrow h(x) = a$

· graphiquement

Pour $a = -1$ il existe une seule solution $x = -1$

Pour $a \in]0; -1[$ il existe deux solutions pour x

Pour $a \in [0; +\infty[$ il existe une seule solution pour x

car h est strictement croissante de $[1; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.

Pour $a < -1$ aucune solution

· algébriquement

$h(x) = a \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^{x-1} = a$

$(2^x)^2 - 2(2^x) - a = 0$

$\Delta = 4 + 4a$

· $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(1+a) < 0 \Leftrightarrow a < -1$ → aucune solution

· $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(1+a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$ → solution unique

· $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(1+a) > 0 \Leftrightarrow a > -1$ → 2 solutions

---

Exercice III.

1. $\varphi(t) = \sqrt{t+1}\, e^{-t} \geq 0$

Donc $\varphi(t)$ est croissante

2. $t \in [-1; +\infty[\Rightarrow \sqrt{t+1} \leq \frac{t+3}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow t + 1 \leq \frac{t^2+6t+9}{8}$

$\Leftrightarrow 8t + 8 \leq t^2 + 6t + 9$

$\Leftrightarrow 0 \leq t^2 - 2t + 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq (t-1)^2$ toujours vrai!

D'où

$\int_{-1}^{x} \sqrt{t+1}\, e^{-t}\, dt \leq \int_{-1}^{x} \frac{t+3}{2\sqrt{2}}\, e^{-t}\, dt$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{x} (t+3)\, e^{-t}\, dt.$

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-1}^{x} (t+3)\, e^{-t}\, dt}_{J(x)}$$

$$J(x) = \int_{-1}^{x} t \cdot e^{-t} + \int_{-1}^{x} 3e^{-t}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{x} t \cdot e^{-t}}_{I(x)} + 3 \cdot \left(-e^{-t}\right]_{-1}^{x}$$

intégration par parties pour $I(x)$:

$u(x) = t \qquad v'(x) = e^{-t}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-t}$

$$I(x) = -t \cdot e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt$$

$$J(x) = -t \cdot e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt + 3\int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt$$

$$= -t\, e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + 4\int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt$$

$$= -t\, e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + 4 \cdot -e^{-t}\Big]_{-1}^{x}$$

D'où :

$$h(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-x \cdot e^{-x} - e + 4\left(-e^{-x} + e\right) \right)$$

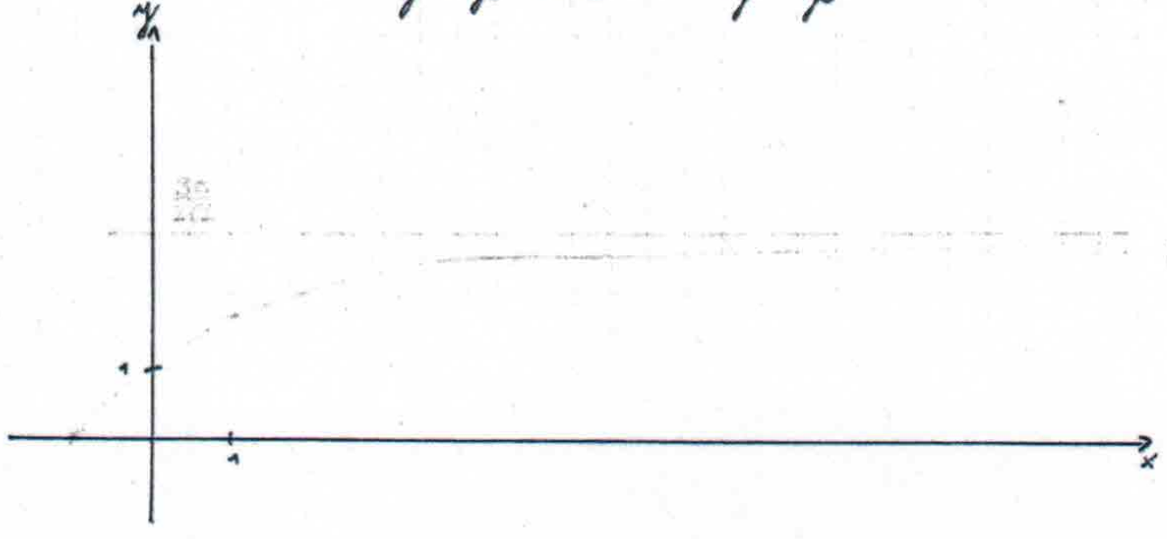
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{-x}(-x-4) + 3e \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\; e^{-x}\left(3e^{x+1} - x - 4\right)}{4}$$

$$\leq \frac{3e}{2\sqrt{2}}$$

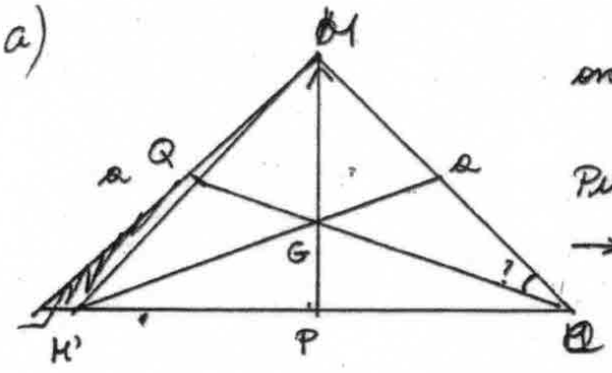
3. tangente en x_0 : $(y - y_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0)$

$(y - y_0 = 0 \qquad y = y_0$



Exercice IV (novembre 2002)

1) a)



on a $\cos(\widehat{\vec{OH}, \vec{OG}}) = \frac{\overline{OH}}{\overline{QO}}$

Puisque Δ HOQ est rectangle en H

→ Pythagore

$\overline{QO}^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$= \frac{5}{4}a^2$

$\overline{QO} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

→ OMH' triangle isocèle et rectangle

$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{OH}, \vec{OG}}) = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin(\widehat{\vec{OH}, \vec{OG}}) = \frac{\overline{QH}}{\overline{QO}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\frac{2}{3}\overline{QQ}}{a} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2) $S(H) = G$

26,5651°

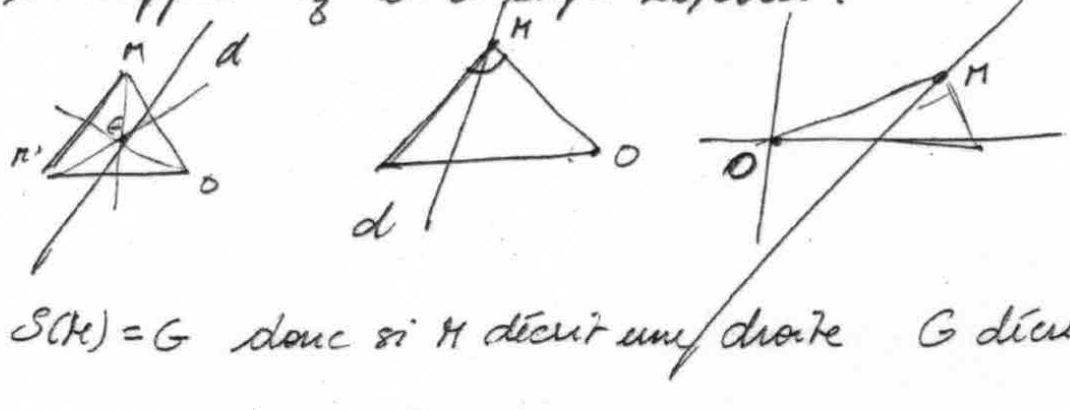
on a $\cos(__) = __$ et $\sin(__) = __$ $\Rightarrow (\widehat{\vec{OH}, \vec{OG}}) = 26,5651°$

De plus $\frac{\overline{OG}}{\overline{OH}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Donc S est la transformation de rapport $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et d'angle 26,5651°.

$S = h\left(O; \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \circ r\left(O, \frac{\pi}{4}\right)$ car si $H = O$ $G = O$

3)



$S(H) = G$ donc si H décrit une droite G décrit 1 droite !

Concours de recrutement en mathématiques

Épreuve d'analyse

22 avril 2003

(15h-18h)

I. On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \sqrt{1+m-mx}$, où m est un paramètre réel.

1) Montrer de deux manières différentes qu'il existe un seul point P appartenant à toutes les courbes représentatives C_m de f_m dans un repère orthonormé. Étudier le sens de variation de f_m. Construire C_{-1}, C_0, C_1, C_2.

2) Soit $m > 0$. Calculer l'aire géométrique $A(m)$ du domaine limité par C_m et les axes du repère orthonormé. Montrer que parmi les C_m envisagées il existe une courbe limitant un domaine d'aire minimale.

3) Soit $m > 0$. Quel doit être m' pour que C_m et $C_{m'}$ se coupent à angle droit ? Calculer l'aire géométrique $B(m)$ du domaine limité par C_m, $C_{m'}$ et l'axe des abscisses du repère orthonormé. Pour quelle valeur de m l'aire $B(m)$ est-elle minimale ?

II. 1) Soit $I_0 = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$ et pour tout $k \in IN^*$, $I_k = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt$:

a) Calculer I_0 et I_k pour tout $k \in IN^*$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) c_n(t)\, dt$

où $c_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ pour tout $t \in [0;\pi]$.

2) a) Démontrer que pour tous réels a et b, $2 \cdot \cos a \cdot \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$ et tout $t \in [0;\pi]$,

$c_n(t) \cdot 2 \cdot \sin\frac{t}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2}) \cdot t\right)$.

c) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, la fonction de $]0;\pi]$ dans IR qui à t associe

$\dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2}) \cdot t\right)}{2 \cdot \sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction s_n continue sur $[0;\pi]$.

d) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) s_n(t)\, dt$.

III. 1) a) Démontrer que l'application de $]0;\pi[$ dans IR qui à x associe $\frac{x}{\sin x}$ peut être prolongée en une fonction f continue sur $[0;\pi[$.

b) Démontrer que pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \le f'(x) \le \frac{x}{1+\cos x}$.

En déduire la limite de f' en 0.

2)a) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $g(t) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \cdot f(\frac{t}{2})$.

Après avoir justifié que g est dérivable sur $]0;\pi]$, exprimer $g'(t)$ en fonction de $f(\frac{t}{2})$ et $f'(\frac{t}{2})$ pour tout $t \in]0;\pi]$ et calculer $\lim_{t\to 0} g'(t)$.

En déduire que g est dérivable sur $[0;\pi]$.

b) Démontrer que pour tout $t \in [0;\pi]$, $|g'(t)| \le \frac{\pi+1}{4}$.

3) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $\left| \int_0^{\pi} g(t) \cdot \sin\left((n+\frac{1}{2}) \cdot t\right) dt \right| \le \frac{10}{2n+1}$.

Aide : Utiliser le résultat établi sous 2b.

Répartition des points : 8 =4,5+1,5+2 ; **5** =2+3 ; **7** =2,5+2+2,5

Épreuve d'analyse du 22 avril 2003

Exercice I.

$f_m(x) = \sqrt{1+m-mx}$ $\quad m \in \mathbb{R}$.

$D_{f_m} = \mathbb{R}$ si $m=0$

$D_{f_m} =]-\infty ; \frac{1+m}{m}]$ pour $m>0$

$D_{f_m} = [\frac{1+m}{m} ; +\infty[$ pour $m<0$

1) Point P

1ère méthode :

Soient m_1 et $m_2 \in \mathbb{R}$ et $m_1 \neq m_2$: $f_{m_1}(x) = f_{m_2}(x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+m_1-m_1x} = \sqrt{1+m_2-m_2x}$

$\Leftrightarrow 1+m_1-m_1x = 1+m_2-m_2x$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2) - x(m_1-m_2) = 0$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2)(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$P(1;1)$

$\frac{\partial}{\partial m} f_m = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{1+m-mx}} \; |1-x| = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

2e méthode : $y^2 = 1+m-mx$

$(y^2+1) + (m-mx) = 0$

$(y^2+1) + m(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+1 = 0 \\ 1-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = +1 \text{ ou } (-1) \text{ à écarter car } f_m(x) \geq 0. \\ x = 1 \end{cases}$

$P(1;1) \in \mathcal{C}_m \; \forall m \in \mathbb{R}$.

Sens de variation de f_m :

$f'_m(x) = \frac{-m}{2\sqrt{1+m-mx}} \quad x \neq \frac{1+m}{m}$

dérivable en $\frac{1+m}{m}$?

si $m = 0$

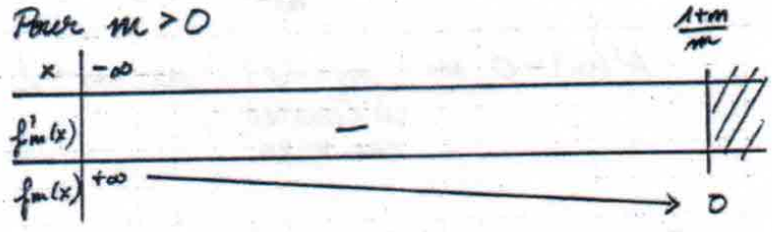
$f_0(x) = 1$

$f_{-1}(x) = \sqrt{x}$

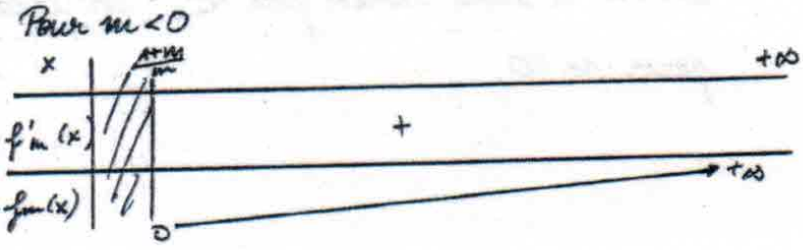
$f_1(x) = \sqrt{2-x}$

$f_2(x) = \sqrt{3-2x}$

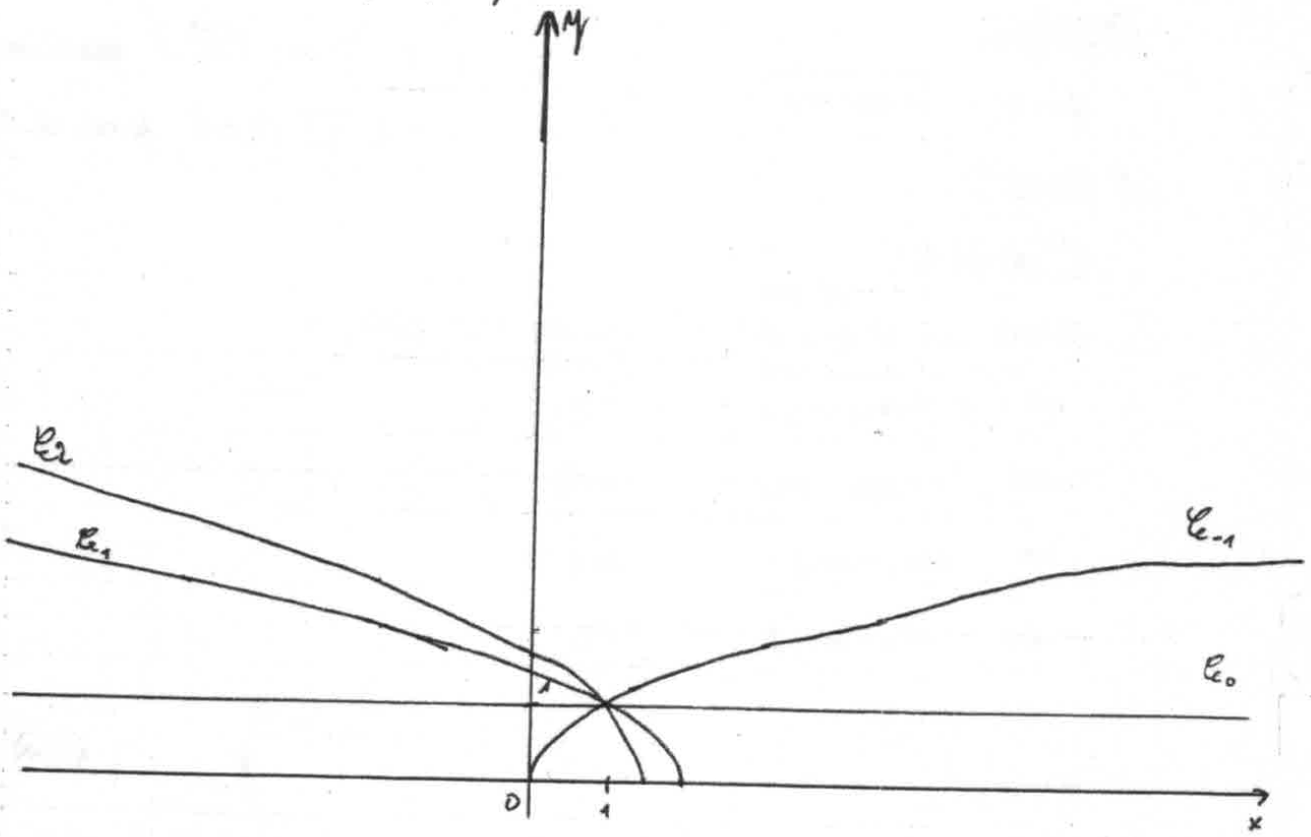
Pour $m > 0$



Pour $m < 0$



Représentations graphiques



2. $A(m) = \int_0^{\frac{m+1}{m}} \sqrt{1+m-mx}\, dx$

$= \frac{-1}{m}(1+m-mx)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^{\frac{m+1}{m}}$

$= \frac{1}{m}(1+m)^{\frac{3}{2}} \quad ? \quad \frac{2}{3m}(1+m)^{\frac{5}{2}}$

Étude de la fonction $A(m)$:

$A'(m) = \frac{-\frac{3}{2}(1+m)^{\frac{1}{2}} m - (1+m)^{\frac{3}{2}}}{m^2}$

$= \frac{\frac{3}{2}(1+m)^{\frac{1}{2}}\left[1+m-\frac{3}{2}m\right]}{m^2}$

$= \frac{(1+m)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}m\right)}{m^2}$

$A'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (à écarter car $m > 0$) ou $m = 2$

Donc l'aire limité par $\mathcal{C}_2$ est l'aire minimale pour $m > 0$.

3) $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_{m'}$ se coupent en un angle droit

$\Leftrightarrow$ $f'_m(1) \cdot f'_{m'}(1) = -1$ $\Rightarrow$ $= -1$

$$\frac{-m}{2} \cdot \frac{-m'}{2} = -1$$

$$m \cdot m' = -4$$

$$m' = -\frac{4}{m}$$

$$B(m) = \int_{\frac{m'+1}{m'}}^{1} f_{m'}(x) + \int_{1}^{\frac{m+1}{m}} f_m(x)$$

$$= -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}$$

$$= +\frac{m}{4} + \frac{1}{m}$$

$$= \frac{m^2+4}{4m}$$

$$B'(m) = \frac{2m \cdot 4m - (m^2+4)\,4}{16m^2}$$

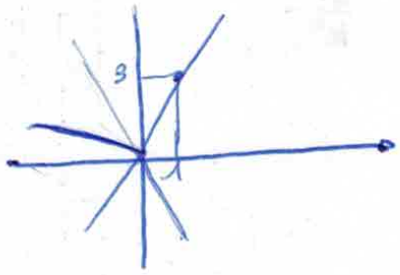
$$= \frac{8m^2 - 4m^2 - 16}{16m^2} = \frac{4m^2 - 16}{16m^2}$$

$B'(m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ ou $m = -2$ à écarter

Pour $m = 2$ l'aire $B(m)$ est minimale.



Exercice II.

1) a) $I_0 = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$

$= \frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \Big]_0^\pi$

$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{2\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{3}$

$I_k = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt$

$= \int_0^\pi \frac{t^2}{2\pi} \cos kt\, dt - \int_0^\pi t \cos(kt)\, dt$

intégration par parties :

$u(t) = \frac{t^2}{2\pi}$ $\quad$ $u(t) = t$

$u'(t) = \frac{t}{\pi}$ $\quad$ $u'(t) = 1$

$v'(t) = \cos kt$ $\quad$ $v'(t) = \cos(kt)$

$v(t) = \frac{\sin kt}{k}$ $\quad$ $v(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$

$I_k = \frac{t^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin kt}{k} \Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{t}{\pi} \frac{\sin kt}{k} - t\frac{\sin kt}{k} \Big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin kt}{k}$

$I_k = \frac{t^2}{2\pi} \frac{\sin kt}{k} \Big]_0^\pi + t \cdot \frac{+\cos kt}{\pi k^2} \Big]_0^\pi \int \frac{1}{\pi} \frac{\cos kt}{k^2} - t \frac{\sin kt}{k} \Big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin kt}{k}$

$u(x) = t$

$u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{\sin kt}{k}$

$v(x) = \frac{-\cos kt}{k^2}$

$= t \cdot \frac{\cos kt}{\pi k^2} \Big]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \frac{\sin kt}{k^3} \Big]_0^\pi - \frac{\cos kt}{k^2} \Big]_0^\pi$

$= \frac{\pi \cos k\pi}{\pi k^2} - 0 - \frac{\cos k\pi}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}$

$= \frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{\cos k\pi}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}$

$= \frac{1}{k^2}$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right) dt \qquad t \in [0;\pi]$

$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = -\frac{\pi^2}{3}$

$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos t \, dt = 1$

$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos 2t \, dt = \frac{1}{4}$

$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos 3t \, dt = \frac{1}{9}$

$\vdots$

$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) \, dt = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$-\frac{\pi^2}{3} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \cdot = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

??

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$= \sum_{k=1}^{n} I_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)$

$= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$

$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \text{---}$

$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt \text{---}$

$= \text{---}$

Autre méthode (peut-être):

$\frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) dt$

$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cdot \cos kt \, dt$

$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

2) a) $\sin(a+b) - \sin(a-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$- \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$= 2 \cos a \sin b$

$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right) \cdot 2 \cdot \sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$

$= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin\left(kt + \frac{t}{2}\right) - \sin\left(kt - \frac{t}{2}\right)$

$= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k+1)t}{2} - \sin\frac{(2k-1)t}{2}$

$= \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{5t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{7t}{2} - \sin\frac{5t}{2} + \right.$

$\left. \ldots + \sin\frac{(2n+1)t}{2} - \sin\frac{(2n-1)t}{2}\right)$

$= \sin\frac{(2n+1)t}{2} = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)$

c) $f_n :]0;\pi] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\cdot 2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}+n$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{pour } t\in]0;\pi] \\ \frac{1}{2}+n & \text{pour } t=0 \end{cases}$$

en particulier pour $n=0$ $s_0 = \dfrac{\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}$.

d) $s_n\, c_n(t) \cdot 2\sin\frac{t}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)$

$$c_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$c_n(t) = s_n(t)$ avec s_n continue sur $[0;\pi]$ donc intégrable !

D'où $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)s_n(t)\,dt$.

Exercice III

1) a) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ sur $]0;\pi[$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc $f = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} \text{ si } x\in]0;\pi[\\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$

b) $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x)\geq 0 \iff \sin x - x\cdot\cos x \geq 0$

$\iff \sin x \geq x\cdot\cos x$

$f''(x)$ $\cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x\underbrace{\sin x}_{\geq 0} = 0 \iff x = 0$

x	0	
$f''(x)$	0	$+$
$f'(x)$	0	$\nearrow$

Donc $f'(x)$ est toujours positive. D'où $f'(x)\geq 0$.

Il reste à montrer que $\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \leq \frac{x}{1+\cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x - x\cos x)\cdot(1+\cos x) - x\sin^2 x \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x - x\cos x + \sin x\cos x - x\cos^2 x - x\sin^2 x \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x - x\cos x + \sin x\cos x - x \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,(1+\cos x) - x(1+\cos x) \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - x)\cdot\underbrace{(1+\cos x)}_{\text{toujours positif ou nul car } -1\leq\cos x\leq 1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x \leq x$
toujours vrai sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.

Donc $f'(x) \leq \frac{x}{1+\cos x}$.

Finalement on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{x}{1+\cos x}$ pour $x \in]0;\frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ $\qquad 0 \leq \lim\limits_{x\to 0} f'(x) \leq \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\cos x}}_{=0}$

D'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

2) a) $g(t) = (\frac{t}{2\pi} - 1)\, f(\frac{t}{2})$

g est dérivable sur $]0;\pi]$ autant que produit de fonctions dérivables sur $]0;\pi[$.

$g'(t) = (\frac{t}{2\pi}-1)'\, f(\frac{t}{2}) + (\frac{t}{2\pi}-1)\cdot f'(\frac{t}{2})$

$= \frac{1}{2\pi} f(\frac{t}{2}) + (\frac{t}{2\pi}-1)\, f'(\frac{t}{2})\,\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{t\to 0} g'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{2\pi}\underbrace{f(\frac{t}{2})}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{(\frac{t}{2\pi}-1)\, f'(\frac{t}{2})}_{\to 0 \text{ d'après 1.b)}}$

$= 0$.

Puisque $\lim\limits_{t\to 0} g'(t)$ existe, $g(t)$ est dérivable à droite en 0, d'où $g(t)$ est dérivable sur $[0;\pi[$.

b) Il faut prouver que $|g'(t)| \leq \frac{\pi+1}{4}$

$g'(t) = \frac{1}{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) + \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) f'\left(\frac{t}{2}\right)$

$0 \leq f'\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{\frac{t}{2}}{1+\cos\frac{t}{2}}$ et $0 \leq \frac{x}{\sin x/2} \leq \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{1}{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) + \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) f'\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\leq \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi+1}{4}$

D'où $|g'(t)| \leq \frac{\pi+1}{4}$

3) $\left|\int_0^\pi g(t) \cdot \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt\right| \leq \frac{10}{2n+1}$

$\left|\int_0^\pi g(t) \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) dt\right|$

par partie

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'analyse

Jeudi, le 13 novembre 2003
15h-18h

I. Soient les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x dx}{\cos^2 x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$$

1. Déterminer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. En déduire en fonction de n la différence : $I_{n+2} - I_n$. Calculer I_1, I_3 et I_5

2. On considère la fonction : $F : \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire I_0, I_2 et I_4 .

(4 points)

II. Soit f la fonction de variable réelle x strictement positive telle que :

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé *(unité : 2cm)*.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$ $(x \geq 0)$.

Donner le sens de variation de g et sa limite en $+\infty$.
En déduire qu'il existe un unique réel a strictement positif tel que g(a)=0 et prouver que $\frac{\ln 2}{2} < a < 1$. Etudier le signe de g(x) et établir l'encadrement : $0,79 \leq a \leq 0,8$.

2. Justifier la dérivabilité de f sur $]0;+\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{2}{x}} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right).$$

En déduire les variations de f.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}}).$$ En déduire la limite de f en 0.

4. Etablir que pour tout t de $[0;1]$ $0 \le e^t - 1 \le e \cdot t$.

En déduire que pour tout t de $[0;1]$: $1+t \le e^t \le 1 + t + \frac{e}{2} \cdot t^2$

Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \ge 2$:

$$0 \le [f(x)]^2 - 2x \le 2e .$$

Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = \sqrt{2x}$. Déterminer le signe de $f - \varphi$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

5. Donner le tableau de variation de f et tracer (C_f)

(7 points)

III. Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , dont on précisera l'ensemble de définition.
2. Trouver l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et déterminer $\left(f^{-1}\right)'$.
3. Calculer $I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$.

(4 points)

IV. Etudier et représenter graphiquement h définie par

$$h(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|^x \quad (x \in R - \{0, -1\} \text{ et } h(0) = 1$$

(domaine de définition, continuité, dérivabilité, limites aux bornes de l'ensemble de définition, fonction dérivée et sens de variation,, représentation graphique)

(5 points)

i) $t \in [0;1]$ $e^t \le 1 + et$ déb. Cinéma.

$\Rightarrow e^t - 1 \le e \cdot t$

$(f(x))^2 - 2x = x^2 \underbrace{(e^{\frac{2}{x}} - 1)}_{\le e \cdot \frac{2}{x}} - 2x \le x^2 e \cdot \frac{2}{x} - 2x = 2x(e-1)$

$f - \varphi(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} - \sqrt{2x}$

$\Rightarrow 0 \le f(x) - \varphi(x) \le \sqrt{2e} > 0$.

$\lim_{x \to +\infty} (f - \varphi)(x) = x\left(\underbrace{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}_{0} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}_{0}\right) = 0$.

$f'(x) =$

Épreuve d'analyse du 13 novembre 2003

Exercice I.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin^n x}_{u^n} \underbrace{\cos x}_{u'}\, dx = \frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1} \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2}x - \sin^n x}{\cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x\,(\sin^2 x - 1)}{\cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \cdot (-\cos^2 x)}{\cos x}\, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cdot \cos x\, dx = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = +\ln 2$$

$$I_3 = I_1 - \frac{1}{n+2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+2} = +\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}$$

$$I_5 = I_3 - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = +\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{4}$$

2. $F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

Donc $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=1}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{3}+2)$$

$$I_2 = I_0 - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$I_4 = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice II.

$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

$e^{\frac{2}{x}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{x}} \geq e^0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

1. $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{1}_{\to 1} \underbrace{-x}_{\to -\infty} \underbrace{-e^{-2x}}_{\to 0} = -\infty$

$g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-2x} \geq 0$

$2e^{-2x} \geq 1$

$e^{-2x} \geq \frac{1}{2}$

$-2x \geq -\ln 2$

$x \leq \frac{\ln 2}{2}$

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$0,403\ldots$	↘	$-\infty$

$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - e^{-2\ln 2}$

$= 1 - \frac{\ln 2}{2} - e^{\ln \frac{1}{4}}$

$= 1 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} \simeq 0,056$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists k \in \left]\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$ tel que $g(k) = 0$

$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) > 0$

$g(1) = 1 - 1 - e^{-2} = -\frac{1}{e^2} < 0$

Donc $\frac{\ln 2}{2} < k < 1$.

par dichotomie.

unique car $g > 0$ sur $\left]0; \frac{\ln 2}{2}\right[$

$g\left(\frac{\ln 2 + 2}{4}\right) \times$

Épreuve d'analyse du 13 novembre 2003

Exercice I.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin^n x}_{u^n} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'} dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \cdot (\sin^2 x - 1)}{\cos x} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \cdot (-\cos^2 x)}{\cos x} dx =$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cdot \cos x \, dx = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$ (*)

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\ln\frac{1}{2} + \ln 1$

$= \ln 2$

$I_3 = I_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ d'après (*)

$= \ln 2 - \frac{3}{8}$

$I_5 = I_3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$

$= \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\frac{9}{16}$

$= \ln 2 - \frac{24}{64} - \frac{9}{64}$

$= \ln 2 - \frac{33}{64}$

2. $F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$F(x)$ est une primitive de $f(x)$ ssi $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} = f(x).$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right] - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\tan\frac{5\pi}{12}\right]$$

$$I_2 = I_0 - \frac{1}{1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_4 = I_2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

Exercice II

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$$

1. $g(x) = 1 - x - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

$$\lim_{x\to+\infty}\ (1 - \underbrace{x}_{\to\infty} - \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}) = -\infty$$

$$g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$$

$g'(x) = 0 \iff -1 + 2e^{-2x} = 0$

$\iff e^{-2x} = \frac{1}{2}$

$\iff -2x = -\ln 2$

$\iff x = \frac{\ln 2}{2}$

92 min

Tableau des variations :

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	↗	$\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ $(\approx 0{,}1534)$	↘	$-\infty$

x	0		a	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$

Sur $I0; \frac{\ln 2}{2}[$ $g(x)$ est continue et positif, donc $g(x)$ n'admet aucune racine sur cet intervalle.

Comme $g(x)$ est continue, strictement décroissant de $[\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$ vers $[\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}; -\infty[$, et $g(\frac{\ln 2}{2}) > 0$ $g(+\infty) < 0$ on en déduit (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) que g admet une racine α. De plus:

$g(\frac{\ln 2}{2}) \approx 0,1534 > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$.

$g(1) \approx -e^{-2} < 0$

On a:

$g(0,7) = 0,0534$ $\Rightarrow$ $0,7 < \alpha < 1$

$g(0,8) = -0,0019$ $\Rightarrow$ $0,7 < \alpha < 0,8$

$g(0,75) = 0,0269$ $\Rightarrow$ $0,75 < \alpha < 0,8$

$g(0,79) = 0,0040$ $\Rightarrow$ $\underline{0,79 < \alpha < 0,8}$

2. $f(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$f(x) = x \cdot \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

$f'(x) = (e^{\frac{2}{x}} - 1)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} (e^{\frac{2}{x}} - 1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2}$

$= (e^{\frac{2}{x}} - 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} e^{\frac{2}{x}} (e^{\frac{2}{x}} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= (e^{\frac{2}{x}} - 1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} [e^{-\frac{2}{x}} (e^{\frac{2}{x}} - 1) - \frac{1}{x}]$

$= (e^{\frac{2}{x}} - 1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} [1 - \frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}}]$

$= \underbrace{(e^{\frac{2}{x}} - 1)^{\frac{1}{2}}}_{\geq 0} \underbrace{e^{\frac{2}{x}}}_{> 0} \cdot g(\frac{1}{x})$

$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(\frac{1}{x})$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$ $\quad \frac{10}{8} < \frac{1}{\alpha} < \frac{100}{79}$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	

3. $\ln f(x) = \ln\left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left[e^{\frac{2}{x}}\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)\right]$

$= \ln x + \frac{1}{2}\ln e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$

$= \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$

$= \frac{1}{x}(1+x\ln x) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\underbrace{(1+x\ln x)}_{\to 1} + \frac{1}{2}\underbrace{\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)}_{\to 0} = +\infty$

1 heure

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = +\infty$

4. Pour $t \in [0;1]$ $\quad e^t \geq e^0 \iff e^t - 1 \geq 0$
car e^x est croissant sur $[0;+\infty[$

Pour t ~~proche de 0 $t \in [0;+1]$~~ $\quad e^t = 1 + t\cdot e^? + \varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$

pour $t \geq 0$ $\quad e^t \leq 1 + te$

Donc $0 \leq e^t - 1 \leq e\cdot t$.

$[f(x)]^2 - 2x = x^2\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right) - 2x$

$\leq x^2\cdot e\cdot\frac{2}{x} - 2x$

$\leq 2x(e-1)$

$[f(x)]^2 \leq 2e$

$\frac{2}{x} \in [0;1]$

$x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{e}{2}\frac{4}{x^2}\right) - 2x$

$2x + 2e - 2x$

$2e$

$f(x) - \varphi(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} - \sqrt{2x}$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \sqrt{2e} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f-\varphi)(x) = x\left(\underbrace{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}_{0} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}_{0}\right) = 0$ car $(f-\varphi)(x) \leq \sqrt{2e}$

Cela signifie que $f(x)$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = \sqrt{2x}$.

5.

1h 20

Exercice III.

$f(x) = \frac{1}{\sin x}$ $\quad x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

1. On a le théorème suivant : Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone :

(i) $f(I)$ est un intervalle et l'application f définit une bijection de I sur $f(I)$.

(ii) La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Donc :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-\cos x}^{<0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[}}{\underbrace{\sin^2 x}_{>0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[}} > 0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

Comme f est strictement croissante et continue sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ la réciproque f^{-1} existe et $\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{im}\, f = [1; +\infty[$.

2. $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin^2(\arcsin x)}$

$= \frac{-\cos(\arcsin x)}{\sin^2(\arcsin x)} = \frac{\sin(\arcsin \frac{1}{y})^2}{-\cos(\arcsin \frac{1}{y})} = -\frac{\frac{1}{y^2}}{\sqrt{1-(\frac{1}{y})^2}}$

$= \frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}$

$= \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$

3. $I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

$= f^{-1}(t) \Big]_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}$

1h30

Exercice IV.

$h(x) = \left|1+\frac{1}{x}\right|^x$ $\qquad h(0) = 1$

• Domaine de définition :

$h(x) = e^{x \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|}$

C.E. : $x \neq 0$ et $1+\frac{1}{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$

$D_h = \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$

• Continuité

$h(x)$ est continue comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$.

Ou

En $x=0$: $\lim_{x\to 0^+} \left|1+\frac{1}{x}\right|^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|}$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{x \ln|x+1|}^{0} + \overbrace{x \ln|x|}^{0}} = 1$

$\lim_{x\to 0^-} \left|1+\frac{1}{x}\right|^x = 1$

D'où $h(x)$ est continue en 0 et $h(0) = 1$.

Continuité en -1 :

$\lim_{x \to -1^-} e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|} = +\infty$ ($x \to -1$, $\ln|1+\frac{1}{x}| \to +\infty$)

$\lim_{x \to -1^+} e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|} = +\infty$

discontinuité en $x = -1$

→ A.V. d'équation $x = -1$.

$\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

• Dérivabilité :

dérivabilité en 0 :

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} - 1}{x \cdot \ln(1+\frac{1}{x})} \cdot \ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$ (par Hospital $\overset{u}{=}$; $x \to 0^+$, $e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} \to 1$, $\ln(1+\frac{1}{x}) \to +\infty$)

$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{x \ln(-1-\frac{1}{x})} - 1}{x \ln(-1-\frac{1}{x})} \cdot \ln(-1-\frac{1}{x}) = +\infty$

Donc $h(x)$ n'est pas dérivable en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$

$h'(x) = e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|} \cdot \left(\ln|1+\frac{1}{x}| + x \cdot \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right) \overset{x \neq 1}{=}$ $\frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x+1}$

$= e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|} \left(\ln|1+\frac{1}{x}| - \frac{1}{x+1}\right)$

$h'(x) = 0 \iff \ln|1+\frac{1}{x}| - \frac{1}{x+1} = 0$

$\iff (x+1) \cdot \ln|1+\frac{1}{x}| - 1 = 0$

$\iff x = -1$ ou $1+\frac{1}{x} = 1$ ou $-1-\frac{1}{x} = 1$

à exclure $\iff \frac{1}{x} = 0$ impossible $\iff x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0	
$x+1$		$-$		$+$		$+$		
$\ln\lvert 1+\frac{1}{x}\rvert$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$h(x)$	e	↗	‖	↘		↗	‖	↗ e
					1			

• Limites :

$\lim_{x \to -\infty} e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|} = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln|x+1| - x \cdot \ln|\frac{1}{x}|}$

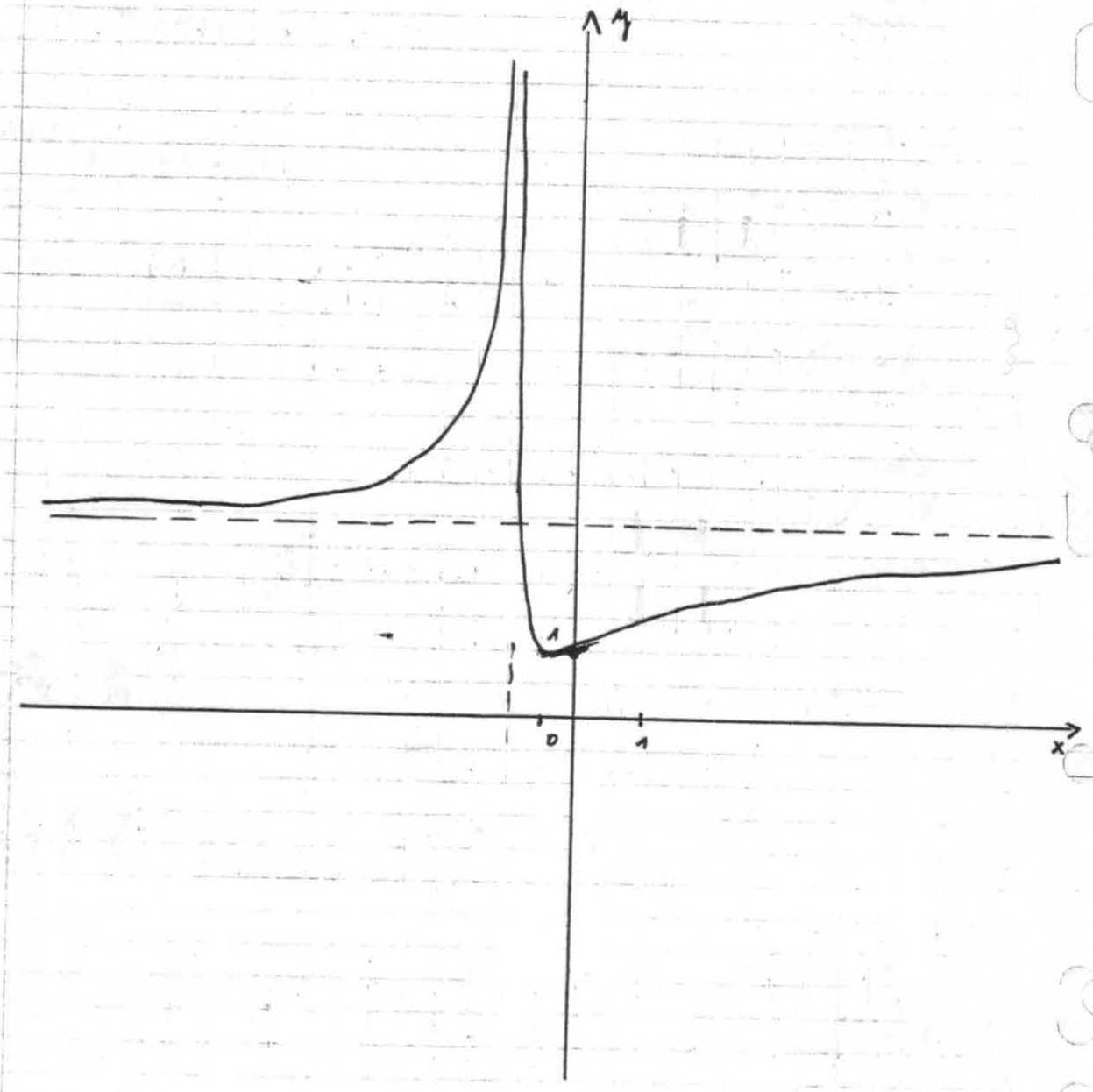
on a $x \cdot \ln|1+\frac{1}{x}| = \frac{\ln|1+\frac{1}{x}|}{(1+\frac{1}{x})-1} \cdot (-1)$

$= \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln(-1-\frac{1}{x})}$ $x = +\frac{1}{y}$ $= \lim_{y \to 0^+} e^{\frac{\ln(-1-y)}{y}}$ ...

$\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{y \to 0^+} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e$ ($x = \frac{1}{y}$)

2h

• Représentation graphique



CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

Lundi, le 28 avril 2003

15H00 – 18H00

I. Soit ABCD un quadrilatère convexe, O le point d'intersection de ses diagonales. La parallèle à (DC) menée par A coupe (BD) en I et la parallèle à (AB) menée par D coupe (AC) en J.

Démontrer de 3 façons différentes que (IJ) est parallèle à (BC) :

1) en utilisant le théorème de Thalès et sa réciproque,

2) en utilisant l'outil vectoriel
(indication : puisque (AI) // (DC) et (DJ) // (AB) , il existe des réels k_1 et k_2 tels que $\overrightarrow{AI} = k_1\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DJ} = k_2\overrightarrow{AB}$)

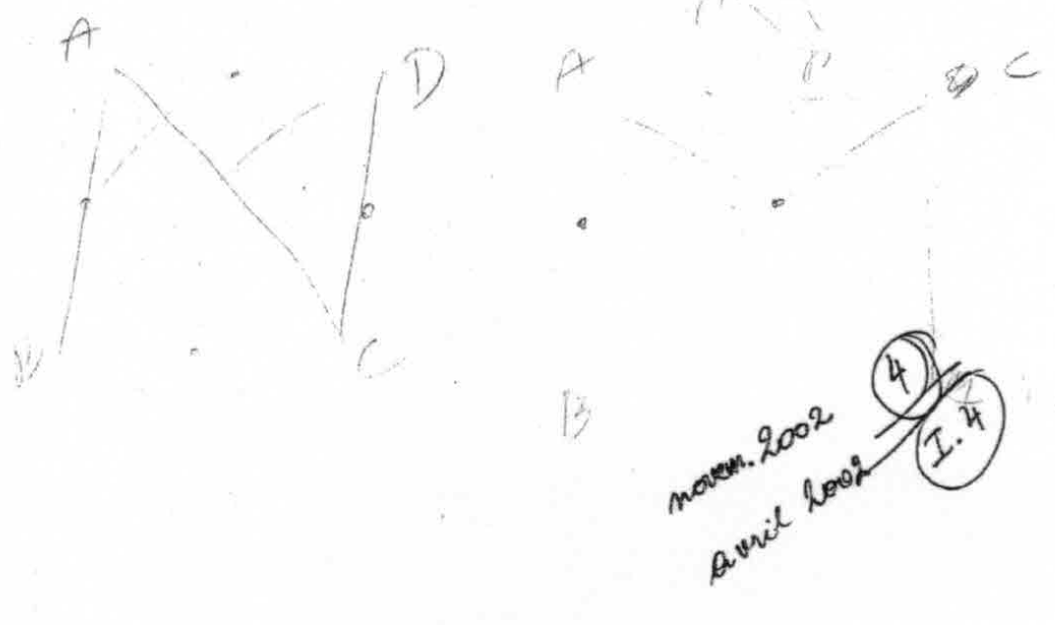
3) en utilisant l'homothétie h_1 de centre O qui transforme A en C et l'homothétie h_2 de centre O qui transforme D en B.
(indication : $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$)

(6 points)

II. 1) Soit ABC un triangle équilatéral et M et N les points définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$. Démontrer que les droites (CM) et (AN) sont orthogonales.

2) Soit ABC un triangle équilatéral avec $M \in [BA]$, $N \in [BC]$ et BM = BN. Déterminer la longueur BM pour que (AN) $\perp$ (CM).

(4 points)



nov. 2002
Avril 2002
4
I. 4

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

Lundi, le 28 avril 2003

15H00 – 18H00

III. Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On construit à l'extérieur de ce parallélogramme des carrés ABIJ, BCLK, CDMN et DAPQ. On note E, F, G et H leurs centres respectifs. Le plan est orienté de sorte que $\left(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GC}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré de centre O.

1) On note r la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que r(D) = C.

   b) Vérifier que $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CL}\right) = \frac{\pi}{2}$ et en déduire que r(A) = L.

   c) Montrer que r(Q) = B et que r(H) = F. En déduire que le triangle GHF est rectangle en G et isocèle.

2) De manière analogue, montrer que le triangle EHF est rectangle en E et isocèle. En déduire la nature du quadrilatère EFGH.

3) Montrer que O est le centre de EFGH.

(5 points)

IV. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. (a > 0). Le point P est défini par $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{CB}$.

1) Déterminer les réels α, β et γ tels que P soit le barycentre du système {(A ;α) ;(B ;β) ;(C ;γ)}

2) Soit E_k l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (k+4)\,a^2$
Déterminer le réel k pour que $B \in E_k$ et caractériser alors l'ensemble E_k.

3) Caractériser l'ensemble des points M tels que $2MB^2 = 2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

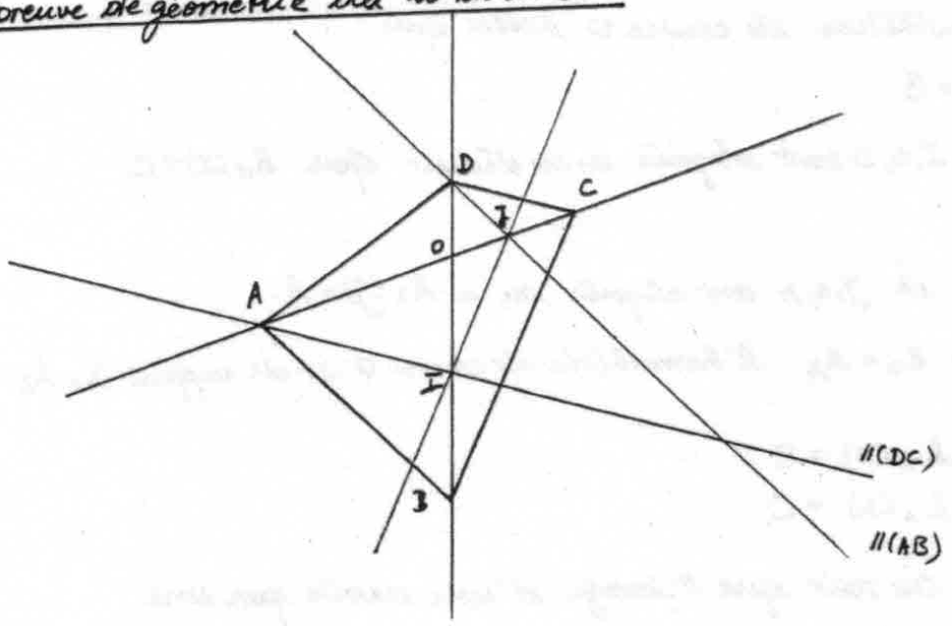
(5 points)

$-\vec{PA} = 2\vec{CB}$

$\vec{PA} = -2\vec{CB}$

Epreuve de géométrie du 28 avril 2003

I.



On veut prouver que $(IJ) \parallel (BC)$

1) Puisque $(DJ) \parallel (AB)$ le théorème de Thalès nous dit que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \iff \overline{OA}\cdot\overline{OD} = \overline{OB}\cdot\overline{OJ} \qquad (1)$$

De plus, $(DC) \parallel (AI)$, donc le théorème de Thalès dit que

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \iff \overline{OD}\cdot\overline{OA} = \overline{OI}\cdot\overline{OC} \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2) on a $\overline{OB}\cdot\overline{OJ} = \overline{OA}\cdot\overline{OD} = \overline{OI}\cdot\overline{OC}$

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OC}}$$

~~De plus D, O, I et~~ De plus O, I, B et O, J, C sont dans le même ordre respectivement.

D'après la réciproque du théorème de Thalès on conclut : $(IJ) \parallel (BC)$.

2) On a : $(DJ) \parallel (AB) \iff \exists k_1 \in \mathbb{R}$ tel que ~~$\vec{BJ} = k_2 \vec{BB}$~~ $\vec{DJ} = k_2 \vec{AB}$.

$(AI) \parallel (DC) \iff \exists k_2 \in \mathbb{R}$ tel que ~~$\vec{DE} = k_1 \vec{BE}$~~ $\vec{AI} = k_1 \vec{DC}$.

Montrons que $\vec{IJ} = k_3 \vec{BC}$

?

$$\begin{aligned}
\vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ} \\
&= -k_1 \vec{DC} + \vec{AD} + k_2 \vec{AB} \\
&= -k_1 \vec{DC} + \vec{AD} - k_2 \vec{BA} \\
&= -k_1 \vec{DC} - k_1 \vec{AD} + k_1 \vec{AD} + \vec{AD} - k_2 \vec{BA} \\
&= -k_1 \vec{AC} + (k_1+1)\vec{AD} - k_1 \vec{BA} + (k_1 - k_2)\vec{BA} \\
&= -k_1 \vec{BC} + (k_1+1)\vec{AD} + (k_1 - k_2)\vec{BA} \\
&= -k_1 \vec{BC} + k_1 \vec{BD} + \vec{AD} - k_2 \vec{BA}
\end{aligned}$$

3. On considère les homothéties de centre O telles que

$h_1(A) = C$ et $h_2(D) = B$.

Puisque $\left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OD}}\right) = \lambda_1$ et I, O, D sont alignés on en déduit que $h_1(I) = C$.

Puisque $\frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \lambda_2$ et J, O, A sont alignés on a $h_2(J) = A$.

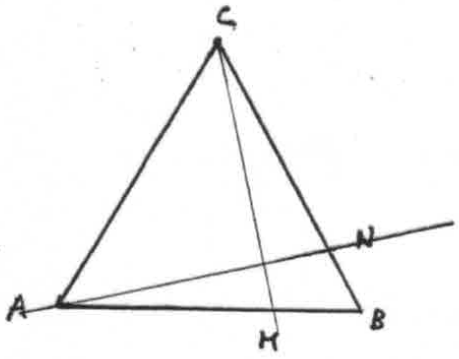
Notons $\mathcal{H} = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

On a :

$$h_2 \circ h_1(I) = h_2(D) = B$$
$$h_1 \circ h_2(J) = h_1(A) = C$$

Donc $\mathcal{H}(IJ) = BC$. On sait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle d'où $(IJ) \parallel (BC)$.

1.



1) $(CH) \perp (AN) \iff \vec{CH} \cdot \vec{AN} = \vec{0}$.

$\vec{CH} \cdot \vec{AN} = (\vec{CA} + \vec{AH}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BN})$

$= (\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{AB}) \cdot (\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{BC})$

$= \vec{CA} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{CA} \cdot \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{AB}^2 + \frac{2}{15}\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

$= -\vec{AC} \cdot \vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{CA}\vec{CB} + \frac{2}{3}\vec{AB}^2 - \frac{2}{15}\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

Comme le triangle ABC est équilatéral on a :

$C\hat{A}B = B\hat{C}A = C\hat{B}A = 60°$. On note $a = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

$= -a^2 \cdot \cos 60° - \frac{1}{5}a^2 \cos 60° + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{15}a^2 \cos 60°$

$= -\frac{a^2}{2} - \frac{1}{10}a^2 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{30}a^2$

$= \frac{-15}{30}a^2 - \frac{3}{30}a^2 + \frac{20}{30}a^2 - \frac{2}{30}a^2$

$= 0$ Donc $(CH) \perp (AN)$

2) $\overline{BH} = \overline{BN} \Rightarrow B \in$ méd $[HN]$ et $(AN) \perp (CH)$.

Puisque $H \in [BA] \iff \vec{BH} = \lambda \vec{BA}$. $N \in [BC]$, $\overline{BH} = \overline{BN}$ et $\overline{BA} = \overline{BC}$ on a $\vec{BN} = \lambda \vec{BC}$.

$0 = \vec{AN} \cdot \vec{CH} = (\vec{AB} + \vec{BN}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BH})$

$= (\vec{AB} + \lambda\vec{BC}) \cdot (\vec{CB} + \lambda\vec{BA})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \lambda \vec{AB} \cdot \vec{BA} + \lambda \vec{BC} \cdot \vec{CB} + \lambda^2 \vec{BA} \cdot \vec{BC}$

$= +\vec{BA} \cdot \vec{BC} - \lambda \vec{AB}^2 - \lambda \vec{BC}^2 + \lambda^2 \cdot \vec{BA}\vec{BC}$

$= a \cdot a \cdot \cos 60° - 2\lambda a^2 + \lambda^2 a \cdot a \cdot \cos 60°$

$0 = \frac{a^2}{2}\lambda^2 - 2a^2\lambda + \frac{a^2}{2}$

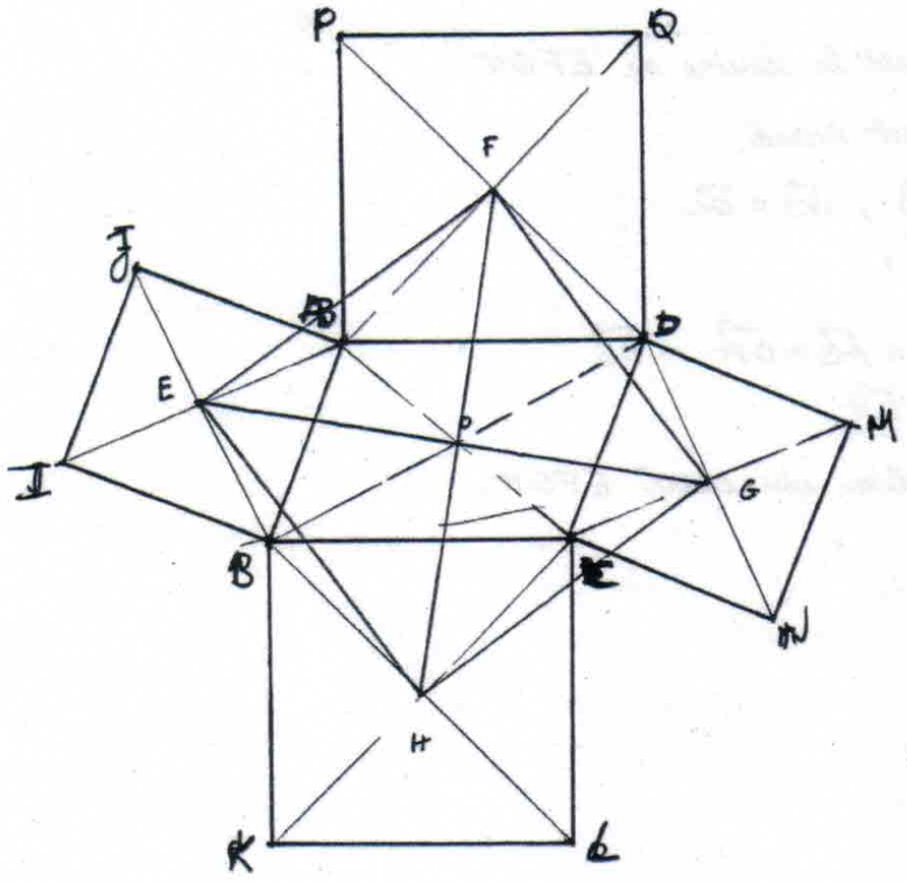
On a une équation du 2e degré en λ. $\Delta = 4a^4 - a^4 = 3a^4$

$\lambda_1 = \frac{2a^2 + \sqrt{3}a^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3}$ et $\lambda_2 = \frac{2a^2 - \sqrt{3}a^2}{a^2} = 2 - \sqrt{3}$

à écarter car $2 + \sqrt{3} > 1$ et $H \in [BA]$

Donc $\overline{BH} = (2 - \sqrt{3}) \cdot \overline{AB}$

III.



1) $r\left(G; \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Puisque CDMN est un carré de centre G on a $\overline{GD} = \overline{GC}$.
De plus la figure a été construite de sorte que $(\vec{GD}, \vec{GC}) = \frac{\pi}{2}$
Donc $r(D) = C$.

b) $(\vec{DA}, \vec{CL}) = (\vec{CB}; \vec{CL}) = \frac{\pi}{2}$ puisque BCLK est un carré.

car $\vec{DA} = \vec{CB}$ puisque ABCD est un parallélogramme.

L'image par r de DA est une droite perpendiculaire à (DA) et qui passe par C puisque $r(D) = C$. Comme (CL) satisfait ces deux conditions on a $r([DA]) = [CL]$, d'où $r(A) = L$, car $\overline{DA} = \overline{CL}$.

c) Montrons que $r(Q) = B$ et $r(H) = F$.
$(\vec{DQ}, \vec{CB}) = (\vec{CB}, \vec{DQ}) = (\vec{DQ}; \vec{DA}) = \frac{\pi}{2}$ car ADQP est un carré.
De plus l'image de $[DQ]$ est une droite $\perp$ à (DQ) qui passe par $r(D) = C$. Comme $\vec{CB} \perp \vec{DQ}$ et $\vec{CB} = \vec{DQ}$ on a $r(Q) = B$. De même pour $r(H) = F$.
Comme $r(H) = F$ on a $H\hat{G}F = \frac{\pi}{2}$ et $\overline{GH} = \overline{GF}$
d'où GHF est un triangle rectangle en G et isocèle.

2) Même méthode ...

3) Montrons que O est le centre de EFGH.

Comme EFGH est carré.

On a $\vec{BO} = \vec{OD}$, $\vec{AO} = \vec{OC}$

$\vec{GC} = \vec{AE}$,

$\vec{GO} = \vec{GC} + \vec{CO} = \vec{AE} + \vec{OA} = \vec{OE}$

$\vec{FO} = \ldots\ldots = \vec{OH}$

Donc O est le milieu du carré EFGH.

IV. ABC triangle équilatéral ($AB = BC = AC = a > 0$) et P tq $\vec{AP} = 2\vec{CB}$

1) $\vec{AP} = 2\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AP} = 2(\vec{CP} + \vec{PB})$

$\Leftrightarrow \vec{0} = 2\vec{CP} + 2\vec{PB} + \vec{PA}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{PA} + 2\vec{PB} - 2\vec{PC}$

Donc P est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;-2)$.

2) $B \in E_k = \{M \in \mathcal{P} \mid MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (k+4)a^2\}$

$\Leftrightarrow BA^2 + 2BB^2 - 2BC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow a^2 \cdot \cancel{\vec{BA}^0} - 2a^2 \cancel{\vec{BB}^0} = (k+4)a^2$ $\quad : a^2$ car $a > 0$ donc $a \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2 = k + 4$

$\Leftrightarrow -1 - 4 = k$

$\Leftrightarrow k = -5$. Donc $B \in E_k$ pour $k = -5$.

Caractériser l'ensemble E_k :

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow (\vec{MP} + \vec{PA})^2 + 2(\vec{MP} + \vec{PB})^2 - 2(\vec{MP} + \vec{PC})^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow \cancel{MP^2} + 2\vec{MP}\vec{PA} + PA^2 + \cancel{2MP^2} + 4\vec{MP}\vec{PB} + 2PB^2 - \cancel{2MP^2} - 4\vec{MP}\vec{PC} - 2PC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow MP^2 + 2\vec{MP}(\vec{PA} + 2\vec{PB} - 2\vec{PC}) + PA^2 + 2PB^2 - 2PC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow \cancel{MP^2} = (k+4-3)a^2$ $\quad \Leftrightarrow MP^2 = (k+4)a^2 - a^2 - 2(\vec{PA} + \vec{AB})^2 + 2(\vec{PA} + \vec{AC})^2$

$\Leftrightarrow MP^2 = (k+1)a^2$ $\quad \Leftrightarrow MP^2 = (k+3)a^2 - 2\vec{PA}^2 - 4\vec{PA}\vec{AP} - \cancel{\vec{AB}^2} + 2\vec{PA}^2 + 4\vec{PA}\vec{AC} + 2\vec{AC}^2$

$= (k+3)a^2 - 8a^2 - 2a^2 + 2a^2 - 4\vec{PA}\vec{AP} + 4\vec{PA}\vec{AC}$

$= \ldots$

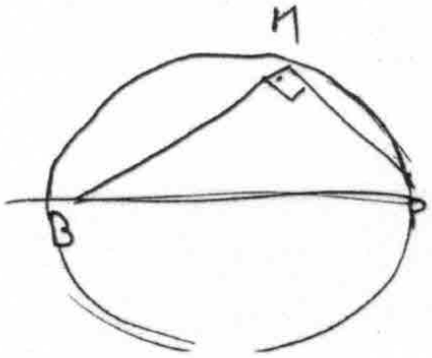
$\Rightarrow E_k = \mathcal{C}_e(P; \sqrt{\ldots}\, a)$

3) $2MB^2 = 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} - \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MB}(2\vec{MB} - 2\vec{MC} + \vec{MA}) = 0$

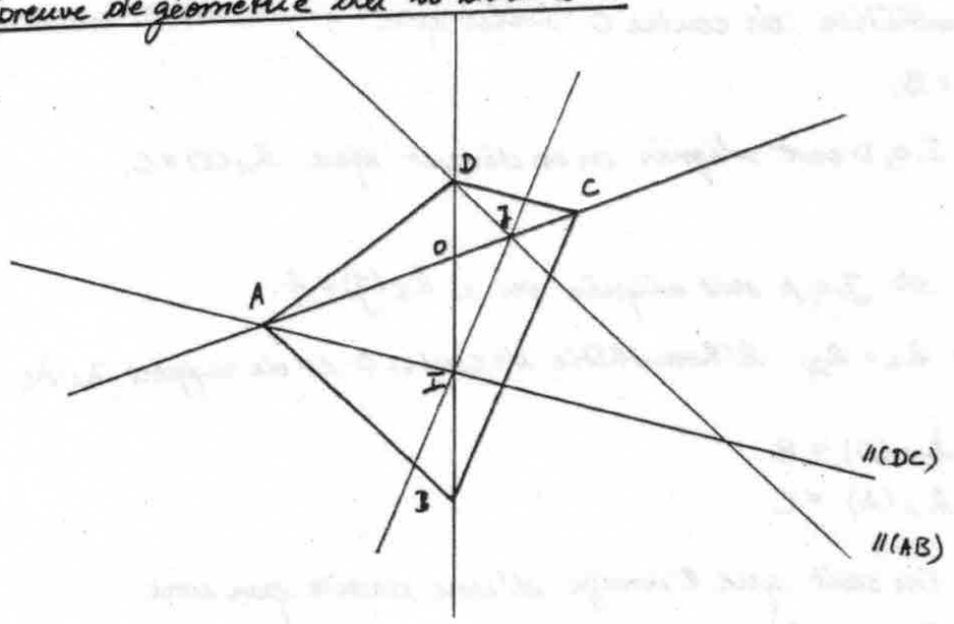
$\Leftrightarrow \vec{MB} \cdot \vec{MP} = 0$

Il s'agit du cercle de centre mil [BP] et de diamètre [BP].



Epreuve de géométrie du 28 avril 2003

I.



On veut prouver que $(IJ) \parallel (BC)$

1) Puisque $(DJ) \parallel (AB)$ le théorème de Thalès nous dit que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \iff \overline{OA}\cdot\overline{OD} = \overline{OB}\cdot\overline{OJ} \qquad (1)$$

De plus, $(DC) \parallel (AI)$, donc le théorème de Thalès dit que

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \iff \overline{OD}\cdot\overline{OA} = \overline{OI}\cdot\overline{OC} \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2) on a $\overline{OB}\cdot\overline{OJ} = \overline{OA}\cdot\overline{OD} = \overline{OI}\cdot\overline{OC}$

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OC}}$$

~~De plus D, O, I et~~ De plus O, I, B et O, J, C sont respectivement dans le même ordre

D'après la réciproque du théorème de Thalès on conclut : $(IJ) \parallel (BC)$.

2) On a : $(DJ) \parallel (AB) \iff \exists\, k_1 \in \mathbb{R}$ tel que ~~$\overrightarrow{BJ} = k_2 \overrightarrow{BB}$~~ $\overrightarrow{DJ} = k_2 \overrightarrow{AB}$.

$(AI) \parallel (DC) \iff \exists\, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que ~~$\overrightarrow{DE} = k_1 \overrightarrow{BI}$~~ $\overrightarrow{AI} = k_1 \overrightarrow{DC}$.

Montrons que $\overrightarrow{IJ} = k_3 \overrightarrow{BC}$

?

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} \\
&= -k_1 \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + k_2 \overrightarrow{AB} \\
&= -k_1 \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - k_2 \overrightarrow{BA} \\
&= -k_1 \overrightarrow{DC} - k_1 \overrightarrow{AD} + k_1 \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - k_2 \overrightarrow{BA} \\
&= -k_1 \overrightarrow{AC} + (k_1+1)\overrightarrow{AD} - k_1 \overrightarrow{BA} + (k_1 - k_2)\overrightarrow{BA} \\
&= -k_1 \overrightarrow{BC} + (k_1+1)\overrightarrow{AD} + (k_1 - k_2)\overrightarrow{BA} \\
&= -k_1 \overrightarrow{BC} + k_1 \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} - k_2 \overrightarrow{BA}
\end{aligned}$$

3. On considère les homothéties de centre O telles que

$h_1(A) = C$ et $h_2(D) = B$.

Puisque $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OD}}$ ($= \lambda_1$) et I, O, D sont alignés on en déduit que $h_1(I) = C$.

Puisque $\frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \lambda_2$ et J, O, A sont alignés on a $h_2(J) = A$.

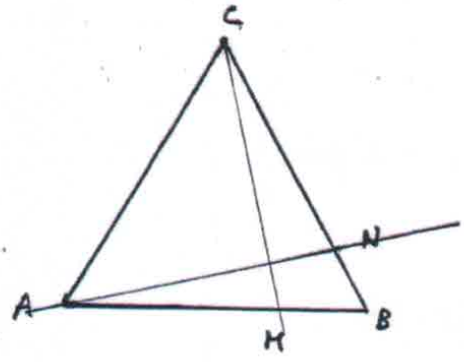
Notons $\mathcal{H} = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$ l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda_1 \cdot \lambda_2$

On a :

$$h_2 \circ h_1(I) = h_2(D) = B$$
$$h_1 \circ h_2(J) = h_1(A) = C$$

Donc $\mathcal{H}(IJ) = BC$. On sait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle d'où $(IJ) \parallel (BC)$.

1.



1) $(CH) \perp (AN) \iff \vec{CH} \cdot \vec{AN} = \vec{0}$.

$\vec{CH} \cdot \vec{AN} = (\vec{CA} + \vec{AH}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BN})$

$= (\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{AB}) \cdot (\vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{BC})$

$= \vec{CA} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{CA} \cdot \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{AB}^2 + \frac{2}{15}\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

$= -\vec{AC} \cdot \vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{CA}\vec{CB} + \frac{2}{3}\vec{AB}^2 - \frac{2}{15}\vec{BA} \cdot \vec{BC}$

Comme le triangle ABC est équilatéral on a :

$\widehat{CAB} = \widehat{BCA} = \widehat{CBA} = 60°$. On note $a = AB = AC = BC$

$= -a^2 \cdot \cos 60° - \frac{1}{5}a^2 \cos 60° + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{15}a^2 \cos 60°$

$= -\frac{a^2}{2} - \frac{1}{10}a^2 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{30}a^2$

$= \frac{-15}{30}a^2 - \frac{3}{30}a^2 + \frac{20}{30}a^2 - \frac{2}{30}a^2$

$= 0$ Donc $(CH) \perp (AN)$

2) $BH = BN \Rightarrow B \in$ méd $[HN]$ et $(AN) \perp (CH)$.

Puisque $H \in [BA] \iff \vec{BH} = \lambda \vec{BA}$. $N \in [BC]$, $BH = BN$ et $BA = BC$ on a $\vec{BN} = \lambda \vec{BC}$.

$0 = \vec{AN} \cdot \vec{CH} = (\vec{AB} + \vec{BN}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BH})$

$= (\vec{AB} + \lambda\vec{BC}) \cdot (\vec{CB} + \lambda\vec{BA})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \lambda \vec{AB} \cdot \vec{BA} + \lambda \vec{BC} \cdot \vec{CB} + \lambda^2 \vec{BA} \cdot \vec{BC}$

$= +\vec{BA} \cdot \vec{BC} - \lambda \vec{AB}^2 - \lambda \vec{BC}^2 + \lambda^2 \cdot \vec{BA} \vec{BC}$

$= a \cdot a \cdot \cos 60° - 2\lambda a^2 + \lambda^2 a \cdot a \cdot \cos 60°$

$0 = \frac{a^2}{2}\lambda^2 - 2a^2\lambda + \frac{a^2}{2}$

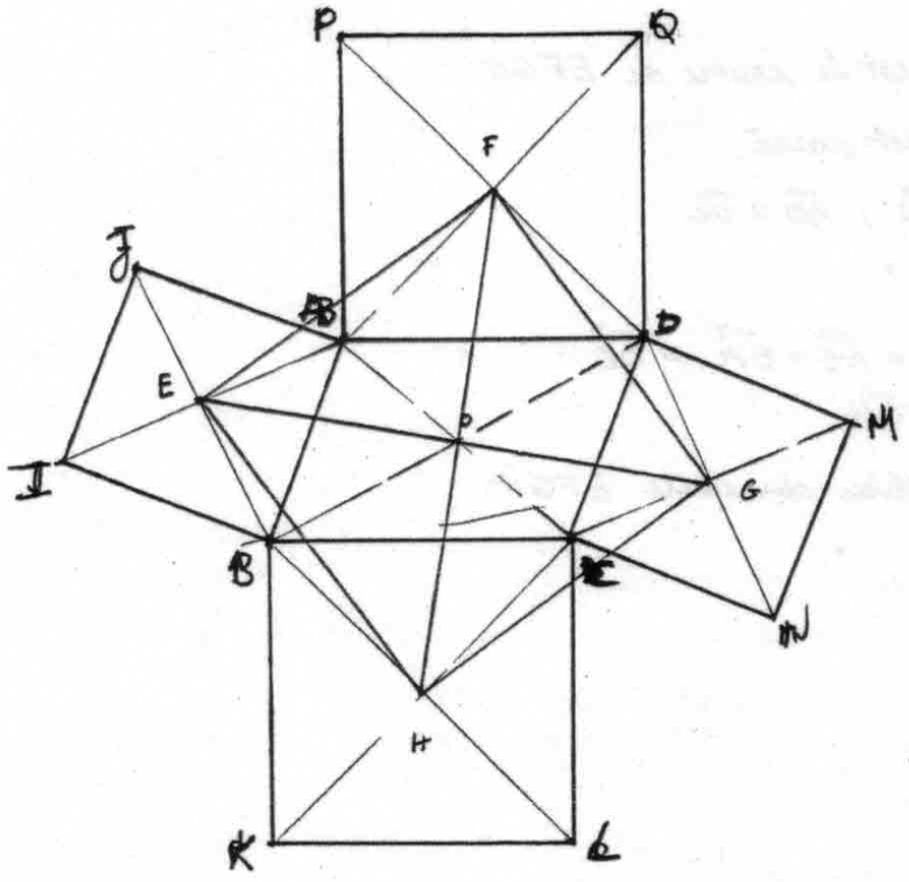
On a une équation du 2e degré en λ. $\Delta = 4a^4 - a^4 = 3a^4$

$\lambda_1 = \frac{2a^2 + \sqrt{3}a^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3}$ et $\lambda_2 = \frac{2a^2 - \sqrt{3}a^2}{a^2} = 2 - \sqrt{3}$

à écarter car $2 + \sqrt{3} > 1$ et $H \in [BA]$

Donc $\vec{BM} = (2 - \sqrt{3}) \cdot \vec{AB}$

III.



1) $r\left(G; \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Puisque CDMN est un carré de centre G on a $\overline{GD} = \overline{GC}$.
De plus la figure a été construite de sorte que $(\vec{GD}, \vec{GC}) = \frac{\pi}{2}$
Donc $r(D) = C$.

b) $(\vec{DA}, \vec{CL}) = (\vec{CB}; \vec{CL}) = \frac{\pi}{2}$ puisque BCLK est un carré.

car $\vec{DA} = \vec{CB}$ puisque ABCD est un parallélogramme.

L'image par r de DA est une droite perpendiculaire à (DA) et qui passe par C puisque $r(D) = C$. Comme (CL) satisfait ces deux conditions on a $r([DA]) = [CL]$, d'où $r(A) = L$,
car $\overline{DA} = \overline{CL}$.

c) Montrons que $r(Q) = B$ et $r(H) = F$.
$(\vec{DQ}, \vec{CB}) = (\vec{CB}, \vec{DQ}) = (\vec{DQ}; \vec{DA}) = \frac{\pi}{2}$ car ADQP est un carré.
De plus l'image de $[DQ]$ est une droite $\perp$ à (DQ) qui passe par $r(D) = C$. Comme $\vec{CB} \perp \vec{DQ}$ et $\vec{CB} = \vec{DQ}$ on a $r(Q) = B$. De même pour $r(H) = F$.
Comme $r(H) = F$ on a $H\hat{G}F = \frac{\pi}{2}$ et $\overline{GH} = \overline{GF}$
d'où GHF est un triangle rectangle en G et isocèle.

2) Même méthode ...

3) Montrons que O est le centre de EFGH.

Comme EFGH est carré.

On a $\vec{BO} = \vec{OD}$, $\vec{AO} = \vec{OC}$

$\vec{GC} = \vec{AE}$,

$\vec{GO} = \vec{GC} + \vec{CO} = \vec{AE} + \vec{OA} = \vec{OE}$

$\vec{FO} = \ldots\ldots = \vec{OH}$

Donc O est le milieu du carré EFGH.

IV. ABC triangle équilatéral ($AB = BC = AC = a > 0$) et P tq $\vec{AP} = 2\vec{CB}$

1) $\vec{AP} = 2\vec{CB}$

$\Leftrightarrow \vec{AP} = 2(\vec{CP} + \vec{PB})$

$\Leftrightarrow \vec{0} = 2\vec{CP} + 2\vec{PB} + \vec{PA}$

$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{PA} + 2\vec{PB} - 2\vec{PC}$

Donc P est le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$ et $(C;-2)$.

2) $B \in E_k = \{M \in \mathcal{P} \mid MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (k+4)a^2\}$

$\Leftrightarrow BA^2 + 2BB^2 - 2BC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow a^2 \cdot \cancel{\cos 60°} - 2a^2 \cancel{\cos 0} = (k+4)a^2 \quad | : a^2$ car $a > 0$ donc $a \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2 = k + 4$

$\Leftrightarrow -1 - 4 = k$

$\Leftrightarrow k = -5$. Donc $B \in E_k$ pour $k = -5$.

Caractériser l'ensemble E_k :

$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow (\vec{MP} + \vec{PA})^2 + 2(\vec{MP} + \vec{PB})^2 - 2(\vec{MP} + \vec{PC})^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow MP^2 + 2\vec{MP}\vec{PA} + PA^2 + 2MP^2 + 4\vec{MP}\vec{PB} + 2PB^2 - 2MP^2 - 4\vec{MP}\vec{PC} - 2PC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow MP^2 + 2\vec{MP}(\vec{PA} + 2\vec{PB} - 2\vec{PC}) + PA^2 + 2PB^2 - 2PC^2 = (k+4)a^2$

$\Leftrightarrow \cancel{MP^2} = (k+4-3)a^2$ $\Leftrightarrow MP^2 = (k+4)a^2 - a^2 - 2(\vec{PA} + \vec{AB})^2 + 2(\vec{PA} + \vec{AC})^2$

$\Leftrightarrow MP^2 = (k+3)a^2 - 2\vec{PA}^2 - 2\vec{PA}\vec{AP} - \vec{AB}^2 + 2\vec{PA}^2 + 4\vec{PA}\vec{AC} + 2\vec{AC}^2$

$= (k+3)a^2 - 2a^2 - a^2 + 2a^2 - 4\vec{PA}\vec{AP} + 4\vec{PA}\vec{AC}$

$= \ldots$

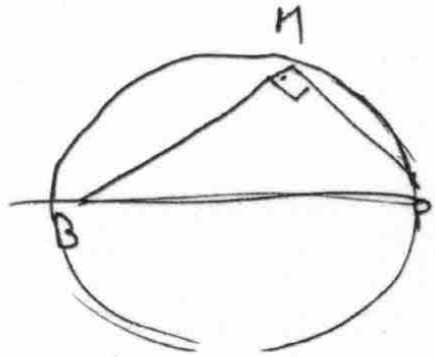
$\Rightarrow E_k = \mathcal{C}_e(P; \sqrt{\ldots}\, a)$

3) $2MB^2 = 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} - \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MB}(2\vec{MB} - 2\vec{MC} + \vec{MA}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MB} \cdot \vec{MP} = 0$

Il s'agit du cercle de centre mil [BP] et de diamètre [BP].



CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

Mardi, le 4 novembre 2003

15H00 – 18H00

I. Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B.
On note Q l'intersection de la droite (AP) avec la droite (CD).
La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1) Faire une figure (prendre BC = 3 cm et BP = 1 cm et placer (BC) horizontale sur la feuille).

2) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Préciser l'image de la droite (BC) par r.
   b) Déterminer les images de R et P par r.
   c) Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?

3) On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR]. Soit s la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
   a) Préciser les images des points R et P par s.
   b) Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
   c) De ce qui précède, déduire que les points M, B, N et D sont alignés.

(7 points)

II. Soit la parabole d'équation $x^2 = 2py$ (p réel strictement positif).
Une droite passant par le foyer F coupe la parabole en 2 points M_1 et M_2.

Démontrer la relation $$\frac{1}{FM_1} + \frac{1}{FM_2} = \frac{2}{p}$$

(5 points)

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

Mardi, le 4 novembre 2003

15H00 – 18H00

III. On donne quatre points A, B, C et M.

1) Montrer que le système des points pondérés (A,2) , (B,-1) , (C,1) et (M,-1) admet un barycentre G.

2) Prouver que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AM}$

3) Soit I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Montrer que G est le symétrique de M par rapport à I.

(2 points)

IV. A, B et C sont trois points non alignés de l'espace. À tout réel k distinct de -1, on associe le point M_k tel que $\overrightarrow{AM_k} = \frac{1+2k}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{1-k}{1+k}\overrightarrow{AC}$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points M_k lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$.

1) Où est situé le point M_k lorsque $k = 0$? lorsque $k = 1$? lorsque $k = -\frac{1}{2}$?

2) a) Trouver les réels a et b tels que pour tout $k \neq -1$:

$$\frac{1+2k}{1+k} = a + b\frac{1-k}{1+k}.$$

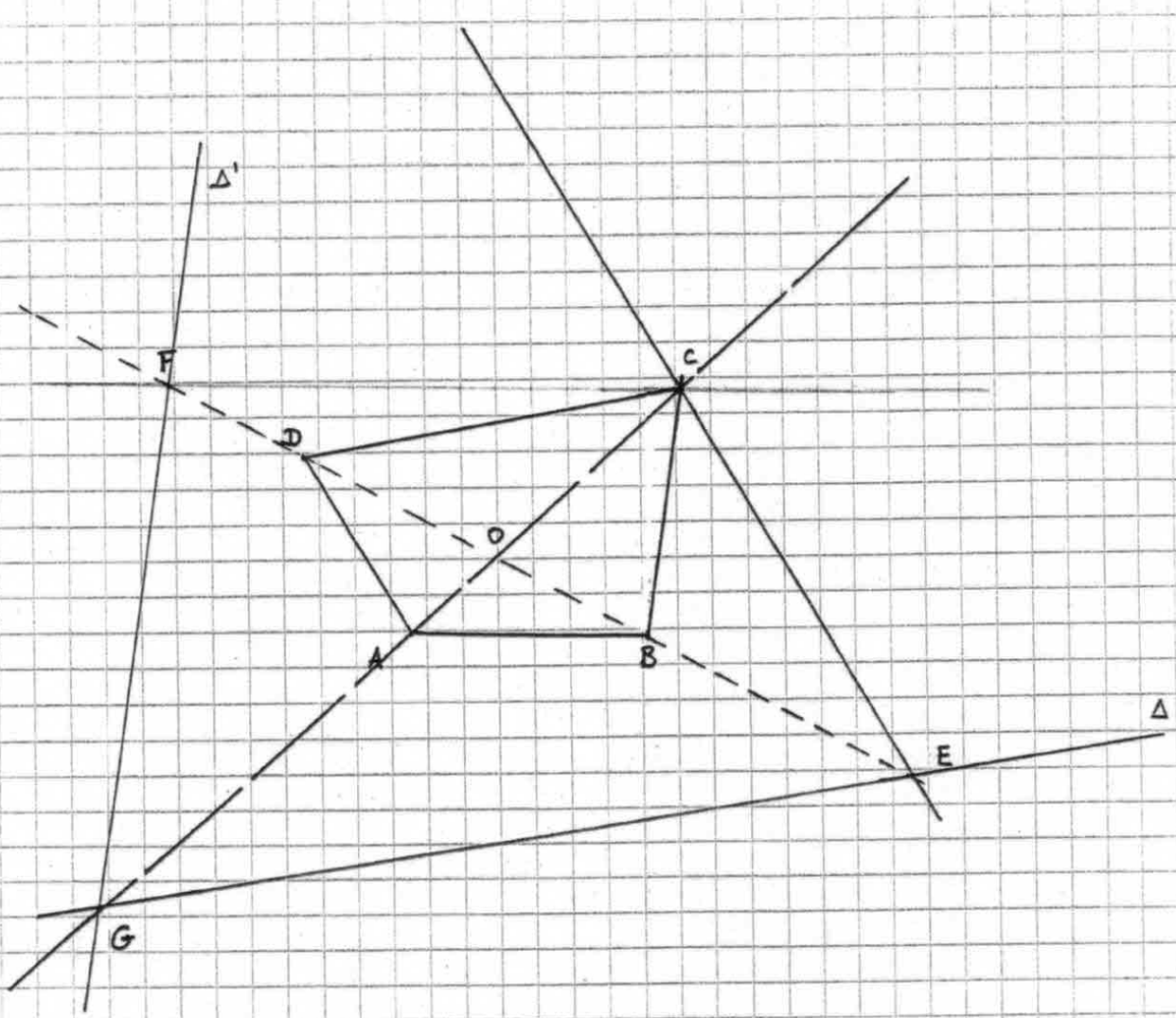
b) On désigne par D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{DM_k}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \frac{1-k}{1+k}$ et préciser l'ensemble des valeurs prises par f(k) lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$.

4) En déduire l'ensemble des points M_k lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$.

(6 points)

III.



On note $\mathcal{H}$ l'homothétie de centre O qui à A associe C.

Le rapport d'homothétie $k = -\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$.

- Comme (EC) // (AD) on a d'après la réciproque du théorème de Thalès : $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}$. De plus, D, O et E sont alignés. D'où $\mathcal{H}(D) = E$.
  Comme $\mathcal{H}(D) = E$ et (DC) // Δ on a $\underline{\mathcal{H}((CD)) = \Delta}$
- Puisque (FC) // (AB) on a $\frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$ et F, O, B alignés on a $\mathcal{H}(B) = F$. De plus (BC) // Δ'. Donc $\underline{\mathcal{H}(BC) = \Delta'}$
- Les droites (DC), (AC), (BC) sont concourantes en $\mathcal{H}(C) = G$.

On a $\mathcal{H}(CD) = \Delta$
$\mathcal{H}(BC) = \Delta'$
$\mathcal{H}(AC) = (AC)$ car $O \in (AC)$

} Donc, puisque l'homothétie conserve les points d'intersection, les droites Δ, Δ' et (AC) sont concourantes (en $\mathcal{H}(C) = G$).

Concours de recrutement 2003

Algèbre et Probabilités

I. Résoudre dans C: $\left|z+ia|z|\right| = |z| \qquad (a\in\mathbb{R})$

II. Soit ABC un triangle et $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ et $c=\overline{AB}$.
Sachant que $\hat{A}=60°$ et que $a=\sqrt{3}(b-c)$, calculer $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

III. Soit α un réel appartenant à $]0;1[$. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha\left(2-\alpha U_n\right)} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a: $U_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.
   b) Montrer que (U_n) est une suite croissante.
   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
2. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $V_n = \dfrac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.
   b) Exprimer V_n en fonction de n et de α. En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de α.
   c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) quand n tend vers l'infini.

IV. Une urne contient cinq boules blanches, deux boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants:
   événement A: obtenir trois boules de même couleur
   événement B: obtenir au moins une boule rouge
2. On tire maintenant successivemment deux boules de l'urne.
   On tire une première boule:
   - Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on effectue un deuxième tirage.
   - Si elle n'est pas blanche, on la garde à l'extérieur de l'urne et on effectue un deuxième tirage.

   On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat, associe le nombre de boules rouges. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

↑ 2 Dat

Répartition des points: 5 ; 3 ; 7 ; 5

2003 obj
autil (facil)

I dans $\mathbb{C}$: $|z + ia|z|| = |z|$, $a \in \mathbb{R}$

$z = x+iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

. si $a = 0$:

$|z| = |z|$ ce qui est vrai donc ensemble cherché $= \mathbb{C}$.

. si $a \neq 0$:

$\Leftrightarrow |(x+iy) + ia\sqrt{x^2+y^2}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow |x + i(y + a\sqrt{x^2+y^2})| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + a\sqrt{x^2+y^2})^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

≥ 0 ≥ 0.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2ay\sqrt{x^2+y^2} + a^2(x^2+y^2) = x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 2y\sqrt{x^2+y^2} + a(x^2+y^2) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = -\frac{a}{2y}(x^2+y^2)$ condition : $a \cdot y < 0$.

$\Rightarrow$ si $a < 0$ il faut que $y > 0$

si $a > 0$ " $y < 0$,

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = \frac{a^2}{4y^2}(x^2+y^2)^2$

. si $y \neq 0$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)\left[\frac{a^2}{4y^2}(x^2+y^2) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{a^2}{4y^2}(x^2+y^2) - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ si $x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow z = 0$ et $|0| = 0$

donc $z = 0$ est une solution

ou

$a^2x^2 + a^2y^2 - 4y^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + (a^2-4)y^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = -\frac{a^2x^2}{(a^2-4)}$ $\Leftrightarrow y^2 = \frac{a^2x^2}{4-a^2}$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4-a^2}} \cdot x$

CE : $4 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow a \in]-2, 2[$

	-2		2	
$2-a$	$+$	$\|$	$+$	$\|$
$2+a$	$-$	$\|$	$+$	$\|$
$(2-a)(2+a)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$

droite

pour $a \in]0, 2[$ $\Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow$ pour $x < 0$: $y = -\sqrt{\frac{a^2}{4-a^2}}\, x$

$x > 0$: $y = +\sqrt{\frac{a^2}{4-a^2}}\, x$

pour $a \in]-2, 0[$ $\Rightarrow y \leq 0 \Rightarrow$ pour $x < 0$: $y = +\sqrt{\quad}\, x$

pour $y = -\sqrt{\quad}\, x$

II $a = \overline{BC}$

$b = \overline{AC}$

$c = \overline{AB}$

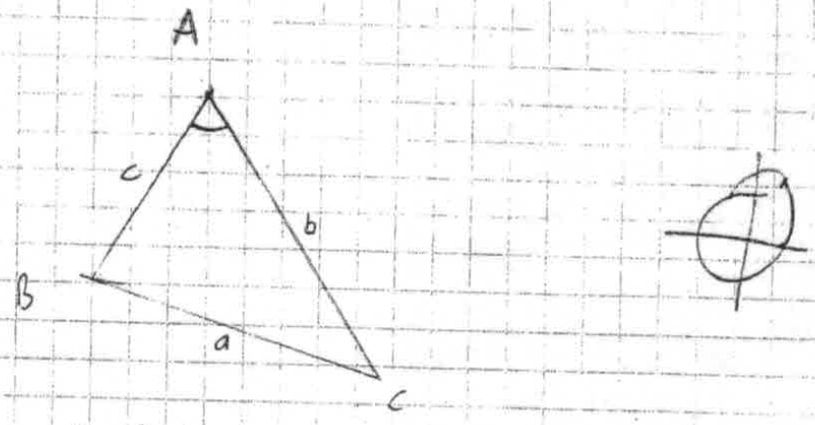
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$60^\circ = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\hat{A} = 60^\circ$

$a = \sqrt{3}(b-c)$



Ona:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-3(b-c)^2}{2bc}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{b^2+c^2-3b^2-3c^2+6bc}{2bc}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-2b^2-2c^2+6bc}{2bc}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-b^2-c^2+3bc}{bc}\right)$$

$$= 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b^2-c^2+3bc}{bc} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2b^2-2c^2+6bc = bc$$

$$\Leftrightarrow -2b^2-2c^2+5bc = 0 \quad \alpha\alpha$$

Ona:

$$\beta = \arccos\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) = \arccos\left(\frac{3(b-c)^2+c^2-b^2}{2c(\sqrt{3}(b-c))}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{3(b^2-2bc+c^2)+c^2-b^2}{2\sqrt{3}bc-2\sqrt{3}c^2}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{2b^2-6bc+4c^2}{}\right.$$

On a : $b^2 - \frac{5}{2}c \cdot b + c^2 = 0$

$$\Delta = \frac{25}{4}c^2 - 4c^2$$

$$= \frac{9}{4}c^2$$

$$\Rightarrow b = \frac{\frac{5}{2}c \pm \frac{3}{2}c}{2} =$$

$$b_1 = 2c$$

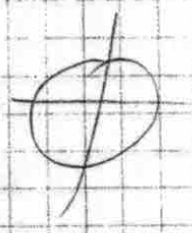
ou

$$b_2 = \frac{1}{2}c$$ à écarter



Pour $b_1 = 2c$:

$a = \sqrt{3}.c$ $\quad 0 < B < \pi$



$\pi - \frac{\pi}{2}$

$b_2 = \frac{1}{2}c$:

$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}c$ impossible $\Rightarrow$ b_2 à écarter. $0 < B < \frac{2\pi}{3}$

$a = \sqrt{3}c$; $b = 2c$; $c = c$

$$B = \arccos\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) = \arccos\left(\frac{c^2 + 3c^2 - 4c^2}{2c.\sqrt{3}c^2}\right)$$



$$= \arccos(0)$$

$\Leftrightarrow \cos B = 0$

$\Leftrightarrow B = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad \hat{B} = \frac{\pi}{2}$

---

et $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$

$$\Leftrightarrow \hat{C} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{6\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\hat{C} = \frac{\pi}{6}$$

III $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,1[$.

suite U_n ; $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) à dém : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$

On a : $\alpha \in]0,1[\iff 0 < \alpha < 1$

$\iff 1 < \frac{1}{\alpha} < +\infty$

~~Montrons~~ $U_n \leq 1$.

pour $U_0 = 1$ c'est le cas. ; $U_1 = \dfrac{1}{\alpha(2-\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(2-\alpha)}$

Supposons que c'est le cas pour U_n. démontrons que $U_n \leq 1$.

$U_{n+1} \overset{?}{\leq} 1$ $\quad$ $U_n \leq \frac{1}{\alpha}$?

$U_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)}$ $\quad$ $\frac{1}{\alpha(2-\alpha)} \leq \frac{1}{\alpha}$ $\mid \cdot \alpha > 0$

à voir : $\dfrac{1}{\alpha(2-\alpha U_n)} \leq \frac{1}{\alpha}$ $\iff \frac{1}{(2-\alpha)} \leq 1$

$\iff \dfrac{1}{2-\alpha U_n} \leq 1$ $\iff 2-\alpha \geqslant 1$

$\iff 2 - \alpha U_n \geqslant 1$ $\iff 2 \geqslant 1 + \alpha$ ~~$U_n \leq 1$~~.

$\iff$ ~~$U_n \geqslant \alpha$~~ $\iff 1 \geqslant \alpha$ donc ok pour tout $\alpha \in]0,1[$

$\iff 1 \geqslant \alpha U_n$

$\iff \dfrac{1}{U_n} \geqslant \alpha$

et $U_n \leq 1$

$\iff \dfrac{1}{U_n} \geqslant 1$. $\Rightarrow 1 \geqslant \alpha$ ce qui est le cas $\forall \alpha \in]0,1[$.

2003

III 2)

(V_n) définie sur $\mathbb{N}$ $\quad V_n = \dfrac{\alpha}{\alpha V_n - 1}$

a)

a)

(V_n) arithmétique

$$V_0 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \text{[illegible]}$$

? $V_n = V_0 + (n-1)r$ $\quad \left[V_0 = V_n - (n-1)r \right]$

$$V_0 + (n-1)r = \frac{\alpha}{\alpha-1} + (n-1)r \quad \text{définie.}$$

et $V_{n+1} = V_n + r$

$$V_{n+1} = \frac{\alpha}{\alpha V_{n+1} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha(2-\alpha V_n)}\right) - 1}$$

$$= \frac{\alpha}{\frac{\alpha - 2 + \alpha V_n}{2 - \alpha V_n}}$$

$$= \frac{\alpha(2-\alpha V_n)}{\alpha - 2 + \alpha V_n} \qquad \frac{\alpha \cdot (2-\alpha V_n)}{-1 + \alpha V_n}$$

$$= \frac{2\alpha - \alpha^2 V_n}{\alpha V_n - 1}$$

$$V_n + r = \frac{\alpha}{\alpha V_n - 1} + r$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha V_n - 1} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{-(1-\alpha)}$$

$$= \boxed{V_n - \alpha}.$$

La suite est arithmétique de raison $r = -\alpha$.

III 2) suite.

a)

On a : $V_n = V_0 + nr$

$= \frac{\alpha}{\alpha-1} + n\cdot\alpha$

$r = \frac{\alpha + n\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1} = \frac{n\alpha^2 + \alpha(1-n)}{\alpha-1} = \frac{\alpha(n\alpha+1-n)}{\alpha-1} = \frac{\alpha(n(\alpha-1)+1}{\alpha-1}$

$= \frac{\alpha}{\alpha-1}$

On a : $V_n = \frac{\alpha}{\alpha U_n - 1}$

$\alpha = 0,1$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{V_n} = \alpha U_n - 1$

$V_n \quad \frac{0,1(n(0,9)+1)}{0,9}$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{V_n} + 1\right)$

$= \frac{0,09n + 0,1}{0,9}$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + \frac{1}{\alpha}$

$= \frac{n}{10} + \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{\alpha + V_n}{\alpha V_n}$

$n \to +\infty$

$V_n \to \frac{1}{9}$

$U_n \quad \frac{0,1 + \frac{1}{9}}{0,1\cdot\frac{1}{9}} \quad \frac{\frac{9+10}{90}}{\frac{1}{90}}$

$= 19$

$\Rightarrow U_n = \frac{\alpha-1}{\alpha(n\alpha+1-n)} + \frac{1}{\alpha}$

$= \frac{\alpha-1+n\alpha+1-n}{\alpha(n\alpha+1-n)} = \frac{\alpha(n+1)-n}{\alpha(n\alpha+1-n)} = n\alpha \quad \frac{1}{\alpha} =$

$= \frac{n\left(\frac{\alpha}{n} + \alpha - 1\right)}{n\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{n} - \alpha\right)}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{\alpha}{n} + \alpha - 1\right)}{n\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{n} - \alpha\right)} = \frac{1}{\alpha}$

$\alpha(\alpha-1)$

2003/2004, 2e session

OK

Concours de recrutement en mathématiques
22 avril 2004 (15.00-18.00)
ÉPREUVE D'ANALYSE

I. A) Soit la fonction g, définie sur $]0; +\infty[$, par $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$.

Étudier le sens de variation de g. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$. Préciser le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

B) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Étudier la parité de f. Calculer $\lim_{x\to\infty} x \cdot f(x)$. En déduire $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Étudier la continuité de f et la dérivabilite de f en 0. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

2) Démontrer que pour tout réel x de $[0{,}5\ ;\ \alpha]$, $0 \le f'(x) \le f'(0{,}5)$.
Appliquer le théorème de l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que $0 \le f(\alpha) - f(0{,}5) \le \frac{1}{10} f'(0{,}5)$. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

3) Tracer le graphe cartésien G_f de f dans un repère orthonormé du plan (unité :2 cm).

4) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $J(m) = \int_1^m f(x)dx$ pour tout réel m, calculer $J(m)$ pour $m \neq 0$. Déterminer ensuite $J(0)$. Préciser le signe de $J(m)$ suivant les valeurs du réel m.

II. Soit α un réel non nul. On considère les fonctions f_α, définies sur $]0; +\infty[$, par $f_\alpha(x) = \left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1) Montrer qu'on peut prolonger f_α par continuité en 0, soit g_α ce prolongement.

2) Étudier la dérivabilité de g_α en 0.

3) Étudier le comportement de f_α en $+\infty$.

4) Étudier, en utilisant les variations des fonctions logarithme et exponentielle, les variations des fonctions f_α

5) Esquisser l'allure des courbes représentatives de f_α.

III. Soit $n \in IN^*$, calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ avec $f_n(x) = \frac{n\cdot x - 1}{(1+x\cdot\ln n)\cdot(1+n\cdot x^2\cdot\ln n)}$.

On pourra déterminer trois réels A, B, C tels que $f_n(x) = \frac{A}{1+x\cdot\ln n} + \frac{B\cdot x + C}{1+n\cdot x^2\cdot\ln n}$.

Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Répartition des points : **8 ; 7 ; 5**

2) On a $f'(x) = g(x)$. On a montré que $g(x)$ est strictement décroissant sur $[0,5;\alpha]$. Donc $\forall x \in [0,5;\alpha]$ $g(x) \in [g(\alpha); g(0,5)]$

→ $0 \leq g(x) \leq g(0,5)$ ou bien $0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$.

Le théorème de l'inégalité des accroissements finis nous dit que $\exists c \in]a;b[$ tel que $|f'(c)| \leq M$ alors $f(b) - f(a) \leq |f'(c)| \cdot (b-a)$.

~~Pour~~ Puisque $0,5 < \alpha < 0,6$ et sur $[0,5; 0,6]$ on a $\forall x$ $f'(0,5) \geq f(x)$ on obtient

inégalité des accroissements finis :

$$0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq (0,6 - 0,5)\, f'(0,5) \qquad 0 \leq \frac{f(\alpha) - f(0,5)}{\alpha - 0,5} \leq f'(0,5)$$

car $f(0,5) \leq f(\alpha)$ puisque f est croissant sur $[0,5; 0,6]$

puis $\cdot (\alpha - 0,5)$

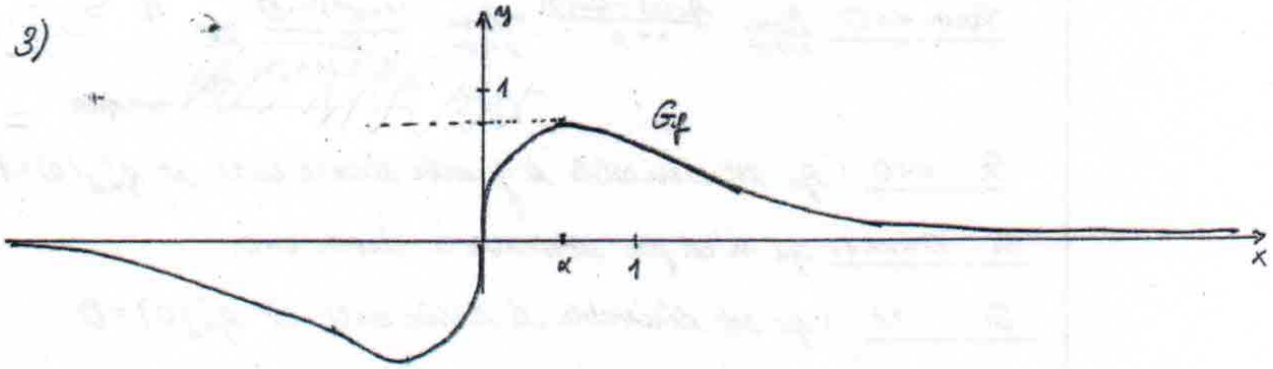
et sachant en utilisant que $0,6 - 0,5 > \alpha - 0,5$

$$f(0,5) \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{10} f'(0,5) + f(0,5)$$

$$0,8047 \leq f(\alpha) \leq 0,8056$$

Donc $f(\alpha) \approx 0,804$ (valeur par défaut)

3)



4) $J(m) = \int_1^m f(x)\,dx$ existe puisque $f(x)$ existe $\forall x \in [1; m]$.

$m \neq 0$: $J(m) = \int_1^m x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, intégration par parties $u'(x) = x$ $u(x) = \frac{x^2}{2}$ $v(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ $v'(x) = -\frac{2}{x(x^2+1)}$

$$J(m) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\Big]_1^m + \int_1^m \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\Big]_1^m + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_1^m$$

$$= \frac{m^2}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(m^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{m^2}\right) + \ln(m^2+1)\right) - \ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(m^2+1)\ln(m^2+1) - m^2 \ln(m) - \ln 2$$

$J(0) = \frac{1}{2}(0^2+1) \cdot \ln(0^2+1) - 0 \cdot \ln(0) - \ln 2 = -\ln 2$ ($\ln(0^2+1) = 0$, $0 \cdot \ln(0) = 0$)

On pose $h(m) = \frac{m^2+1}{2}\ln(m^2+1) - m^2 \ln(m) - \ln 2$ et $h'(m) = m \cdot \ln\left(\frac{1+m^2}{m^2}\right)$ ($\frac{1+m^2}{m^2} > 1$, $m > 0$)

m	α'	0	β'
$h'(x)$	−	0	+
$h(m)$	$+\infty$ ↘	$-\ln 2$ <0	↗ $+\infty$

→ $h(m) > 0$ pour $m \in]-\infty; \alpha'[\cup]\beta'; +\infty[$

$h(m) = 0$ pour $m = \alpha'$ et $m = \beta'$

$h(m) < 0$ pour $m \in]\alpha'; \beta'[$

Exercice II

$\alpha \neq 0$ $f_\alpha(x) = (1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ pour $x \in]0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\alpha}} = 1$ si $\alpha > 0$

si $\alpha<0$ $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\alpha}} = 0$ si $\alpha < 0$

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) \text{ si } x \in]0;+\infty[\\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ et } \alpha < 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \text{ et } \alpha > 0 \end{cases}$$

2) Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} - 1}{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)}{x^\alpha} \cdot \frac{x^\alpha}{x}$ ($\to 1$ · $\to \frac{1}{\alpha}$ · $\to 0$ si $\alpha > 1$, $\to +\infty$ si $\alpha < 1$) $= 0$

Pour $\alpha > 0$: $g'_\alpha(0) = 0$ si $\alpha \geq 1$

$g'_\alpha(0) = +\infty$ si $0 < \alpha < 1$

Pour $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} - 1}{x}$ ($\to 0^+$) $= -\infty$

Si $\alpha < 0$: g_α est dérivable à gauche droite en 0 et $g'_\alpha(0) = 1$

Si $0 < \alpha < 1$: g_α n'est pas dérivable à droite en 0.

Si $\alpha > 1$: g_α est dérivable à droite en 0 et $g'_\alpha(0) = 0$

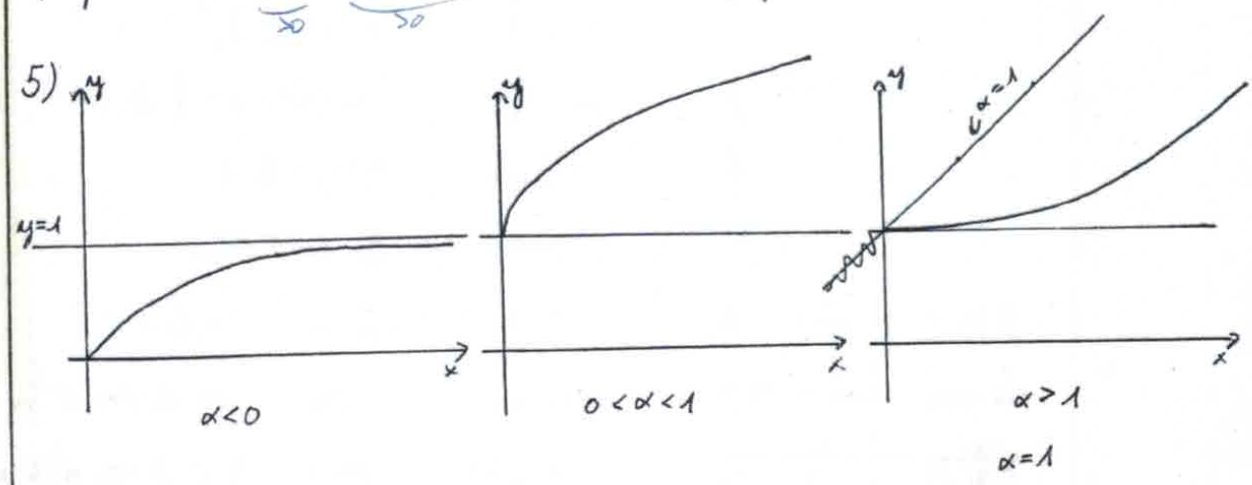
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$ si $\alpha > 0$

$= 1$ si $\alpha < 0$

4) $f'_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} > 0$ sauf pour $x = 0$

($\frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha} > 0$, $e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} > 0$)

5)



Épreuve d'analyse du 22 avril 2004

Exercice I.

A) $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$ sur $]0;+\infty[$.

Sens de variation:

$$g'(x) = \frac{-2x^{-3}}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^{-1}}{x^2+1} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x - \frac{2}{x} + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x - \frac{2}{x}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2}{x(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{\underbrace{x}_{>0}\underbrace{(x^2+1)^2}_{>0}}$$ sur $]0;+\infty[$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

à exclure $\notin D_g$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $\searrow$		$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	0
	‖		$\approx -0,31 < 0$		

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Comme $g(x)$ est strictement décroissant sur $]0;1[$ et aussi continu sur $]0;1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists k \in]0;1[$ tel que $g(k) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} g(x) > 0$ et $g(1) = \ln 2 - 1 < 0$?

$g(1) < 0$

Or on a De plus k est unique puisque $g(x)$ est strictement décroissante sur $]0;1[$. et sur $]1;+\infty[$ g est $\nearrow$ et continue mais $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $g(1) < 0$.

pas de racine supplémentaire

On a $g(0,6) = -0,041$ et $g(0,5) = 0,009$

$\rightarrow 0 \in]g(0,6); g(0,5)[$, donc $k \in]0,5; 0,6[$

B) $f(x) = \begin{cases} x \ln(1+\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Parité de $f(x)$: $f(-x) = -x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{(-x)^2}\right)$

$= -x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

Limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ posons $y = \frac{1}{x^2}$

$= \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x \cdot f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Continuité : $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ comme fonction composé de fonctions continues sur $\mathbb{R}_0$.

Pour $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x \cdot \ln(1+x^2)}_{\to 0} - \underbrace{2x \cdot \ln x}_{\to 0}$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot \ln(1+x^2) - 2x \cdot \ln x$

$= 0$

Donc $f(x)$ est continu sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité : en $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

D'où f n'est pas dérivable en 0.

Tableau de variations : Pour $x \in \mathbb{R}_0$:

$f'(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\frac{x^2+1}{x^2}}$

$= \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{-2x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} = \underbrace{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}_{>0} + \frac{-2}{x^2+1} = g(x)$

x	$-\infty$	$-\alpha$	0	α	$+\infty$
$f'(x)=g(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗		↘ 0 ‖ 0 ↗		↘ 0

$f'(x)=0$ car impaire

on devrait encore étudier g (ça) ce qu'on a fait

Exercice III

On a $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x - 1}{(1+x \cdot \ln n) \cdot (1+nx^2 \ln n)}$

$$\frac{A}{(1+x\ln n)} + \frac{Bx+C}{1+nx^2\ln n} = \frac{A + Anx^2\ln n + Bx + Bx^2\ln n + C + Cx\ln n}{(1+x\cdot\ln n)\cdot(1+nx^2\ln n)}$$

En comparant avec $f_n(x)$ on a le système suivant: (pour $n \neq 1$)

$$\begin{cases} An\ln n + B\ln n = 0 \\ B + C\ln n = n \\ A + C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} An + B = 0 \\ B + C\ln n = n \\ A + C = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} nA = B \rightarrow A = \dfrac{-B}{n} \\ \ln n\, C = -B \\ A + C = -1 \end{cases}$$

$nA + \ln n\, C = 0$

$n(-C-1) + \ln n\, C = 0$

$C(-n + \ln n) = n$

$C = \dfrac{n}{-n+\ln n}$

$$A = \frac{-n + n - \ln n}{-n+\ln n} = \frac{-\ln n}{-n+\ln n}$$

$$B = \frac{n\ln n}{-n+\ln n}$$

$I_n = \int_0^1$

si $n = 1$

$I_1 = \int_0^1 x - 1\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1$

$= -\frac{1}{2}$

1ère session 2004/2005

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'analyse

Jeudi, le 11 novembre 2004
15h-18h

I. Soit n un entier naturel.

On considère f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Préciser l'ensemble de définition ; étudier la continuité et la dérivabilité de f_n à droite en 0.

2. Etudier les variations de f_n et la limite de f_n lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Pour $\lambda>0$, déterminer $I_n(\lambda) = \int_{\lambda}^{e^{-n}} f_n(x)dx$ puis $\lim_{\lambda\to 0^+} I_n(\lambda)$.

4. Tracer la courbe (C_0) de f_0 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

5. On note α et β les solutions respectives des équations $f_0(x) = 1$ et $f_0(x) = 1 + \frac{1}{e}$.
Donner un encadrement de α et β à $2\cdot 10^{-1}$ près.

6. Soit t un réel strictement positif. Discuter, suivant les valeurs de t, le nombre de solutions de l'équation $f_0(t) + f_0(x) = 1$.

(5 points)

II. Soit g_k $(k \in R)$ la fonction de variable réelle x telle que :

$$g_k(x) = kxe^{-kx}$$

et (C_k) sa courbe représentative dans un repère orthonormé *(unité : 2,5cm)*.

1. Préciser g_0 et (C_0)

2. Pour $k > 0$, étudier les variations de g_k et les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Etudier les éventuelles branches infinies et tracer $((C_2)$.

3. Montrer que $g_k(x) = g_{-k}(-x)$ et en déduire un moyen de tracer, avec $k > 0$ (C_{-k}) à partir de (C_k). Dessiner (C_{-2}) .sur le graphique précédent.

4. Montrer que les courbes (C_k) passent toutes par un même point que l'on déterminera. Donner une équation de la tangente à (C_k) en ce point.

5. Pour $k\neq 0$, déterminer une primitive de g_k.

On pose : $A_k = \int_0^{\frac{1}{k}} g_k(t)dt$. Calculer A_k et $\lim_{k\to+\infty} A_k$.

Epreuve d'analyse du 11 novembre 2004

Exercice I

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Ensemble de définition : C.E. $x > 0$, donc $D_{f_n} = \mathbb{R}_0^+$.

Continuité : f_n est continue sur $\mathbb{R}_0^+$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_0^+$ ($g(x) = x$ et $h(x) = \ln x$).

Problème pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} (nx + x\ln x) = 0 = f_n(0) \quad \text{car} \quad \lim_{x \to 0^+} nx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x\ln x = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0$$

Donc f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Dérivabilité : f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f_n'(x) = n + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = n + 1 + \ln x .$$

Regardons si f_n est dérivable à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{nx + x\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} n + \ln x = -\infty$$

Donc $f_n(x)$ n'est pas dérivable à droite en 0.

2. Limite en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} nx + x\ln x = +\infty$ $\left[\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\right.\right.$, d'où B.P. de dir. Oy$\left.\right)$

Variations de f_n :

On a $f_n'(x) = n + 1 + \ln x$ et $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n + 1 + \ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = -(n+1)$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-n-1}.$$

T.V. :

x	0		e^{-n-1}		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖ 0	↘	$-e^{-n-1}$	↗	$+\infty$

$-e^{-n-1}$

3. $\lambda > 0$

$$I_n(\lambda) = \int_\lambda^{e^{-n}} nx + x \cdot \ln x \, dx$$

$$= \int_\lambda^{e^{-n}} nx \, dx + \int_\lambda^{e^{-n}} x \ln x \, dx$$

$$= \frac{nx^2}{2}\Big]_\lambda^{e^{-n}} + \underbrace{\int_\lambda^{e^{-\lambda}} x \ln x \, dx}_{J_n(\lambda)}$$

Pour $J_n(x)$ on fait une intégration par parties : $u'(x) = x$ $\quad v(x) = \ln x$
$u(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

D'où $J_n(\lambda) = \frac{x^2 \ln x}{2}\Big]_\lambda^{e^{-n}} - \int_\lambda^{e^{-n}} \frac{x}{2} \, dx$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2}\Big]_\lambda^{e^{-n}} - \frac{x^2}{4}\Big]_\lambda^{e^{-n}}$$

On trouve donc : ~~$I_n(\lambda) = \frac{n e^{-2n}}{9}$~~

$$I_n(\lambda) = \frac{n e^{-2n}}{2} - \frac{n\lambda^2}{2} + \frac{e^{-2n} \ln e^{-n}}{2} - \frac{\lambda^2 \ln \lambda}{2} - \frac{e^{-2n}}{4} + \frac{\lambda^2}{4}$$

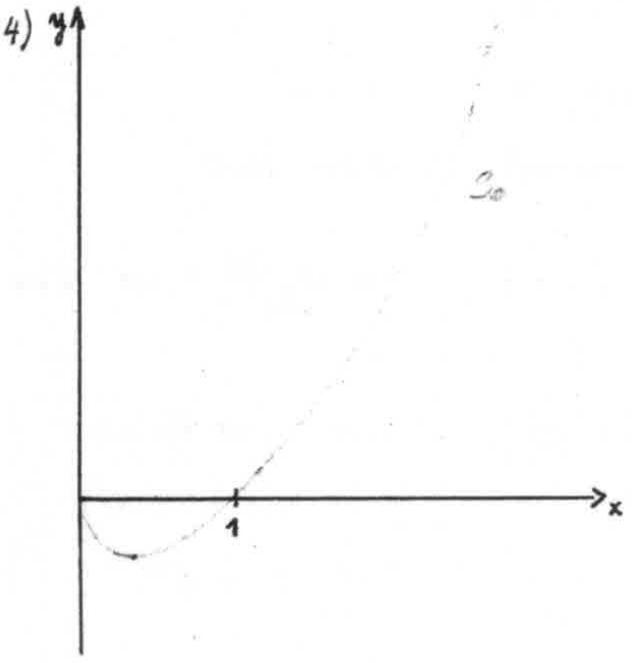
$$= \frac{n e^{-2n}}{2} - \frac{n\lambda^2}{2} - \frac{n e^{-2n}}{2} - \frac{\lambda^2 \ln \lambda}{2} - \frac{e^{-2n}}{4} + \frac{\lambda^2}{4}$$

$$= \lambda^2\left(-\frac{n}{2} - \frac{\ln \lambda}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{e^{-2n}}{4}$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^2\left(-\frac{n}{2} - \frac{\ln \lambda}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{e^{-2n}}{4}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda\left(-\frac{n\lambda}{2} - \lambda\frac{\ln \lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{e^{-2n}}{4} = -\frac{e^{-2n}}{4}$$

4)



$f_0(x) = 0 \cdot x + x \ln x$

$= x \ln x$

minimum en $x = e^{-1} \approx -0{,}367$

et $f_0(-e^{-1}) = -0{,}367$

5. $f_0(x) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha$; $f_0(x) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \beta$. $f_0(x) = x \cdot \ln x$

• D'après le graphique, on a $f_0(1,5) = 0,6$ et $f_0(2) = 1,38$

Donc $\alpha \in]1,5;2[$. Par dichotomie : (on veut $x \cdot \ln x = 1$)

$f_0(1,75) = 0,97 < 1$, donc $\alpha \in]1,75;2[$

$f_0(1,8) = 1,05 > 1$, donc $\alpha \in]1,75;1,8[$

D'où $1,7 < \alpha < 1,9$ à $0,2$ près.

• On veut $x \cdot \ln x = 1 + \frac{1}{e}$ $(\simeq 1,36)$

On a $f_0(1,8) = 1,05$ et $f_0(2) = 1,38 \Rightarrow 1,8 < \beta < 2$ à $0,2$ près.

6. $t \in \mathbb{R}_0^+$. $f_0(t) + f_0(x) = 1$

• Si $f_0(t) = 0$ alors $f_0(x) = 1$ alors 1 solution : α
$\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$

• Si $f_0(t) = -e^{-1} \Leftrightarrow t = e^{-1}$ alors on a 1 solution pour $f_0(x) = 1 + \frac{1}{e}$ c'est β.

• $f_0(x) = 1 - t\ln t$. Etudions $g(t) = 1 - t\ln t$. $D_g = \mathbb{R}_0^+$

$g'(t) = -\ln t - 1$. $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{e}$

t	0		e^{-1}		1	δ	α	$+\infty$
$g'(t)$	‖	$+$		$-$				
$g(t)$	‖	↗	$1+\frac{1}{e}$	↘	0		↘	$-\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t) = 1$

$g(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = 1 + \frac{1}{e}$

Si $0 < t < \gamma$ $f_0(x) = 1 - t\ln t > 0$ a une seule solution

Si $\gamma < t < \delta$: $f_0(t) = 1 - t\ln t < 0$ (mais $> -\frac{1}{e}$) a 2 solutions

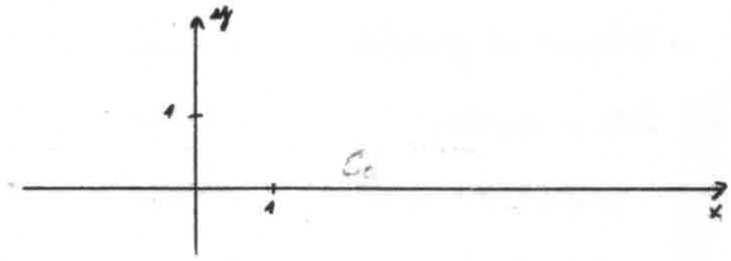
Si $\delta < t$: $f_0(x) = 1 - t\ln t < -\frac{1}{e}$ n'a pas de solutions.

Exercice II.

$g_k(x) = k \cdot x \cdot e^{-kx}$

1. $g_0 = 0 \cdot x \cdot e^{-0 \cdot x}$

$= 0$



2. $D_{g_k} = \mathbb{R}$.

Limites: $\lim\limits_{x \to +\infty} k \cdot x \cdot \underbrace{e^{-kx}}_{\to 0 \text{ car } k>0 \text{ (} \to -\infty \text{)}} = 0$ car $\lim\limits_{y \to +\infty} y \cdot e^{-y} = 0$ A.H. d'éq. $y=0$ ici $y = kx$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{k \cdot x}_{\to -\infty \text{ car } k>0} \cdot \underbrace{e^{-kx}}_{\to +\infty \text{ car } k>0} = -\infty$

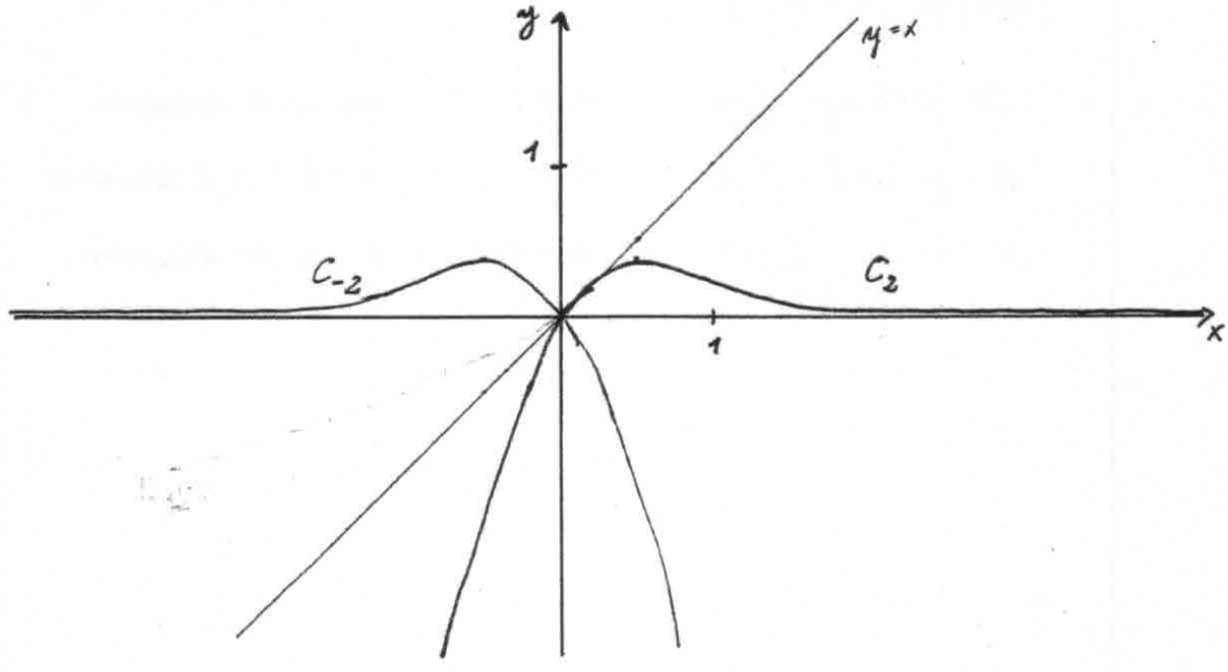
Variations de g_k:

$g_k'(x) = k e^{-kx} - k^2 x e^{-kx}$

$= k \cdot e^{-kx}(1 - kx)$

$g_k'(x) = 0 \iff (1-kx) = 0 \iff x = \frac{1}{k}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-1} (\simeq 0{,}36)$	$\searrow$	0



3. $g_{-k}(-x) = -k \cdot (-x) \cdot e^{-(-k) \cdot (-x)} = kx \cdot e^{-kx} = g_k(x)$

Donc C_{-k} est le symétrique par rapport à Oxy de C_k.

4. Les courbes C_k passent par un même point

$\Leftrightarrow \exists x$ tel que $\forall k_1, k_2 \quad k_1 x e^{-k_1 x} = k_2 x e^{-k_2 x}$

$\rightsquigarrow x(k_1 e^{-k_1 x} - k_2 e^{-k_2 x}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\underbrace{k_1 e^{-k_1 x} - k_2 e^{-k_2 x} = 0}_{\text{ne s'annule pas pour un } x \text{ particulier} \rightarrow \text{dépend de } k_1 \text{ et } k_2.}$

Donc le seul point commun de tous les C_k est l'origine $(0;0)$. La tangente en ce point s'écrit alors:

$y - g_k(0) = g_k'(0)(x-0)$

$y = k \cdot x + 0$

$y = k \cdot x$.

$\frac{\partial}{\partial k} g_k = 0$

$\Leftrightarrow x e^{-kx} + -k x^{2-kx}$

5. Pour $k \neq 0$ on cherche $\int g_k(x)\,dx$.

$\int kx e^{-kx}\,dx$. On fait une intégration par parties:

$u(x) = kx \qquad v'(x) = k e^{-kx}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-kx}$.

On a alors: $\int kx e^{-kx}\,dx = -x e^{-kx} + \int e^{-kx}$

$= -x e^{-kx} - \frac{e^{-kx}}{k} + C$

$= e^{-kx}(-x - \frac{1}{k}) + C$

$A_k = \int_0^{\frac{1}{k}} g_k(t)\,dt$

$= \int_0^{\frac{1}{k}} kt e^{-kt}\,dx = e^{-kt}(-t - \frac{1}{k})\Big]_0^{\frac{1}{k}}$

$= e^{-1}(-\frac{1}{k} - \frac{1}{k}) - e^{-k\cdot 0}(-0 - \frac{1}{k})$

$= -\frac{2}{ke} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}(1 - \frac{2}{e})$

$\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = \lim\limits_{k \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{>0} \underbrace{(1 - \frac{2}{e})}_{>0} = 0$

6) $k > 0$, g_k réalise. g_k est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$.

Donc ~~$k \to +\infty$~~ g_k est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]\lim\limits_{x \to -\infty} g_k(x);\ g_k(0)[$

c'est-à-dire de $]-\infty; 0[$ sur $]+\infty; 0[$

Le graphe de g_k^{-1} est symétrique par rapport à $y = x$ de C_{g_k}

Exercice III

$g(x) = \frac{1}{1+x}$

1. C.E. $x \neq -1$. D'où $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

g_k est continue sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ comme composée de fonctions continues sur cet intervalle.

g_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

2. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. et $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

On a $g_k(1) = \frac{1}{2}$ et $g(2) = 1$

$g'(1) = -\frac{1}{4}$ et $g'(0) = -1$ $\qquad g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

On veut $P(1) = g(1)$, $P(0) = g(0)$, $P'(1) = g'(1)$ et $P'(0) = g'(0)$.

On obtient donc le système suivant:

$$\begin{cases} a+b+c+d = \frac{1}{2} \\ d = 1 \\ 3a+2b+c = -\frac{1}{4} \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-1+1 = \frac{1}{2} \\ d = 1 \\ 3a+2b-1 = -\frac{1}{4} \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{1}{2} \quad (1) \\ d = 1 \\ 3a+2b = \frac{3}{4} \quad (2) \\ c = -1 \end{cases}$$

$2 \cdot (1) - (2)$: $\quad -a = 1 - \frac{3}{4}$

$$a = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{3}{4}$$

Donc le polynôme cherché est: $P(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1 = 0$

3. $h(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1 = g(x) - P(x)$

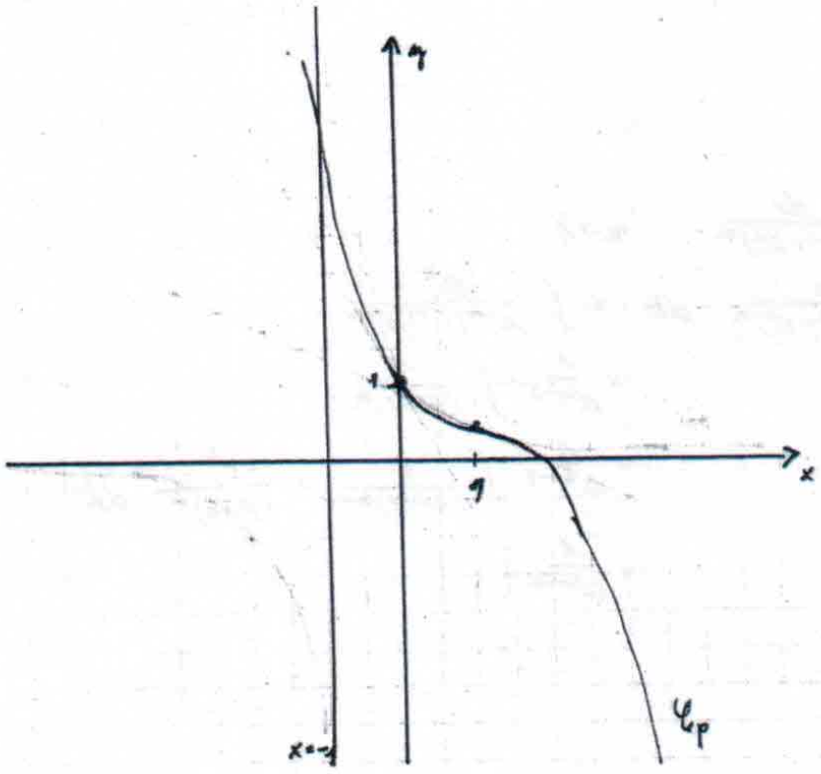
$$= \frac{4 + x^3 + x^4 - 3x^2 - 3x^3 + 4x + 4x^2 - 4 - 4x}{4(1+x)}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4(1+x)} = \frac{(x^2 - x)^2}{4(1+x)} = \frac{x^2(x-1)^2}{4(1+x)}$$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow \mathcal{C}_g / \mathcal{C}_P$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_g \cap \mathcal{C}_P = \{0\}$ en $x = 0$ et en $x = 1$

$h(x) < 0 \Leftrightarrow 1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow \mathcal{C}_P / \mathcal{C}_g$



4.

5. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$\int_0^1 \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1\,dx = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{12}x^3 - \frac{x^2}{2} + x \Big]_0^1$

$= -\frac{1}{16} + \frac{3}{12} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{48} + \frac{12}{48} - \frac{24}{48} + \frac{48}{48} = \frac{33}{48}$

$= \frac{11}{16}$

6. D'après (4) : $\frac{1}{240} \leq \ln 2 - \frac{11}{16} \leq \frac{1}{120} \Rightarrow \frac{1}{240} + \frac{165}{240} \leq \ln 2 \leq \frac{2}{240} + \frac{165}{240}$

$\Rightarrow \frac{166}{240} \leq \ln 2 \leq \frac{167}{240}$

$\Rightarrow n < 166$ ↓

Exercice IV

1. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad n > 1.$

$$I_n \underset{x=at}{=} \int \frac{a}{(a^2t^2+a^2)^n}\, dt = \int \frac{a^2}{a^{2n}(t^2+1)^n}$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \int \frac{1}{(t^2+1)^n}$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{-t^2}{(t^2+1)^n}\, dt$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \Big[$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

lundi, le 26 avril 2004

15H00 – 18H00

I. Soit ABC un triangle et M le milieu de [BC].
Une droite d passant par A coupe la droite (BC) entre B et C.
On désigne par D, E resp. N les projections orthogonales de B, C resp. M sur d.

1) Démontrer que M est équidistant de D et E.
2) Démontrer que la droite d est la médiane issue de A si et seulement si BD = CE (BD désigne la longueur du segment [BD]).

(4 points)

II. Soit ABCD un quadrilatère non convexe et soient M, N, P et Q les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.
2) Démontrer que la droite joignant le milieux de [AC] et [BD] et les droites (MP) et (NQ) sont concourantes.

(3 points)

III. Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct et rectangle en O.
On désigne par J le milieu de [AB].
M est un point variable de la droite d perpendiculaire en A à la droite AB.
La perpendiculaire en O à la droite OM coupe la droite AB en M'.

1) Soit s la similitude de centre O telle que s(A) = B.
   Montrer que, pour tout point M de d on a s(M) = M'.
2) a) Montrer que les triangles OMM' et OAB sont semblables.
   b) Montrer que, pour tout point M de d, le point I milieu de [MM'] est l'image de M par une similitude S de centre O. Indiquer le rapport et l'angle de cette similitude S.
   c) Soit H le projeté orthogonal de O sur d. Déterminer S(H).
   d) Chercher le lieu géométrique du point I lorsque M décrit d..
3) Pour tout point M de d distinct de A, on désigne par P le point tel que MAM'P est un rectangle.
   Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit $\{R \in d / R \neq A\}$.

(8 points)

IV. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A(1,1,4) , B(0,-1,1) , C(0,0,3) , D(2,-1,0) , E(1,-1,1) , F(1,2,0) et G(-2,0,1).
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre F et passant par G.

1) Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite (DE).
2) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$, intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan (ABC).

(5 points)

IV. $A(1;1;4)$, $B(0;-1;1)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-1;0)$, $E(1;-1;1)$, $F(1;2;0)$ et $G(-2;0;1)$.

1) $\mathcal{S}$ est la sphère de centre F qui passe par G.

Dans l'espace l'équation d'une sphère est de la forme:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+d=0$ où $\Omega(a;b;c)$ est le centre de la sphère.

Si le centre est $F(1;2;0)$ on a donc:

$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2+d=0$.

Comme le point $G(-2;0;1) \in \mathcal{S}$ il vérifie son équation.
On a donc:

$(-2-1)^2+(0-2)^2+1^2+d=0$

$\Leftrightarrow 9+4+1+d=0$

$\Leftrightarrow d=-14$.

D'où l'équation de $\mathcal{S}$: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2-14=0$.

L'équation de la droite (DE) : écrivons l'équation paramétrique:

un vecteur directeur de (DE) est $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Donc on trouve :

$$\begin{cases} x = -t+2 \\ y = -t-1 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Remplaçons ces valeurs dans l'équation de la sphère :

$(-t+2-1)^2+(-1-2)^2+t^2-14=0$

$\Leftrightarrow (-t+1)^2+9+t^2-14=0$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1+9+t^2-14=0$

$\Leftrightarrow 2t^2-2t-4=0$

$\Leftrightarrow t^2-t-2=0$

$\Delta = \sqrt{1+8}$

$t_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$

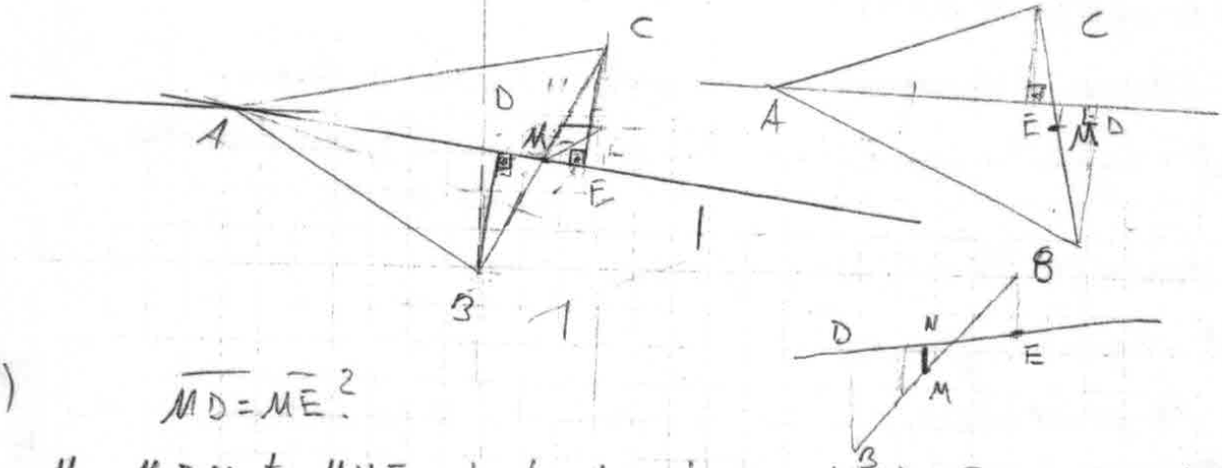
$t_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$

Donc il existe deux points d'intersection entre la droite (DE) et la sphère $\mathcal{S}$:

$I_1(0;-1;2)$ et $I_2(3;-1;-1)$

$BD = CE$

$MD = ME$



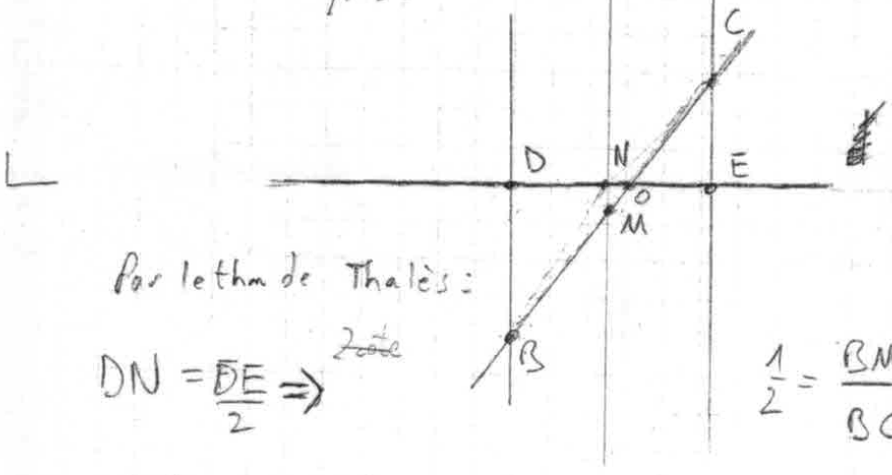
1) $\overline{MD} = \overline{ME}$?

Mq MDN et MNE sont des triangles semblables ▽

MN coté commun + angle droit



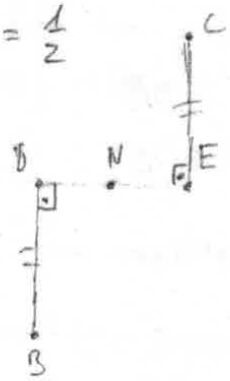
ol NSD et MCE sont semblables



par le thm de Thalès :

$DN = \frac{DE}{2} \Rightarrow$ ~~2 cote~~

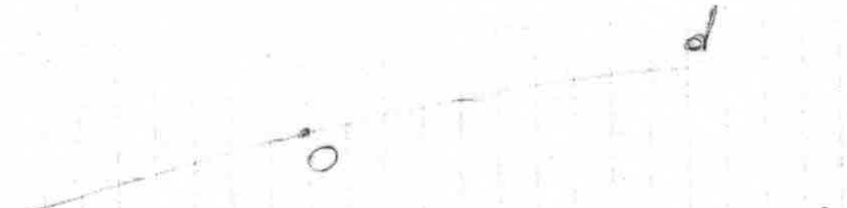
$\frac{1}{2} = \frac{BM}{BC} = \frac{DN}{DE} = \frac{1}{2}$



2) Si d est la médiane : ok

Si $BD = CE$, alors NBD et NCE semblables

$\Rightarrow$ ~~Mq~~ parallélogramme
diagonales
donc se coupent ∂milieu



$S_O \circ S_d \ (M)$

$\overrightarrow{C(A)C(B)} = f(\overrightarrow{AB}) \quad r_{O,180°} \circ S_d \ (M)$

$\overrightarrow{AB}$

$\|\overrightarrow{C(A)C(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

et

$\overrightarrow{AC(M)} = f(\overrightarrow{AM})$

M'

$C(A)C(M)$



$r_{C,\pi}(C') = C'$

$\Leftrightarrow C' = C$

donc

$r_{C,\pi} \circ S_\Delta (C) = r_{C,\pi}(C')$

$S_\Delta \circ r_{C,\pi}(C) = S_\Delta(C) = C'$

$S_\Delta(C) = C$

$\Leftrightarrow$

$C \in \Delta$

Q $r_{C,\pi} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ r_{C,\pi}$

$S_\Delta(C) = C' \qquad r_{C,\pi}(C') = C''$

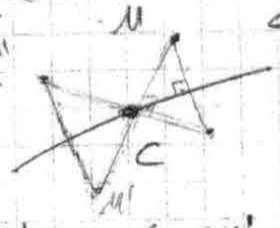
$r_{C,\pi} S_\Delta (C) = C''$

$S_\Delta \circ r_{C,\pi}(C) = S_\Delta(C') = C''$

$\Rightarrow C \in \Delta$?

C''

M''



Si $C \in \Delta$

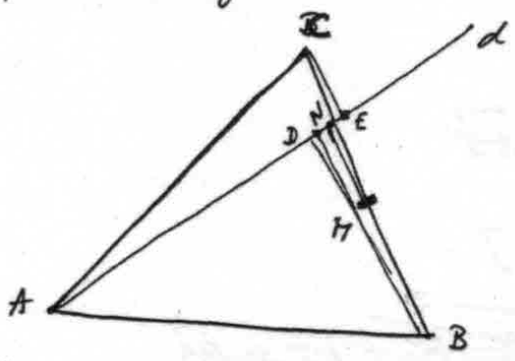
$\forall \ r_{C,\pi} \circ S_\Delta (M) = S_\Delta (M')$

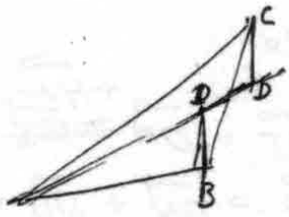
$S_C(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{M'C}$

$S_\Delta (M')$

Épreuve de géométrie du 26 avril 2004

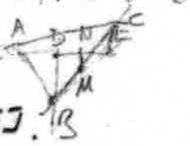
I.





Thalès ✓ est mieux

MDN et MNE sont semblables
- MN coté commun
- $\frac{DN}{BC} = \frac{NE}{DE}$ ⇒ ND = NE ✓
- angle droit



1) HD = HE. On veut montrer que H fait partie de la médiatrice ~~[AD]~~ [DE].
La projection orthogonale conserve les positions relatives. Puisque H = mil [BC] on a N = mil [DE]. De plus la droite (HN) est perpendiculaire (car N = proj⊥(M)) à (DE). D'où (HN) est la médiatrice de DE donc ~~HD~~ $\overline{HD} = \overline{HE}$.

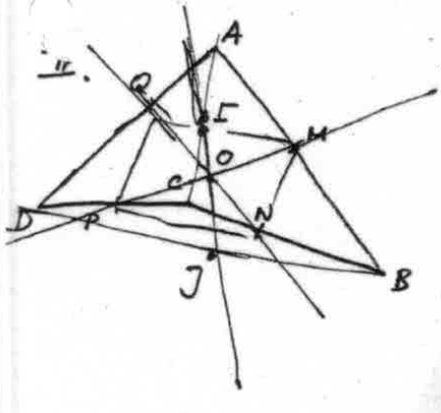
2) réciproque aussi Thalès

d médiane issue de A ⇔ $\overline{BD} = \overline{CE}$.

" ⇒ " Supposons que d soit la médiane issue de A. On a alors :
~~CB~~ $\overline{NE} = \overline{ND}$, $\overline{CH} = \overline{BH}$ et
les triangles ΔBDH et ΔCEH sont isométriques. d'où
$\overline{BD} = \overline{CE}$.

" ⇐ " Supposons que $\overline{BD} = \overline{CE}$, alors les
Δ ~~BDN~~ BDN et Δ CDN sont isométriques. D'où $\overline{BN} = \overline{CN}$ et passe par A
Donc la droite coupe [BC] en son milieu ✓. Donc il s'agit de la médiane issue de A.

II.



1) $\overrightarrow{QH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{QH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$2\overrightarrow{QH} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{DB}$

D'où $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QH}$ ⇔ MNPQ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{IO} = k\overrightarrow{IJ}$

2) Le point d'intersection de (MP) et (NQ) est le point O milieu du ~~#~~ MNPQ
Notons I = mil de [AC] et J = mil [DB]. Prouvons que O ∈ (IJ).
D'après Thalès on a $\overrightarrow{QH} \parallel \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{PN} \parallel \overrightarrow{DB}$ De plus $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QH}$.

~~$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OJ}$~~

~~$\vec{OI} = \vec{OH} + \vec{HI}$~~

~~$\vec{OJ} = \frac{1}{2}\vec{DB}$~~

~~$\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{IO}$~~

$\vec{OI} = \vec{OH} + \vec{HA} + \vec{AI}$

$\vec{OJ} = \vec{ON} + \vec{NB} + \vec{BJ}$

$\vec{OI} + \vec{OJ} = \vec{OH} + \vec{ON} + \vec{HA} + \vec{NB} + \vec{AI} + \vec{BJ}$

$\vec{OI} = \vec{OH} + \vec{HA} + \vec{AI}$

$\vec{OJ} = \vec{OP} + \vec{PD} + \vec{DJ}$

$\vec{OI} + \vec{OJ} = \vec{O} + \vec{HA} + \vec{PD} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB}$

$= \vec{HI} + \vec{IA} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB}$ $\quad \vec{PD}$

$= \vec{HI} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB} + \vec{PD}$

$= \vec{HI} + \frac{1}{2}\vec{DB} + \vec{PJ} + \frac{1}{2}\vec{BD}$

$= \vec{HI} + \vec{PJ}$ $\quad HJ + JI$ $\quad PI \; IJ$

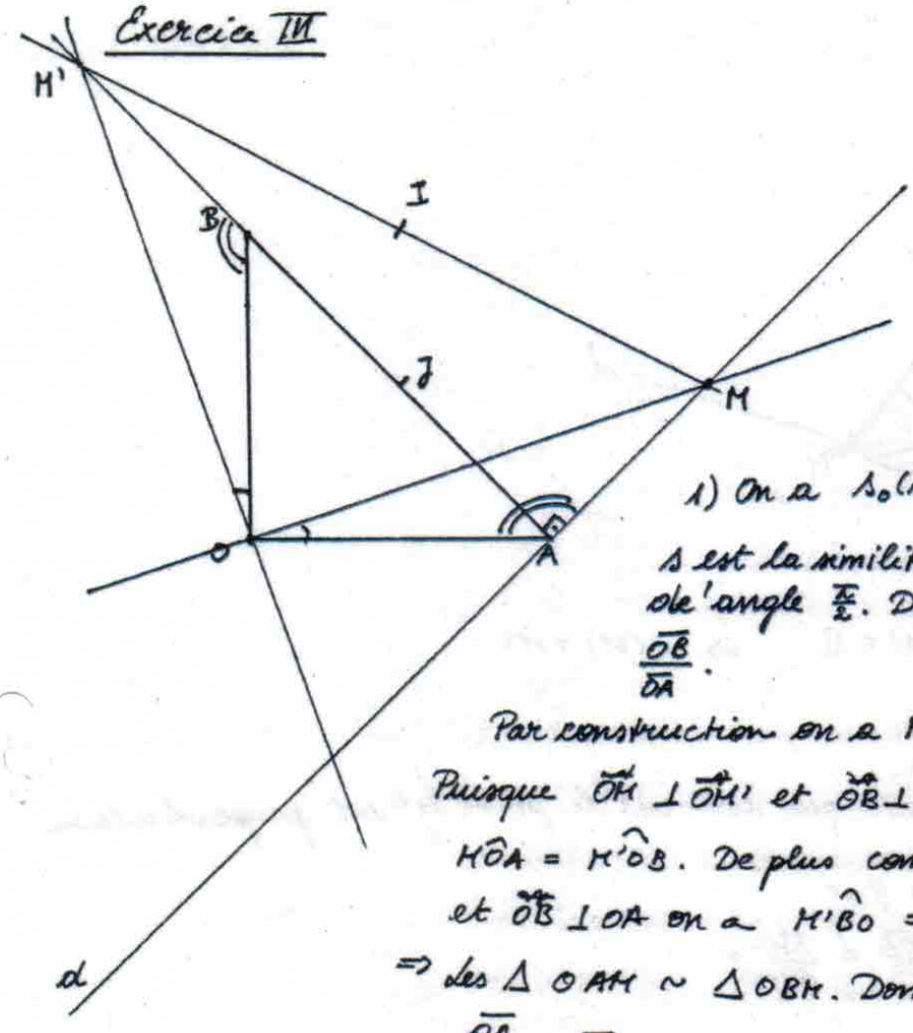
$= \vec{HJ} + \vec{JI} + \vec{PI} + \vec{IJ}$

$= \vec{HN} + \frac{1}{2}\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{BD} + \vec{PQ} + \frac{1}{2}\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$= \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{BD} + \vec{DA})$

$= \frac{1}{2}\vec{CA}$

Exercice III



1) On a $S_o(A) = B$

S est la similitude de centre O et de l'angle $\frac{\pi}{2}$. De plus son rapport est $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$.

Par construction on a $H\hat{O}H' = \frac{\pi}{2}$. (1)

Puisque $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{OH'}$ et $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA}$ on a $H\hat{O}A = H'\hat{O}B$. De plus comme $HA \perp H'B$ et $\overrightarrow{OB} \perp OA$ on a $H'\hat{B}O = H\hat{A}O$.

$\Rightarrow$ Les $\Delta\, OAH \sim \Delta\, OBH$. Donc

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OH'}} \quad (2)$$

Avec (1) et (2) $\Rightarrow$ $S(H) = H'$.

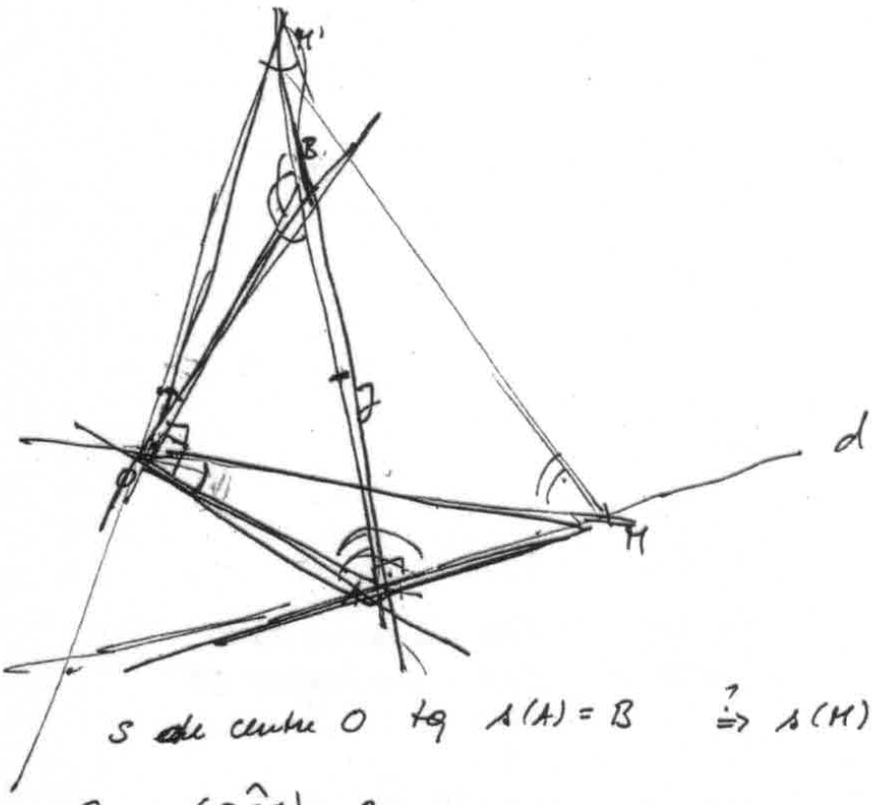
2) a) $\Delta OHH' \sim \Delta OAB$?

On sait déjà que $H\hat{O}H' = A\hat{O}B$

b) $S_o(H) = I$

$(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OI})$

III.



S de centre O tq $s(A) = B \overset{?}{\Rightarrow} s(H) = H'$

On a $(B\hat{O}A) = 90°$

On sait deja que la droite qui contient le point H' est perpendiculaire à AB. D'où $(H'OH) = 90°$.

Regardons les rapports $\frac{OA}{OB} \overset{?}{=} \frac{OH}{OH'}$?

~~Les $\triangle HOH'$ et $\triangle AOB$~~

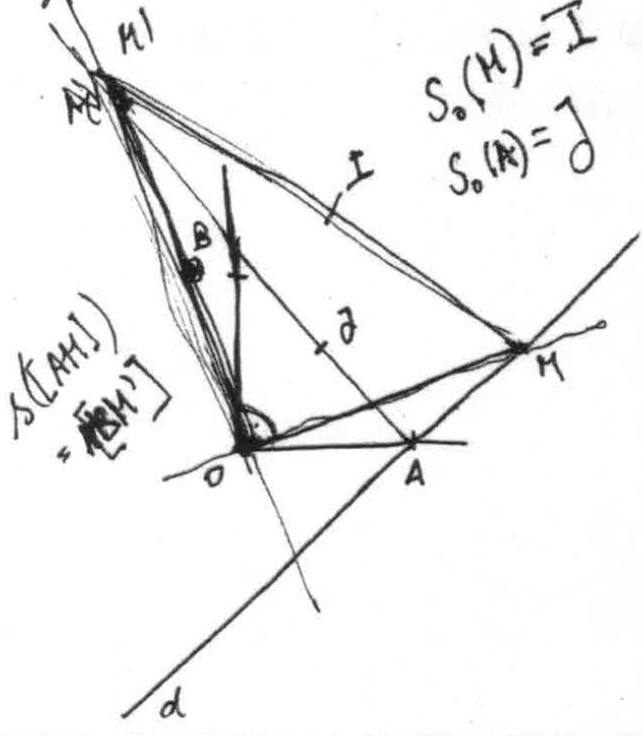
AOH et BOH'

Puisque $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{OH'}$ et $OA \perp OB$ on a $A\hat{O}H = B\hat{O}H'$

$H\hat{A}O = H'\hat{B}O$ $\Delta\sim \Rightarrow \frac{HO}{H'O} = \frac{AO}{BO}$ D'où $s(H) = H'$

2) On a déjà $\hat{O} = 90°$ dans les deux triangles.

$S(A) = B$
$S(H) = H'$
$S(O) = O$



2) Equation de la droite

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont des droites du plan.

Donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$-x + 2y - z + d = 0$$

Comme $C \in d$ on a $-3 + d = 0$

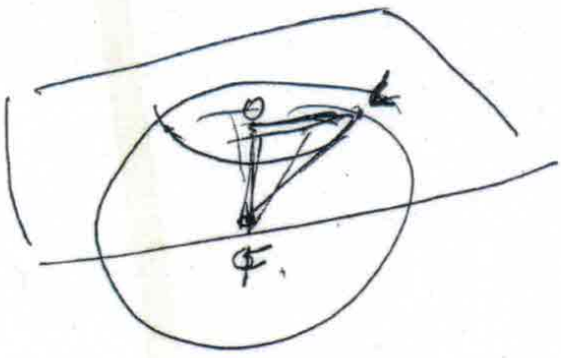
$d = 3$

$$\begin{cases} -x + 2y - z + 3 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 - 14 = 0 \end{cases}$$

→ droite normale

centre de la sphère

La droite normale au plan ABC et qui passe par Ω coupe le plan au centre du cercle $\mathcal{C}$.



$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t \end{cases}$$ F

$$-(-t+1) + 2(2t+2) - (-t) + 3 = 0$$

$$t - 1 + 4t + 4 + t + 3 = 0$$

$$6t + 6 = 0$$

$t = -1$ O centre de $\mathcal{C}$ $(0; 4; -1)$

$$\overline{OF}^2 = (1-0)^2 + (2-4)^2 + (0+1)^2$$

$$= 1 + 4 + 1 = 6$$

$$(F, \mathcal{C})^2 = 14 = \overline{FL}^2$$

Le triangle FOL est rectangle en O → thm Pythagore

$$\overline{FL}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OL}^2$$

$$14 - 6 = \overline{OL}^2 \qquad \overline{OL} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 16 novembre 2004

15H00 – 18H00

I. Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que $\overline{AB} = \overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{CD} = a$.

Soient I et J les milieux respectifs de [AD] et [CD].

K, L et M sont définis par $3\cdot\overline{AK} = \overline{AB}$, $\overline{DL} = 2\cdot\overline{LC}$ et $\overline{BM} = 4\cdot\overline{MC}$

1) Montrer que K est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).
2) G est le barycentre des points pondérés (A,2), (B,1), (C,4) et (D,2).
   Montrer que KL et MI sont sécantes en G.
3) F et H sont définis par $\overline{DF} = \frac{1}{3}\overline{DB}$ et $\overline{AH} = 2\cdot\overline{HC}$.
   Montrer que les points F, G et H sont alignés.
4) Chercher l'ensemble des points P du plan tels que $\overline{PD}^2 + 2\cdot\overline{PB}^2 - 2\cdot\overline{PA}^2 = 2a^2$

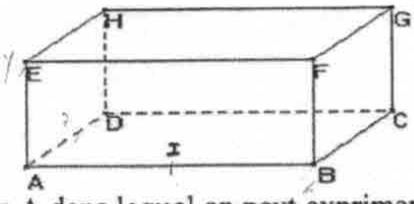
(6 points)

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
Soit f la transformation qui au point M(x,y) d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-i)z - 1 + i$ et soit g la transformation qui au point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = y \end{cases}$

1) Chercher le point invariant et caractériser la transformation f.
2) (H') est l'image par f de l'hyperbole (H) d'équation $xy + x + y = 0$.
   Chercher l'équation de (H') et indiquer les éléments caractéristiques de cette courbe.
3) (C') est l'image par gof du cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = 6$.
   Chercher l'équation de (C') et indiquer les éléments caractéristiques de cette courbe.

(5 points)

III. On donne un parallélépipède rectangle ABCDEFGH avec $\overline{AB} = 2$ et $\overline{BC} = \overline{GC} = 1$. Le point I est le milieu du côté [AB].



1) Trouver un repère orthonormal d'origine A dans lequel on peut exprimer facilement les coordonnées des sommets du parallélépipède.
2) Calculer la distance du point G au plan IFH.
3) Calculer la distance du point G à la droite IH. Le projeté orthogonal de G sur le plan IFH appartient-il à IH ?

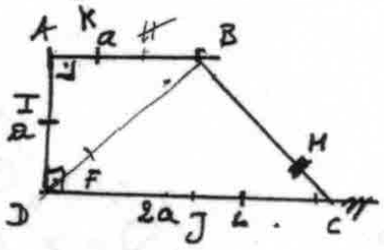
(5 points)

IV. Démontrer qu'une symétrie centrale commute avec une symétrie orthogonale si et seulement si son centre appartient à l'axe de cette symétrie orthogonale.

(4 points)

Concours de géométrie du 16 novembre 2004

I.



$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AD}$
$\vec{DJ} = \frac{1}{2}\vec{DC}$
$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}$
$\vec{DL} = 2\vec{LC}$
$\vec{DL} = \frac{2}{3}\vec{DC}$
$\vec{BH} = 4\vec{HC}$
$\vec{BH} = \frac{BH}{5}\vec{HC}$

1) K est barycentre de (A,2) et (B,1) $\Leftrightarrow 2\vec{KA} + \vec{KB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\vec{AK} + \vec{KA} + \vec{AB} = 0$

$\Leftrightarrow -3\vec{AK} + \vec{AB} = 0$

$\Leftrightarrow -3\frac{1}{3}\vec{AB} + \vec{AB} = 0$

$\Leftrightarrow -\vec{AB} + \vec{AB} = 0$ toujours vrai!

2) G est barycentre des points (A,2), (B,1), (C;4) et (D,2)
$\underbrace{\qquad\qquad}_{(K,3)}$

$\Leftrightarrow 2\vec{GA} + \vec{GB} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

KL et MI sécantes en G.

$\Leftrightarrow 3\vec{GK} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = 0$

trop long $\Leftrightarrow 3\vec{GK} + 4\vec{GK} + 4\vec{KC} + 2\vec{GK} + 2\vec{KD} = 0$

$\Leftrightarrow 9\vec{GK} + 4\vec{KB} + 4\vec{BC} + 2\vec{KA} + 2\vec{AD} = 0$

$\Leftrightarrow 9\vec{GK} + 4\cdot\frac{2}{3}\vec{AB} + 2\cdot\frac{1}{3}\vec{BA} + 4\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} +$

KL

L

(C, a) (B, k)

$a\vec{MC} + k\vec{MB} = (a+k)\vec{ML}$

)

$3\vec{GK} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD}$

Comme $\vec{DL} = \frac{2}{3}2\vec{LC}$ on a $2\vec{LC} + \vec{LD} = 0$

$4\vec{LC} + 2\vec{LD} = 0$

→ L barycentre de (C;4) et (D;2)

D'où

$3\vec{GK} + 6\vec{GL} = \vec{0}$

$\vec{GK} + 2\vec{GL} = 0$ Donc $G \in (KL)$. (1)

$2\vec{GA} + \underbrace{\vec{GB} + 4\vec{GC}}_{=5\vec{GH}} + 2\vec{GD} = 0$

Puisque $\vec{BH} = 4\vec{HC}$ on a $4\vec{HC} + \vec{HB} = 0$ → H barycentre de (C,4) et (B,1)

$2(\vec{GA} + \vec{GD}) + 5\vec{GH} = \vec{0}$

Puisque I = mil [AD] I est barycentre de (A;1), (D;1) d'où:

$2\vec{GI} + 5\vec{GH} = \vec{0}$. Donc $G \in (HI)$ (2)

(1) et (2) → KL et MI sont sécantes en G.

3) $\vec{DF} = \frac{1}{3}\vec{DB}$ et $\vec{AH} = 2\vec{HC}$.

F, G et H :

$2\vec{GA} + \vec{GB} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

$2\vec{GH} + 2\vec{HA} + \vec{GB} + 4\vec{GH} + 4\vec{HC} + 2\vec{GB} + 2\vec{DB}\ \vec{BD} = 0$

$6\vec{GH} + 3\vec{GB} + 2\vec{HA} + 4\vec{HC} + 2\vec{BD} = 0$

$6\vec{GH} + 3\vec{GD} + 3\vec{DB} + 2\vec{HA} + 4\vec{HC} + 2\vec{BD} = 0$

$6\vec{GH} + \vec{DB} + 3\vec{GD} - 2\vec{HC} + 4\vec{HC} = 0$

$6\vec{GH} + \vec{DB} + 3\vec{GD} + 2\vec{HC} = 0$

$2\vec{GA} + \vec{GB} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

$2\vec{GA} + \vec{GD} + \vec{DB} + 4\vec{GH} + 4\vec{HC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

$2\vec{GA} + 3\vec{GD} + 3\vec{DF} + 4\vec{GH} + 2\vec{AH} = \vec{0}$

$2\vec{GH} + 3\vec{GF} + 4\vec{GA} = \vec{0}$

$6\vec{GH} + 3\vec{GF} = \vec{0}$

F, G et H sont alignés

4) $\vec{PD}^2 + 2\vec{PB}^2 - 2\vec{PA}^2 = 2a^2$

$(\vec{PA} + \vec{AD})^2 + 2(\vec{PA} + \vec{AB})^2 - 2\vec{PA}^2 = 2a^2$

$\vec{PA}^2 + 2\vec{PA}\cdot\vec{AD} + \vec{AD}^2 + 2\vec{PA}^2 + 4\vec{PA}\cdot\vec{AB} + \vec{AB}^2 - 2\vec{PA}^2 = 2a^2$

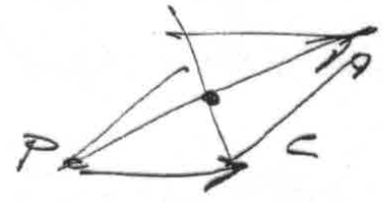
$\vec{PA}^2 + 2\vec{PA}(\underbrace{\vec{AD} + 2\vec{AB}}_{=\vec{AC}}) + a^2 = 2a^2$

$\vec{PA}(\vec{PA} + 2\vec{AD} + 4\vec{AB}) = 2a^2$

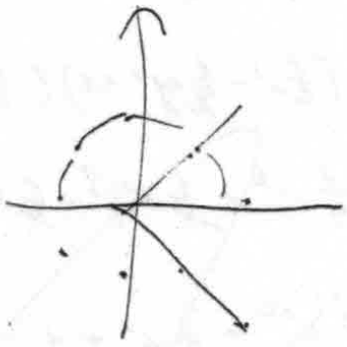
$\vec{PA}(\vec{PA}^2 + 2\vec{PA}\cdot\vec{AC} = a^2$

$\vec{PA}(\vec{PA} + 2\vec{AC}) = a^2$

$\vec{PA}(\vec{PC} + \vec{AC}) = a^2$



II. $z' = (1-i)z - 1 + i$. $g(M) = \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = y \end{cases}$



1) $z \in inv(f) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{P} \mid f(z) = z)$

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $z = (1-i)z - 1 + i$

$\Leftrightarrow$ $z(1-1+i)z = -1+i$

$\Leftrightarrow$ $iz = -1+i$ $\quad | \cdot(-i)$

$\Leftrightarrow$ $z = i + 1$

angle de rotation de f = $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

"apport de f = $\|1-i\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ (directe / indirecte ?)

Donc f est la similitude $S(\Omega, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ avec $\Omega(1+i)$

2) $H: xy + x + y = 0$

on a $x' = 2x - 1 \hookrightarrow x = \frac{x'+1}{2}$

$y' = y \qquad y = y'$

$\Leftrightarrow \frac{x'+1}{2} \cdot y' + \frac{x'+1}{2} + y' = 0$ par 2 !

$x'y' + y' + x' + 1 + 2y' = 0$

$x'y' + x' + 3y' + 1 = 0$

$x' + iy' = (1-i)(x + iy) - 1 + i$

$x' + iy' = x - ix + iy + y - 1 + i$

$x' + iy' = (x + y - 1) + i(-x + y + 1)$

$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = 2y \\ x' - y' = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x'+y'}{2} \\ x = \frac{x' - y' + 2}{2} \end{cases}$

$H: \quad xy + x + y = 0$

$H': \quad \left(\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 1\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 1 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' = 0$

$= \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}y'^2 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + x' + 1 = 0$

$= \frac{1}{4}x'^2 + \frac{3}{2}x' + 1 - \frac{1}{4}y'^2 + \frac{1}{2}y' = 0$

$= \frac{1}{4}(x'^2 + 6x' + 9) - \frac{9}{4} - \frac{1}{4}(y'^2 - 2y' + 1) + 4 + 1 = 0$

$= \frac{(x'+3)^2}{4} - \frac{(y'-1)^2}{4} + 5 - \frac{9}{4} - 1 = 0$

$= \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}y'^2 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + x' + 1 = 0$

$x^2 + y^2 = 6$

3) $g \circ f(C) = C' \quad$ et $C: x^2 + y^2 = 6$

$g(f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})) = g\begin{pmatrix} x+y-1 \\ -x+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y-2-1 \\ -x+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y-3 \\ -x+y+1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x' = 2x + 2y - 3 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x + 2y - 3 & (1) \\ 2y' = -2x + 2y + 2 & (2) \end{cases}$

$(1) + (2) \quad x' + 2y' = 4y - 1 \iff y = \frac{x' + 2y' + 1}{4}$

$(1) - (2) \quad x' - 2y' = 4x - 5 \iff x = \frac{x' - 2y + 5}{4}$

$\left(\frac{x' + 2y' + 1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x' - 2y' + 5}{4}\right)^2 = 6$

$x'^2 + 4y'^2 + 1 + 4x'y' + 2x' + 4y' + x'^2 + 4y'^2 + 25 - 4x'y' + 10x' - 20y' = 16 \cdot 6$

$2x'^2 + 12x' + 8y'^2 - 16y' + 26 = 16 \cdot 6$

$2(x'^2 + 6x' + 9) + 8(y'^2 - 2y' + 1) + 26 - 18 - 8 = 16 \cdot 6$

$2(x'+3)^2 + 8(y'-1)^2 = 96$

$\frac{(x'+3)^2}{4} + (y'-1)^2 = 12 \qquad \frac{(x'+3)^2}{48} + \frac{(y'-1)^2}{12} = 1$

Nicolas

$20 - \sqrt{3}$

X élément caractéristique

III.

1) On pose le repère orthonormal $(A; \vec{AI}; \vec{AE}; \vec{AD})$

On a alors les coordonnées suivantes:

$A(0;0;0)$	$D(0;0;1)$	$G(2;1;1)$
$B(2;0;0)$	$E(0;1;0)$	$H(0;1;1)$
$C(2;1;0)$	$F(2;1;0)$	$I(1;0;0)$

2) On sait que $d(G; \mathcal{P}_{IFH}) = \dfrac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_{IFH}$ et $ax+by+cz+d$ est l'équation du plan $\mathcal{P}_{IFH}$.

Comme $\vec{IF}$ et $\vec{FH} \in \mathcal{P}_{IFH}$

$\vec{IF} \wedge \vec{FH}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_{IFH}$:

$$\vec{IF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{FH}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{IF} \wedge \vec{FH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}_{IFH} = x - y + 2z + d = 0$

Puisque $I \in \mathcal{P}_{IFH}$ il vérifie son équation:

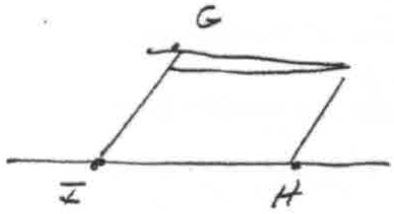
$$1 - 0 + 2 \cdot 0 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = -1$$

Donc $\mathcal{P}_{IFH}$: $x - y + 2z - 1 = 0$ et $\vec{n} = (1; -1; 2)$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(G, \mathcal{P}_{IFH}) = \frac{|2 - 1 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3) $d(G;(IH)) = \dfrac{\| \vec{IH} \wedge \vec{IG} \|}{\| \vec{IH} \|}$



$\vec{IH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{IG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{IH} \wedge \vec{IG} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\| \vec{IH} \wedge \vec{IG} \| = \sqrt{2^2+2^2}$

$= \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

et $\| \vec{IH} \| = \sqrt{3}$ d'où $d(G;(IH)) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

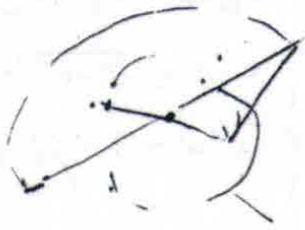
Le projeté orthogonal de G sur le plan IFH $\notin$ IH,

car $d(G;\mathcal{P}) \neq d(G,HI)$

$d(G;\mathcal{P}) = \frac{1}{2}\, d(G;HI)$.

IV. $s_C \circ s = s \circ s_C \Leftrightarrow C \in \Delta$

Une symétrie centrale est une rotation d'angle π.



$s_C \circ s_\Delta = s_\Delta \circ s_C \Leftrightarrow C \in \Delta$

"$\Rightarrow$" Supposons que $r_{C,\pi} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ r_{C,\pi}$

Notons $C' = s_\Delta(C)$ et $C'' = r_{C,\pi}(C')$ et $C_1 = s_\Delta(C)$

on a $\Leftrightarrow r_{C,\pi} \circ s_\Delta(C) = s_\Delta(C)$

$\Leftrightarrow r_{C,\pi}(C') = C'$

$\Leftrightarrow$ C' est un point fixe pour $r_{C,\pi} \Rightarrow C' = C$

Donc $C = C' = s_\Delta(C) \Rightarrow C \in \Delta$.

"$\Leftarrow$" Supposons que $C \in \Delta$

alors $r_{C,\pi} \circ s_\Delta(C) = r_{C,\pi}(C) = C$

et $s_\Delta \circ r_{C,\pi}(C) = s_\Delta(C) = C$ car $C \in \Delta$.

Prenons un point différent de C : soit $M \in \mathcal{P}$ (plan)



Notons $M' = s_\Delta(M)$ et $M'' = r_{\pi,C}(M')$

$M_1 = r_{\pi,C}(M)$ et $M_2 = s_\Delta(M_1)$

Puisque $M' = s_\Delta(M)$ on a $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM}$

et $M'' = r_{\pi,C}(M')$ on a $\overrightarrow{CM''} = -\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{CM}$

De plus comme $M_1 = r_{\pi,C}(M)$ on a $\overrightarrow{CM_1} = -\overrightarrow{CM}$

et $M_2 = s_\Delta(M_1)$ on a $\overrightarrow{CM_2} = -\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CM}$

$$\begin{cases} (\alpha - x)^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + (\sqrt{25-\alpha^2} - y)^2 = 16 \\ -x(\alpha - x) - y(\sqrt{25-\alpha^2} - y) = 0 \end{cases} \quad \alpha \in [0,5]$$

$\vec{AB} \odot \vec{AC}$:

$$\begin{cases} x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 2y\sqrt{25-\alpha^2} + 25 - \alpha^2 = 16 \end{cases} \quad | -$$

$16 - 25 = -9$

$$2\alpha^2 - 2\alpha x + 2y\sqrt{25-\alpha^2} = 18$$

$(x,y) \xmapsto{t} (x+y-1, 1-x+y) = (x', y') \xmapsto{s} (2x'-1, y')$

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 20$$

$$x^2 + y^2 = 6$$

$$\left[\frac{(x'-y'+2)}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 24$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 10 \quad +1$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 12$$

$$(x'-y'+2)^2 + (x'+y')^2 = 48$$

$$x'^2 + 4 + y'^2 + 4x' - 4y' + x'^2 + y'^2 + 2x'y' = 48$$

$$2x'^2 + 2y'^2 - 2x'y' + 2x' - 2y' = 44$$

$$x'^2 + y'^2 - x'y' + x' - y' = 22$$

$$+\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 - x'y' = 22$$

$$\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 = 12 \quad \longmapsto \quad 2x' - 1, y'$$

$$\left(\frac{x'}{2} + 1\right)^2 + \left(y' - 1\right)^2 = 12$$

$$\left(\frac{x'}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + (y'-1)^2 = 12$$

$$\left(\frac{x''+1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y'' - \frac{1}{2}\right)^2 = 12$$

$x'' = 2x' - 1 \quad y'' = y'$

$\Rightarrow x' = \frac{x''+1}{2}$

$$\left(\frac{x''}{2} + 1\right)^2 + \left(y'' - \frac{1}{2}\right)^2 = 12$$

$$\frac{(x''+2)^2}{2^2} + \frac{\left(y'' - \frac{1}{2}\right)^2}{1} = 12$$

$$\frac{(x'+3)^2}{4} + (y'-1)^2 = 12$$

ellipse ?

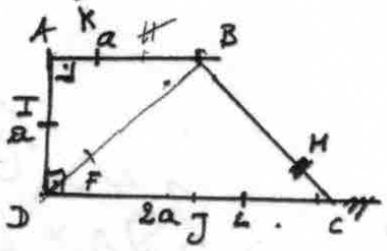
FAUX

Vrai

Mais mieux

Concours de géométrie du 16 novembre 2004

I.



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{DL} = 2\overrightarrow{LC}$
$\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BH} = 4\overrightarrow{HC}$
$\overrightarrow{BH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{HC}$

1) K est barycentre de (A,2) et (B,1) $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow -3\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 0$ toujours vrai!

2) G est barycentre des points (A,2), (B,1), (C;4) et (D,2) $\underbrace{\qquad}_{(K,3)}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

KL et MI sécantes en G.

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GK} + 4\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = 0$

trop long $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GK} + 4\overrightarrow{GK} + 4\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{KD} = 0$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{GK} + 4\overrightarrow{KB} + 4\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AD} = 0$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{GK} + 4\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 2\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} +$

KL

L

(C, a) (B, k)

$a\overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{MB} = (a+k)\overrightarrow{ML}$

$3\overrightarrow{GK} + 4\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD}$

Comme $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}2\overrightarrow{LC}$ on a $2\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = 0$

$4\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = 0$

→ L barycentre de (C;4) et (D;2)

D'où

$3\overrightarrow{GK} + 6\overrightarrow{GL} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GK} + 2\overrightarrow{GL} = 0$ Donc $G \in (KL)$. (1)

$2\overrightarrow{GA} + \underbrace{\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD}}_{=5\overrightarrow{GH}} = 0$

Puisque $\overrightarrow{BH} = 4\overrightarrow{HC}$ on a $4\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} = 0$ → H barycentre de (C,4) et (B,1)

$2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}) + 5\overrightarrow{GH} = \vec{0}$

Puisque I = mil [AD] I est barycentre de (A;1), (D;1) d'où:

$2\overrightarrow{GI} + 5\overrightarrow{GH} = \vec{0}$. Donc $G \in (HI)$ (2)

(1) et (2) ⇒ KL et MI sont sécantes en G.

3) $\vec{DF} = \frac{1}{3}\vec{DB}$ et $\vec{AH} = 2\vec{HC}$.

F, G et H :

$2\vec{GA} + \vec{GB} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

$2\vec{GH} + 2\vec{HA} + \vec{GB} + 4\vec{GH} + 4\vec{HC} + 2\vec{GB} + 2\vec{BD} = 0$

$6\vec{GH} + 3\vec{GB} + 2\vec{HA} + 4\vec{HC} + 2\vec{BD} = 0$

$6\vec{GH} + 3\vec{GD} + 3\vec{DB} + 2\vec{HA} + 4\vec{HC} + 2\vec{BD} = 0$

$6\vec{GH} + \vec{DB} + 3\vec{GD} - 2\vec{HC} + 4\vec{HC} = 0$

$6\vec{GH} + \vec{DB} + 3\vec{GD} + 2\vec{HC} = 0$

$2\vec{GA} + 2\vec{GB} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

$2\vec{GA} + \vec{GD} + \vec{DB} + 4\vec{GH} + 4\vec{HC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$

$2\vec{GA} + 3\vec{GD} + 3\vec{DF} + 4\vec{GH} + 2\vec{AH} = \vec{0}$

$2\vec{GH} + 3\vec{GF} + 4\vec{GA} = \vec{0}$

$6\vec{GH} + 3\vec{GF} = \vec{0}$

F, G et H sont alignés

4) $\vec{PD}^2 + 2\vec{PB}^2 - 2\vec{PA}^2 = 2a^2$

$(\vec{PA} + \vec{AD})^2 + 2(\vec{PA} + \vec{AB})^2 - 2\vec{PA}^2 = 2a^2$

$\vec{PA}^2 + 2\vec{PA}\cdot\vec{AD} + \vec{AD}^2 + 2\vec{PA}^2 + 4\vec{PA}\cdot\vec{AB} + \vec{AB}^2 - 2\vec{PA}^2 = 2a^2$

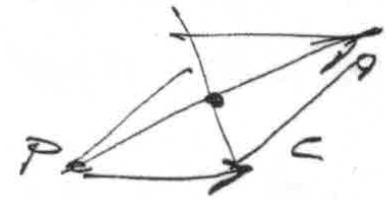
$\vec{PA}^2 + 2\vec{PA}(\underbrace{\vec{AD} + 2\vec{AB}}_{=\vec{AC}}) + a^2 = 2a^2$

$\vec{PA}(\vec{PA} + 2\vec{AD} + 4\vec{AB}) = 2a^2$

$\vec{PA}(\vec{PA}^2 + 2\vec{PA}\cdot\vec{AC} = a^2$

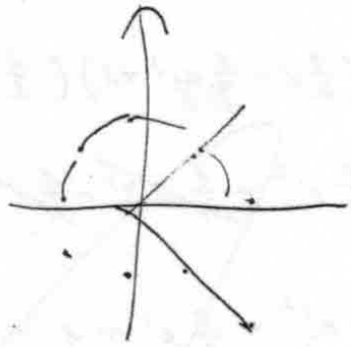
$\vec{PA}(\vec{PA} + 2\vec{AC}) = a^2$

$\vec{PA}(\vec{PC} + \vec{AC}) = a^2$



A •

II. $z' = (1-i)z - 1 + i$. $\quad g(M) = \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = y \end{cases}$



1) $z \in inv(f) \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{P} \mid f(z) = z)$

$\Leftrightarrow \quad (\Leftrightarrow \quad z = (1-i)z - 1 + i$

$\Leftrightarrow \quad z(1-1+i)z = -1+i$

$\Leftrightarrow \quad iz = -1+i \qquad | \cdot (-i)$

$\Leftrightarrow \quad z = i + 1$

angle de rotation de f = $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

(directe / indirecte ?)

rapport de $f = \|1-i\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc f est la similitude $S(\Omega, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ avec $\Omega(1+i)$

2) $H: xy + x + y = 0$

on a $\quad x' = 2x - 1 \hookrightarrow x = \frac{x'+1}{2}$

$y' = y \qquad y = y'$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x'+1}{2} \cdot y' + \frac{x'+1}{2} + y' = 0$

$x'y' + y' + x' + 1 + 2y' = 0$

$x'y' + x' + 3y' + 1 = 0$

par g !

$x' + iy' = (1-i)(x^2 + iy) - 1 + i$

$x' + iy' = x - ix + iy + y - 1 + i$

$x' + iy' = (x + y - 1) + i(-x + y + 1)$

$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' = 2y \\ x' - y' = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x'+y'}{2} \\ x = \frac{x' - y' + 2}{2} \end{cases}$

$H: \quad xy + x + y = 0$

$H': \quad \left(\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 1\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 1 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' = 0$

$= \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}y'^2 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + x' + 1 = 0$

$= \frac{1}{4}x'^2 + \frac{3}{2}x' + 1 - \frac{1}{4}y' + \frac{1}{2}y' = 0$

$= \frac{1}{4}(x'^2 + 6x' + 9) - \frac{9}{4} - \frac{1}{4}(y'^2 - 2y' + 1) + 4 + 1 = 0$

Mieux

$= \frac{(x'+3)^2}{4} - \frac{(y'-1)^2}{4} + 5 - \frac{9}{4} = 0$ b

$20 - \sqrt{3}$

$= \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}x'y' - \frac{1}{4}y'^2 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + x' + 1 = 0$

$x^2 + y^2 = 6$

3) $g \circ f(C) = C' \quad$ et $C: x^2 + y^2 = 6$

X élément caractéristique

$g(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = g\begin{pmatrix} x+y-1 \\ -x+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y-2-1 \\ -x+y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y-3 \\ -x+y+1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x' = 2x + 2y - 3 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x + 2y - 3 & (1) \\ 2y' = -2x + 2y + 2 & (2) \end{cases}$

(1) + (2) $\quad x' + 2y' = 4y - 1 \iff y = \frac{x' + 2y' + 1}{4}$

(1) − (2) $\quad x' - 2y' = 4x - 5 \iff x = \frac{x' - 2y + 5}{4}$

$\left(\frac{x' + 2y' + 1}{4}\right)^2 + \left(\frac{x' - 2y' + 5}{4}\right)^2 = 6$

$x'^2 + 4y'^2 + 1 + 4x'y' + 2x' + 4y' + x'^2 + 4y'^2 + 25 - 4x'y' + 10x' - 20y' = 16 \cdot 6$

$2x'^2 + 12x' + 8y'^2 - 16y' + 26 = 16 \cdot 6$

$2(x'^2 + 6x' + 9) + 8(y'^2 - 2y' + 1) + 26 - 18 - 8 = 16 \cdot 6$

$2(x'+3)^2 + 8(y'-1)^2 = 96$

$\frac{(x'+3)^2}{4} + (y'-1)^2 = 12 \qquad \frac{(x'+3)^2}{48} + \frac{(y'-1)^2}{12} = 1$

III.

1) On pose le repère orthonormal $(A; \vec{AI}; \vec{AE}; \vec{AD})$

On a alors les coordonnées suivantes:

$A(0;0;0)$ $D(0;0;1)$ $G(2;1;1)$

$B(2;0;0)$ $E(0;1;0)$ $H(0;1;1)$

$C(2;1;0)$ $F(2;1;0)$ $I(1;0;0)$

2) On sait que $d(G; \mathcal{P}_{IFH}) = \dfrac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_{IFH}$ et $ax+by+cz+d$ est l'équation du plan $\mathcal{P}_{IFH}$.

Soient $\vec{IF}$ et $\vec{FH} \in \mathcal{P}_{IFH}$

$\vec{IF} \wedge \vec{FH}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_{IFH}$:

$$\vec{IF}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{FH}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{IF} \wedge \vec{FH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{P}_{IFH} = x - y + 2z + d = 0$

Puisque $I \in \mathcal{P}_{IFH}$ il vérifie son équation:

$1 - 0 + 2 \cdot 0 + d = 0$

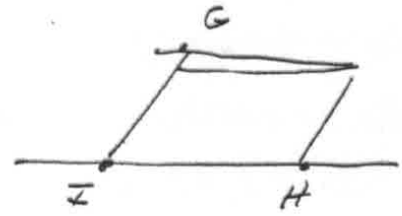
$\Leftrightarrow d = -1$

Donc $\mathcal{P}_{IFH}$: $x - y + 2z - 1 = 0$ et $\vec{n} = (1; -1; 2)$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(G, \mathcal{P}_{IFH}) = \frac{|2 - 1 + 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3) $d(G;(IH)) = \dfrac{\| \vec{IH} \wedge \vec{IG} \|}{\| \vec{IH} \|}$



$\vec{IH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{IG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{IH} \wedge \vec{IG} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\| \vec{IH} \wedge \vec{IG} \| = \sqrt{2^2+2^2}$

$= \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

et $\| \vec{IH} \| = \sqrt{3}$

d'où $d(G;(IH)) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

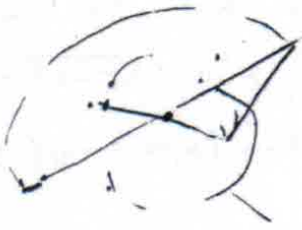
Le projeté orthogonal de G sur le plan IFH $\notin$ IH,

car $d(G;\mathcal{P}) \neq d(G,HI)$

$d(G;\mathcal{P}) = \frac{1}{2}\, d(G;HI)$.

IV. $s_C \circ s = s \circ s_C \Leftrightarrow C \in \Delta$

Une symétrie centrale est une rotation d'angle π.



$s_C \circ s_\Delta = s_\Delta \circ s_C \Leftrightarrow C \in \Delta$

"$\Rightarrow$" Supposons que $r_{C,\pi} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ r_{C,\pi}$

Notons $C' = s_\Delta(C)$ et $C'' = r_{C,\pi}(C')$ et $C_1 = s_\Delta(C)$

on a $\Leftrightarrow r_{C,\pi} \circ s_\Delta(C) = s_\Delta(C)$

$\Leftrightarrow r_{C,\pi}(C') = C'$

$\Leftrightarrow$ C' est un point fixe pour $r_{C,\pi} \Rightarrow C' = C$

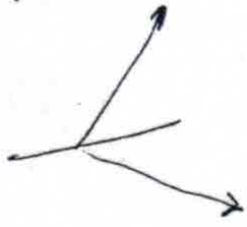
Donc $C = C' = s_\Delta(C) \Rightarrow C \in \Delta$.

"$\Leftarrow$" Supposons que $C \in \Delta$

alors $r_{C,\pi} \circ s_\Delta(C) = r_{C,\pi}(C) = C$

et $s_\Delta \circ r_{C,\pi}(C) = s_\Delta(C) = C$ car $C \in \Delta$.

Prenons un point différent de C : soit $M \in \mathcal{P}$ (plan)



Notons $M' = s_\Delta(M)$ et $M'' = r_{\pi,C}(M')$

$M_1 = r_{\pi,C}(M)$ et $M_2 = s_\Delta(M_1)$

Puisque $M' = s_\Delta(M)$ on a $\overrightarrow{CM'} = -\overrightarrow{CM}$

et $M'' = r_{\pi,C}(M')$ on a $\overrightarrow{CM''} = -\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{CM}$

De plus comme $M_1 = r_{\pi,C}(M)$ on a $\overrightarrow{CM_1} = -\overrightarrow{CM}$

et $M_2 = s_\Delta(M_1)$ on a $\overrightarrow{CM_2} = -\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CM}$

$$\begin{cases} (\alpha-x)^2+y^2=9 \\ x^2+(\sqrt{5-\alpha^2}-y)^2=16 \\ -x(\alpha-x)-y(\sqrt{5-\alpha^2}-y)=0 \end{cases} \quad \alpha\in[0,5]$$

$\vec{AB}$ ⊙ $\vec{AC}$:

$x^2+\alpha^2-2\alpha x+y^2=9$

$x^2+y^2-2y\sqrt{5-\alpha^2}+5-\alpha^2=16$ $\quad 16-11=5$

$2x^2-2\alpha x+2y\sqrt{5-\alpha^2}=18$

$(x,y)\xmapsto{t}(x+y-1,1-x+y)=(x',y')\xrightarrow{s}(2x'-1,y')$

$2x^2+2y^2+4x-4y=20$

$x^2+y^2=6$

$\left[\left(\frac{x'-y'+1}{2}\right)^2+\left(\frac{x'+y'}{2}\right)^2=6\right]\times 4$

$x^2+y^2+2x-2y=10$

$(x+1)^2+(y-1)^2=12$

$(x'-y'+1)^2+(x'+y')^2=24$

$x'^2+y'^2-x'y'+x'-y'=\frac{23}{2}$

$+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{23}{2}$

$\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{2}\right)^2=12 \longmapsto 2x'-1,y'$

$\left(\frac{x'}{2}+1\right)^2+(y'-1)^2$

$\left(\frac{x'}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+(y'-1)^2$

$\left(\frac{x''+1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y''-\frac{1}{2}\right)^2=12$

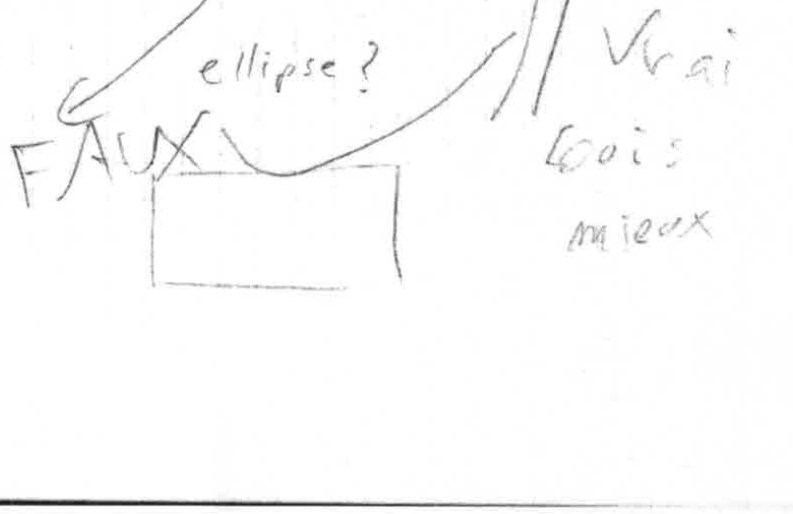
$x''=2x'-1 \quad y''=y'$

$\Rightarrow x'=\frac{x''+1}{2}$

$\left(\frac{x''}{2}+1\right)^2+\left(y''-\frac{1}{2}\right)^2=12$

$\frac{(x'+3)^2}{4}+(y'-1)^2=12$

$\frac{(x''+2)^2}{2^2}+\frac{\left(y''-\frac{1}{2}\right)^2}{1}=12$



Épreuve d'algèbre et de probabilités du 30 avril 2004

Question 1 :

a) $v_n = \dfrac{e^n + 2^n}{e^n - 2^n}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{n+1} + 2^{n+1}}{e^{n+1} - 2^{n+1}} - \frac{e^n - 2^n}{e^n + 2^n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(e^{n+1} + 2^{n+1})(e^n - 2^n) - (e^n + 2^n)(e^{n+1} - 2^{n+1})}{(e^{n+1} - 2^{n+1})(e^n - 2^n)}$$

$$= \frac{e^{2n+1} - 2^n e^{n+1} + 2^{n+1} e^n - 2^{2n+1} - (e^{2n+1} - 2^{n+1} e^n + 2^n e^{n+1} - 2^{2n+1})}{(e^{n+1} - 2^{n+1})(e^n - 2^n)}$$

$$= \frac{-2^{n+1} e^{n+1} + 2^{n+2} e^n}{(e^{n+1} - 2^{n+1})(e^n - 2^n)} \quad \text{(dénominateur } > 0\text{)}$$

$$= \frac{2^{n+1} e^n (-e + 2)}{\cdots} < 0$$

Donc $v_{n+1} < v_n$

$$= 2^{n+1} e^n (-e + 2)$$

$$\frac{e^n + 2^n}{e^n - 2^n} = \frac{(e^n + 2^n)^2}{\cdots} \quad \frac{e^n - 2^n}{e^n - 2^n} + \frac{2^{n+1}}{e^n - 2^n} \geq 1$$

$\to (v_n)$ convergente.

$e^n \geq 2^n$

$n \ln e \geq n \ln 2$

$\left(\frac{e}{2}\right)^n \quad \frac{e^n}{2^n} \geq 1$

$\left(\frac{e}{2}\right)^n \geq 1$

≥ 1

b) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{2 + u_n}$

1. On a $u_0 = 3$

$u_1 = \frac{11}{5}$

Supposons $u_n \geq 0$ alors : $u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{2 + u_n} \geq 0$

($3u_n \geq 0$, $2 + u_n \geq 2 > 0$)

D'où (u_n) est positive

2. $u_{n+1} - 2 = \frac{2+3u_n}{2+u_n} - 2 = \frac{2+3u_n - 4 - 2u_n}{2+u_n} = \frac{-2+u_n}{2+u_n}$

$= 1 - \frac{4}{2+u_n}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{2+3u_n}{2+u_n} - 3 = \frac{2+3u_n - 6 - 3u_n}{2+u_n} = \frac{-4}{2+u_n}$

u_n est une suite positive et $\forall n$ on a $u_n - 3 < 0$

D'où $u_n < 3$.

On a aussi $u_n - 2 > 0 \Rightarrow u_n > 2$

Donc $2 < u_n < 3$.

3) Notons ~~$f(x) = \frac{2+3x}{2+x}$~~

~~$f'(x) = \frac{3(2+x) - (2+3x)}{(2+x)^2} = \frac{6+3x-2-3x}{(2+x)^2} = \frac{4}{(2+x)^2} > 0$~~

~~Donc la suite (u_n) est croissante~~

$u_{n+1} - u_n = \ldots$

décroissante

c) $I_n = \int_0^n e^{-x} \sin^2(\pi x)\, dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} e^{-x} \sin^2(\pi x)\, dx - \int_0^n e^{-x} \sin^2(\pi x)\, dx$

$= \int_n^{n+1} e^{-x} \sin^2(\pi x)\, dx > 0$

$I_{n+1} > I_n \rightarrow$ croissante

$I_n = \int_0^{n+1} e^{-x} \sin^2(\pi x)\, dx \leq \int_0^{n+1} e^{-x}\, dx$

$= -e^{-x} \Big]_0^n$

$= +e^{-n}$

Comme $n \in \mathbb{N}$ $\leq +e^{-1} = +\frac{1}{e}$ ou 1.

Puisque la suite est croissante et majorée, elles est convergente.

Question 2

a) $(1+x)^n = 1 + C_n^{n-1} x + \underbrace{C_n^{n-2} x^2 + \dots + C_n^1 x^{n-1}}_{\geq 0} + x^n$

$= 1 + nx + \dots$

$\geq 1 + nx$

$\uparrow$
$x \geq 0$

b)



n boules numérotés
n boites 0 - n boules

P_n = chaque boîte 1 boule.

$= \dfrac{n! \cdot (n-1)(n-2)\dots}{n^n}$

c) $\dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \dfrac{n!}{n^n} \cdot \dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}$

$= \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n \ (n+1)} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

$= \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \dfrac{1}{n} = 2$

$P_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$P_{n-1} \geq 2 P_n \Rightarrow P_n \leq \dfrac{1}{2} P_{n-1} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} P_{n-2}\right) \leq \dots \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} P_1$

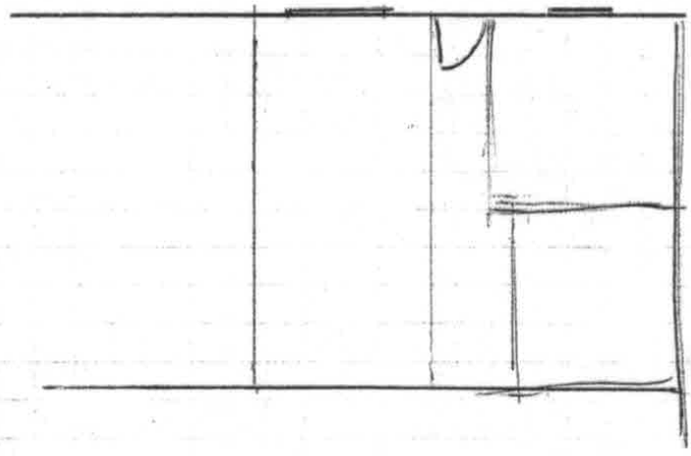
et $P_1 = \dfrac{1!}{1^1} \cdot 1$

D'où $P_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ##

Comme $P_n \geq 0$, et on a $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} P_n \leq \lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n-1}}$

$0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} P_n \leq 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0$.



Concours de recrutement

november 2004

Algèbre et Probabilités

I. Soit ABC un triangle tel que $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = \frac{4a}{3}$, $\overline{BC} = 2a$ où a est un réel strictement positif.

Soient K, L et M les milieux respectifs des côtés $\left[BC\right]$, $\left[AC\right]$ et $\left[AB\right]$ et soit D le point d'intersection des trois médianes.

1. Déterminer $sin\ \alpha$ et $cos\ \alpha$ où $\alpha = \widehat{BAC}$ et l'aire du triangle ABC.
   (Ne pas déterminer l'amplitude de $\widehat{BAC}$.)
2. Déterminer l'aire du triangle ABD.

II. On considère les suites (u_n) et (v_n) définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Montrer que

1. La suite (v_n) est décroissante.
2. Pour tout entier naturel non nul p et pour tout entier naturel non nul q on a: $u_p < v_q$.
3. La suite (u_n) ne tend pas vers $(+\infty)$.
4. Les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

III. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne l'application f de $\mathbb{C} - \{4\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe

$$f(z) = \frac{iz - 4}{z - 4}$$

On note A le point d'affixe 4. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(z)$ du plan distincts de A tel que $f(z)$ soit réel.

1. Déterminer et caractériser $\mathcal{C}$ par une méthode analytique.
2. Soit B le point d'affixe $(-4i)$.
   a) Démontrer que pour tout z différent de 4 , $f(z)$ est réel si et seulement si $\frac{z + 4i}{z - 4}$ est imaginaire pur.
   b) Déterminer $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$. En déduire la nature de $\mathcal{C}$ et ses caractéristiques.

IV. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. Dans U_1 se trouvent trois boules blanches et deux boules noires, dans U_2 se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne: on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. Soit E l'événement: parmi les quatre boules tirées il y a exactement deux boules blanches.
   Montrer que $p(E) = 0,46$.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Le joueur doit verser 2,5 euros avant d'effectuer le tirage. Il reçoit à l'issue du tirage 1 euro par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable?

V. Dans $\mathbb{C}$ on définit une loi de composition interne notée $*$ définie par:

$z * z' = xx' + i(xy' + yx')$ où $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, x', y, y' réels.

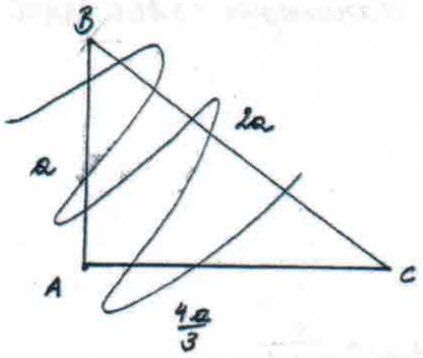
1. a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
   b) Démontrer que pour tout z et z' on a : $\overline{z * z'} = \overline{z} * \overline{z'}$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z * (2i) = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ sachant que le paramètre θ appartient à $[0; \pi[$:

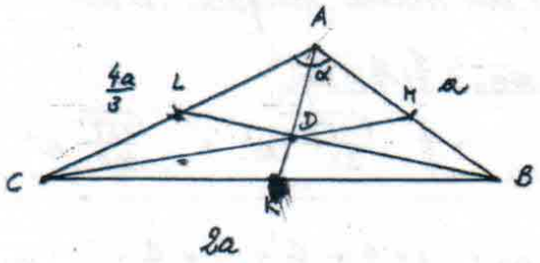
$$z * z + \left[2\sqrt{2}(cos\,\theta + i sin\,\theta)\right] * z + 1 + 2i sin 2\theta = 0$$

Répartition des points: 3 ; 5 ; 4 ; 4 ; 4

Épreuve d'Algèbre et de Probabilités 2004

I.





1. $\alpha = \widehat{BAC}$. D'après Al-Kashi :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{AC}\cdot\cos\alpha$$

$$2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$$

$$2a\cdot\frac{4a}{3}\cos\alpha = a^2 + \frac{16a^2}{9} - 4a^2$$

$$\frac{8a^2}{3}\cos\alpha = \frac{9a^2+16a^2-36a^2}{9}$$

$$\cos\alpha = \frac{-11a^2}{3\cancel{9}}\cdot\frac{3}{8a^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{-11}{24} \quad \rightarrow \alpha \simeq 117{,}28°$$

Comme $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{121}{576}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{455}{576}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{455}}{\cancel{576}\,24}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4a}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{455}}{24}$$

$$= \frac{\sqrt{455}}{\cancel{72}}\,a^2$$

2. Aire ABD

$\overline{AB} = a$ ...

Les médianes coupent le triangle en 3 triangles (ΔABD, ΔACD, ΔBCD) qui ont même surface. D'où:

$$\mathcal{A}_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{455}}{36}\,a^2 = \frac{\sqrt{455}}{108}\,a^2$$

II. $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ $\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

1. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \cdot n!}$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)\cdot(n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0$$

D'où $v_{n+1} \leq v_n$ $\forall n$, donc (v_n) est décroissante.

2. Pour $p \geq q$ on a:

$$v_q - u_p = u_q + \frac{1}{q \cdot q!} - u_p$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!} \geq 0$$

$v_q > u_p$.

Pour $p < q$ on a:

$$v_q - u_p = u_q + \frac{1}{q \cdot q!} - u_p$$

$$= -\frac{1}{(p+1)!} - \ldots - \frac{1}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!}$$

$$> -\frac{}{}$$

Comme v_p est décroissante $v_p \leq v_q$

$u_p < v_q$ $\qquad q < p$ "remontre"

$u_p < \frac{}{} < u_q < v_q$

$< v_p < \frac{}{} < v_q$

2004

V. 2.

Réponses

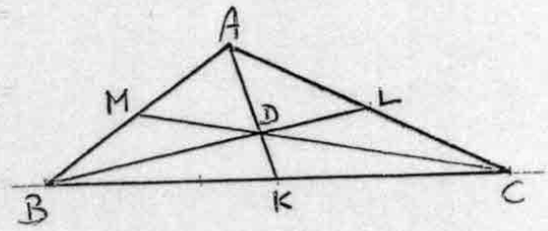
I 1) • $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha$

$4a^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 - 2\cdot a\cdot\frac{4}{3}a\cdot\cos\alpha \quad |\cdot 9$

$36a^2 = 9a^2 + 16a^2 - 24a^2\cos\alpha$

$24a^2\cos\alpha = -11a^2$

$\cos\alpha = -\frac{11a^2}{24a^2} \qquad (\alpha \in]90°;180°[)$



• $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{1-\frac{121}{576}}$

$= \frac{1}{24}\sqrt{576-121}$

$= \frac{1}{24}\sqrt{455}$

• $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha$

$= \frac{1}{2}\,a\cdot\frac{4}{3}a\cdot\frac{1}{24}\sqrt{455}$

$= \frac{1}{36}\sqrt{455}\,a^2$

2) $\mathcal{A}_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}\,\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{72}\sqrt{455}\,a^2$

$\mathcal{A}_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AK}\sin\widehat{BAK}$

$\mathcal{A}_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\widehat{BAK}$ | or: $\overline{AD} = \frac{2}{3}\,\overline{AK}$

$= \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\frac{2}{3}\,\overline{AK}\cdot\sin\widehat{BAK}$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{AK}\sin\widehat{BAK}\right)$

$= \frac{2}{3}\,\mathcal{A}_{\Delta ABK}$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{72}\sqrt{455}\,a^2$

$= \frac{1}{108}\sqrt{455}\,a^2$

3) ~~$\mathcal{A}_{\Delta AKC} = \mathcal{A}_{\Delta ABK}$~~

$\mathcal{A}_{\Delta ADC} = \frac{2}{3}\,\mathcal{A}_{\Delta AKC} = \frac{1}{108}\sqrt{455}\,a^2$

$\mathcal{A}_{\Delta DKC} = \mathcal{A}_{\Delta AKC} - \mathcal{A}_{\Delta ADC} = \frac{1}{72}\sqrt{455}\,a^2 - \frac{1}{108}\sqrt{455}\,a^2 = \frac{1}{216}\sqrt{455}\,a^2$

$\mathcal{A}_{\Delta BDK} = \mathcal{A}_{\Delta ABK} - \mathcal{A}_{\Delta ABD} = \frac{1}{72}\sqrt{455}\,a^2 - \frac{1}{108}\sqrt{455}\,a^2 = \frac{1}{216}\sqrt{455}\,a^2$

$\mathcal{A}_{\Delta DCL} = \mathcal{A}_{\Delta BCL} - \mathcal{A}_{\Delta BDK} - \mathcal{A}_{\Delta DKC}$

$= \frac{1}{2}\,\mathcal{A}_{\Delta ABC} - \mathcal{A}_{\Delta BDK} - \mathcal{A}_{\Delta DKC} = \frac{1}{216}\sqrt{455}\,a^2$

II

1) $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}$

$= u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}$

et $v_{n+1} - v_n = \left(u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\right) - \left(u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}\right)$

$= \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n \cdot n!}$

$= \dfrac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \cdot (n+1)(n+1)!}$

$= \dfrac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!}$

$= \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$

(v_n) $(n \in \mathbb{N}_0)$ est donc une suite décroissante.

2) • $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$

$= \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$

(u_n) $(n \in \mathbb{N}_0)$ est donc une suite croissante.

• $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!} > 0$

Donc : $v_n > u_n$

• Soit $(p, q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}_0$ tels que $p \leq n$ et $q \leq n$.
(u_n) étant une suite croissante on a : $u_p \leq u_n$
(v_n) étant une suite décroissante on a : $v_n \leq v_q$
On conclut : $u_p \leq u_n < v_n \leq v_q$
et $u_p < v_q$

3) D'après 2) on a : $u_p < v_q$.
En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}_0$: $u_p < v_0$
La suite (u_n) est donc majorée et ne peut pas tendre vers $+\infty$.

4) La suite (u_n) $(n \in \mathbb{N}_0)$ est croissante et majorée : elle converge donc. Soit l sa limite.
La suite (v_n) $(n \in \mathbb{N}_0)$ est décroissante et minorée : elle converge donc. Soit l' sa limite.
On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = l' - l$
Or : $\forall n \in \mathbb{N}_0$: $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!} \leq \dfrac{1}{n}$
D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$ et $l = l'$.

III

1) $\forall z \in \mathbb{C}-\{4\}$: $\frac{iz-4}{z-4}$ est réel $\iff \frac{iz-4}{z-4} = \overline{\left(\frac{iz-4}{z-4}\right)}$

$\iff \frac{iz-4}{z-4} = \frac{-i\bar{z}-4}{\bar{z}-4}$

$\iff (iz-4)(\bar{z}-4) = (-i\bar{z}-4)(z-4)$

$\iff iz\bar{z} - 4iz - 4\bar{z} + 16 = -iz\bar{z} + 4i\bar{z} - 4z + 16$

$\iff 2i|z|^2 - 4i(z+\bar{z}) + 4(z-\bar{z}) = 0$

(pose : $z = x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$)

$\iff 2i(x^2+y^2) - 4i\cdot 2x + 4\cdot 2iy = 0 \quad |:(2i)$

$\iff x^2+y^2 - 4x + 4y = 0$

$\iff (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$

L'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(z)$ du plan est le cercle de centre $\Omega(2,-2)$ et de rayon $2\sqrt{2}$ privé de A car $(4-2)^2 + (0+2)^2 \neq 8$

2) a) $\forall z \in \mathbb{C}-\{4\}$: $\frac{iz-4}{z-4} = i\cdot\frac{z+4i}{z-4}$

$\iff \frac{z+4i}{z-4} = \frac{1}{i}\,\frac{iz-4}{z-4}$

$\iff \frac{z+4i}{z-4} = (-i)\,\frac{iz-4}{z-4}$

Si $\frac{iz-4}{z-4}$ est réel, c'est-à-dire $\frac{iz-4}{z-4} = \lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\frac{z+4i}{z-4} = (-i)\lambda$ et $\frac{z+4i}{z-4}$ est imaginaire pur.

Réciproquement, si $\frac{z+4i}{z-4}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire $\frac{z-4i}{z-4} = \mu i$, $\mu\in\mathbb{R}$, alors $\mu i = (-i)\frac{iz-4}{z-4}$ et $\mu = -\frac{iz-4}{z-4}$, donc $\frac{iz-4}{z-4}$ est réel.

b) affixe de $\overrightarrow{AM}$: $z-4$

affixe de $\overrightarrow{BM}$: $z+4i$

$\forall M\neq A$ et $M\neq B$: $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \arg\frac{z+4i}{z-4}$

On, d'après a) on sait : $\forall z\in\mathbb{C}-\{4\}$ $\frac{z+4i}{z-4}$ est imaginaire pur

$\Updownarrow$

$f(z) = \frac{iz-4}{z-4}$ est réel

On en déduit que : $\arg\frac{z+4i}{z-4} = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Updownarrow$

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] privé de A et de B.

Mais puisque $\frac{iz_B-4}{z_B-4} = \frac{i(-4i)-4}{-4i-4} = 0$, donc réel,

on conclut que B appartient à $\mathcal{C}$.

(IV) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et $\text{card}\,\Omega = \text{card}\,\Omega_1 \cdot \text{card}\,\Omega_2$

On a $\text{card}\,\Omega_1 = \text{card}\,\Omega_2 = \binom{2}{5} = 10$

D'où : $\text{card}\,\Omega = 100$

1) E est la réunion des trois événements E_1, E_2 et E_3 suivants :

E_1 : tirer deux boules blanches dans l'urne U_1 et aucune boule blanche dans U_2

E_2 : tirer une boule blanche dans chaque urne

E_3 : tirer aucune boule blanche dans U_1 et deux boules blanches dans U_2

$\text{card}\,E_1 = \binom{2}{3} \cdot \binom{2}{3} = 9$

$\text{card}\,E_2 = \left(\binom{1}{3} \cdot \binom{1}{2}\right) \cdot \left(\binom{1}{2} \cdot \binom{1}{3}\right) = 36$

$\text{card}\,E_3 = \binom{2}{2} \cdot \binom{2}{2} = 1$

Les trois événements étant incompatibles, on a :

$\text{card}\,E = \text{card}\,E_1 + \text{card}\,E_2 + \text{card}\,E_3 = 46$

$p(E) = \frac{46}{100} = 0{,}46$

2) a) Les valeurs prises par X sont : 0, 1, 2, 3, 4

- $p(X=0) = \frac{1}{100}\left(\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{3}\right) = \frac{3}{100}$ (tirer deux boules noires dans chaque urne)

- L'événement $X=1$ est la réunion des deux événements incompatibles G_1 et G_2 suivants :

G_1 : tirer une boule blanche dans U_1 et aucune boule blanche dans U_2

G_2 : tirer une boule blanche dans U_2 et aucune boule blanche dans U_1

$\text{card}\,G_1 = \left(\binom{1}{3}\binom{1}{2}\right) \cdot \binom{2}{3} = 18$

$\text{card}\,G_2 = \binom{2}{2} \cdot \left(\binom{1}{2} \cdot \binom{1}{3}\right) = 6$

$\text{card}\,G = 18 + 6 = 24$

$p(X=1) = \frac{24}{100} = 0{,}24$

- $p(X=2) = p(E) = 0{,}46$

- L'événement $X=3$ est la réunion des deux événements incompatibles F_1 et F_2 suivants :

F_1 : tirer deux boules blanches dans U_1 et une boule blanche dans U_2

F_2 : tirer une boule blanche dans U_1 et deux boules blanches dans U_2

$\text{card}\,F_1 = \binom{2}{3} \cdot \left(\binom{1}{2} \cdot \binom{1}{3}\right) = 18$

$\text{card}\,F_2 = \left(\binom{1}{3} \cdot \binom{1}{2}\right) \cdot \binom{2}{2} = 6$

$\text{card}\,F = 24$

$p(X=3) = \frac{24}{100} = 0,24$

- L'événement $X=4$ est l'événement où il faut tirer deux boules blanches dans chaque urne.

$$p(X=4) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^2}{100} = \frac{3}{100} = 0,03$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) $E(X) = 0 \cdot 0,03 + 1 \cdot 0,24 + 2 \cdot 0,46 + 3 \cdot 0,24 + 4 \cdot 0,03 = 2$

Le gain moyen du joueur sera donc égal à 2€ Le joueur doit verser 2,50 € avant d'effectuer le tirage. Il reçoit 1 € à l'issue du tirage par boule blanche tirée. Sa somme reçue à l'issue du tirage est X. Puisque $E(X) = 2$, le jeu n'est pas équitable.

3) On tire deux boules blanches parmi les cinq boules de l'urne U_1.
On appelle succès le fait de tirer deux (boules) blanches.
Soit A l'événement : on obtient au moins un succès sur les 10 tirages
Alors $\bar{A}$ est l'événement : on n'obtient aucun succès sur les (dix) tirages
Soit S l'événement : on obtient un succès

$$p(S) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

$$p(\bar{S}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$p(\bar{A}) = \left(\frac{7}{10}\right)^{10}$$

$$p(A) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{10}$$

(IV) 1) a) • $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ $z * z' = xx' + i(xy' + yx')$
$= x'x + i(x'y + y'x)$ ↓ commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$
$= z' * z$

La loi "$*$" est donc commutative.

• $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$ $(z * z') * z'' = [xx' + i(xy' + yx')] * (x'' + iy'')$
(pour: $z'' = x'' + iy''$)
$= (xx')x'' + i[(xx')y'' + (xy' + yx')x'']$
$= xx'x'' + i(xx'y'' + xx''y' + x'x''y)$ ⇐ (=)
$z * (z' * z'') = (x + iy) * [x'x'' + i(x'y'' + y'x'')]$
$= x(x'x'') + i[x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'')]$
$= xx'x'' + i(xx'y'' + xx''y' + x'x''y)$ ⇐

La loi "$*$" est donc associative.

b) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $\overline{z * z'} = xx' - i(xy' + yx')$ ⇐
$\overline{z} * \overline{z'} = (x - iy) * (x' - iy')$ (=)
$= xx' + i[x(-y') + (-y)x']$
$= xx' - i(xy' + yx')$ ⇐

On conclut: $\forall z, z' \in \mathbb{C}$: $\overline{z * z'} = \overline{z} * \overline{z'}$

c) si $z \in \mathbb{C}$: $z * 2i = 0$
$\Leftrightarrow (x + iy) * 2i = 0$
$\Leftrightarrow x \cdot 0 + i(x \cdot 2 + y \cdot 0) = 0$
$\Leftrightarrow 2ix = 0 \quad | : (2i)$
$\Leftrightarrow x = 0$

$S_{\mathbb{C}} = \{ yi \mid y \in \mathbb{R} \}$

2) si $z \in \mathbb{C}$: $z * z + [2\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)] * z + 1 + 2i\sin 2\theta = 0$
$\Leftrightarrow (x+iy) * (x+iy) + [2\sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)] * (x+iy) + 1 + 2i\sin 2\theta = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + i(xy + yx) + 2\sqrt{2}\cos\theta \cdot x + i(2\sqrt{2}\cos\theta \cdot y + 2\sqrt{2}\sin\theta \cdot x) + 1 + 2i\sin$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{2}\cos\theta \cdot x + 1 = 0 & (1) \\ 2xy + 2\sqrt{2}\cos\theta \cdot y + 2\sqrt{2}\sin\theta \cdot x + 2\sin 2\theta = 0 & (2) \end{cases}$

Résolution de (1): $x^2 + 2x\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta = (2\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 4$
$= 8\cos^2\theta - 4$
$= 4(2\cos^2\theta - 1)$
$= 4\cos 2\theta$

$\forall \theta \in [0;\pi[$:

$\boxed{\cos 2\theta < 0}$

$\Updownarrow$

$2\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

$\Updownarrow$

$\theta \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$

L'équation (1) n'admet pas de solution réelle.

Par conséquent, l'équation (2) n'admet pas de solution réelle.

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$, $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \emptyset}$

$\boxed{\cos 2\theta = 0}$

$\Updownarrow$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{4}$

si $\theta = \frac{\pi}{4}$ alors $x_0 = \frac{-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = -1$

Dans (2) :

$-2y_0 + 2\sqrt{2}\cdot y_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}\cdot(-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot 1 = 0$

$0 = 0$

Si $\theta = \frac{3\pi}{4}$ alors $x_0 = \frac{-2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = 1$

Dans (2) :

$2y_0 + 2\sqrt{2}\cdot y_0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2(-1) = 0$

$0 = 0$

$\boxed{\cos 2\theta > 0}$

$\Updownarrow$

$\theta \in [0;\frac{\pi}{4}[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$

L'équation admet deux solutions :

$x_1 = \frac{-2\sqrt{2}\cos\theta + 2\sqrt{\cos 2\theta}}{2} = -\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$

$x_2 = -\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{\cos 2\theta}$

Dans (2) :

$y_1 = -\sqrt{2}\sin\theta$

$y_2 = -\sqrt{2}\sin\theta$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{(-1+iy) \mid y\in\mathbb{R}, \theta = \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{1+iy \mid y\in\mathbb{R}, \theta = \frac{3\pi}{4}\right\}}$

calculs :

- $2x_1y_1 + 2\sqrt{2}\cos\theta\cdot y_1 + 2\sqrt{2}\sin\theta\cdot x_1 + 2\sin 2\theta = 0$

$2\left(-\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\right)y_1 + 2\sqrt{2}\cos\theta\cdot y_1 + 2\sqrt{2}\sin\theta\left(-\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}\right) + 2\sin 2\theta = 0$

$-2\sqrt{2}y_1\cos\theta + 2\sqrt{\cos 2\theta}\,y_1 + 2\sqrt{2}y_1\cos\theta - 4\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} + 2\sin 2\theta$

$y_1 = -\frac{2\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}}{2\sqrt{\cos 2\theta}} = -\sqrt{2}\sin\theta$

- $2x_2y_2 + \ldots\ldots$

$\vdots$

si $\theta \in [0;\frac{\pi}{4}[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$, $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{x_1+iy_1\} \cup \{x_2+iy_2\}}$

3) Si $z \in \mathbb{C}$, $|z+1+i| * (2i) = 4i$

$|x+iy+1+i| * (2i) = 4i$

$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} * (2i) = 4i$

$0 + i\left(2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} + 0\right) = 4i$

$2i\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 4i \quad |:(2i)$ | au carré

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

L'ensemble des points $P(z)$ recherché est le cercle de centre $\Omega(-1,-1)$ et de rayon 2.

2e session 2004/2005

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Jeudi, le 21 avril 2005
14.30 - 17.30

I. Pout tout $n \in IN^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$.

1) Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et le sens de variation de f_n.

2) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $J_n(x) = \int f_n(t)dt$.

a) Calculer $J_1(x)$ après avoir justifié l'existence de $J_n(x)$.

Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $J_{n+1}(x) = \dfrac{-(\ln x)^{n+1}}{x} + (n+1)\cdot J_n(x)$.

En déduire $J_2(x)$.

b) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les courbes représentatives de f_1 et f_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

c) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $0 \le J_n(e) \le 1$.

(6 points)

II. 1) Soit T_α la tangente en le réel α au graphe de la fonction exponentielle.

Démontrer que la droite T_α est tangente au graphe de la fonction logarithme népérien si et seulement si $(\alpha - 1)\cdot e^\alpha - \alpha - 1 = 0$.

2) On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\cdot e^x - x - 1$.

a) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans IR, que l'on notera β et que $f(\beta) = -\beta - e^\beta$ et $\beta > 0$.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, que l'une des solutions, notée a, appartient à l'intervalle I = [-2 ; -1] et que l'autre solution vaut $-a$.

Q1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$f_n : x \longmapsto \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

C.E. 1) $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

2) $x > 0$

dom $f_n =]0; +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$ ($\ln x \to -\infty$, $x^2 \to 0^+$) $= \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

A.V. : $V \equiv x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \frac{n}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^2}$$

$$\overset{H}{=} \frac{n}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{(n-1)(\ln x)^{n-2} \cdot \frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \frac{n!}{2^n} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0$$

A.H. : $h \equiv y = 0$ (en $+\infty$)

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt = \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,dt$

$f_n(t)$ est continue sur $]0; +\infty[$

↳ f_n est primitivable sur $]0; +\infty[$

ainsi $\forall x \in]0;1[\cup]1; +\infty[$

on a que $y_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$ est bien définie

$$y_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

($\ln t$: $\frac{1}{t}$; $\frac{1}{t^2}$: $-\frac{1}{t}$)

$$= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \left[\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1$$

$$I_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2}\,dt$$

$(\ln t)^{n+1}$ — $\frac{1}{t} = t^{-2}$

$(n+1)(\ln t)^n \frac{1}{t}$ — $-t^{-1}$

$$= \left[-\frac{(\ln t)^{n+1}}{t}\right]_1^x + (n+1)\int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} + (n+1)\, I_n(x)$$

Ainsi $I_2(x) = I_{1+1}(x) = -\frac{\ln^2(x)}{x} + 2\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{2}{9}x^3$

b) $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{\ln^2 x}{x^2} = f_2(x)$

$\Leftrightarrow \ln x\,(\ln x - 1) \geq 0$

x	1		e	
$\ln x$	$-$	0	$+$	$+$
$\ln x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	0 $+$

ainsi sur $[1;e]$ $f_1 \geq f_2$ et $[e;e^2]$ $f_2 \geq f_1$

$$A = \int_1^e f_1(x) - f_2(x)\,dx + \int_e^{e^2} f_2(x) - f_1(x)\,dx$$

$$= I_1(e) - I_2(e) + \int_e^{e^2} f_2(x)\,dx - \int_e^{e^2} f_1(x)\,dx$$

$y = \frac{x}{e}$, $dx = e\,dy$

$$= I_1(e) - I_2(e) + e\int_1^e f_2(y)\,dy - e\int_1^e f_1(y)\,dy$$

$$= I_1(e) - I_2(e) + e\,I_2(e) - e\,I_1(e)$$

$$= (1-e)I_1(e) + (e-1)I_2(e) = (1-e)\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9}\right) + 2(e-1)\left(-\frac{1}{e} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9}\right) \text{ u.a.}$$

$$\approx 5.0 \text{ cm}^2$$

c) $I_n(e) = \int_1^e f_n(t)\,dt$

$f_n(1) = 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e^2}$ f_n est $\nearrow$, ainsi

ainsi $\int_1^e 0\,dt \leq I_n(e) \leq \frac{1}{e^2}[t]_1^e$

$0 \leq I_n(e) \leq \frac{e-1}{e^2} \leq \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \leq 1$

Q2

1) T_x : tangente en (x, e^x)

équation : $T_x \equiv y = e^x(x-x) + e^x$

$= e^x x + e^x(1-x)$

tangente à $\ln x$: $T_{x_0} \equiv y = \frac{1}{x_0}(x-x_0) + \ln x_0 = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0$ avec $x_0 > 0$

$T_{x_0} = T_x \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{1}{x_0} \\ e^x(1-x) = \ln x_0 - 1 \end{cases}$ $x_0 > 0$

$\Leftrightarrow e^x(1-x) = -x - 1$

$\Leftrightarrow (x-1)e^x - x - 1 = 0$

2) Soit $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$\text{dom } f' = \mathbb{R}$

a) $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1$

$= xe^x - 1$

$\lim_{x \to -\infty} f'(x) \overset{H}{=} \left(\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{e^{-x}}\right) - 1$

$= -1$

variation de f' :

$f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$			
$f'(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}-1$	$\nearrow$	$f'(0) = -1$		$+\infty$

ainsi $f' < 0$ sur $]-\infty ; 0[$

et $f' \nearrow$ sur $]0 ; +\infty[$ avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

par le TVI, il doit y exister un seul $\beta > 0$

tq $f'(\beta) = 0$.

$\Leftrightarrow \beta e^\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta e^\beta = 1$

ainsi $f(\beta) = \beta e^\beta - e^\beta - \beta - 1 = -e^\beta - \beta$.

x	$-\infty$		-2		-1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$\underbrace{-\beta - e^{\beta}}_{<0}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et $f(\beta) < 0$
$\Rightarrow$ une seule racine dans $]\beta; +\infty[$

$f \searrow$ sur $]-\infty; \beta[$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\beta) < 0 \Rightarrow$ une racine dans cet intervalle

$$\lim_{x \to -\infty} (x-1)e^x - x - 1 = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{(x-1)}_{\to +\infty} \left[\underbrace{e^x}_{\to 0} - \frac{x}{\underbrace{x-1}_{\to 1}} - \frac{1}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \right]$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)e^x - x - 1 = \text{---}$$

$$= +\infty$$

$$f(-2) = -3e^{-2} + 1 \approx 0{,}59 > 0$$

$$f(-1) = -2e^{-1} < 0$$

or $f \searrow$ sur $[-2; -1]$, il s'ensuit que (par le TVI) qu'il existe $a \in [-2; -1]$ tq $f(a) = 0$

$$\Leftrightarrow (a-1)e^a - a - 1 = 0 \qquad \times e^{-a}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)e^0 - (a+1)e^{-a} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a-1)e^{-a} - (-a) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(-a) = 0$$

Ainsi l'autre solution

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Vendredi, le 18 novembre 2005
15h-18h

I. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{1-x}}$.

1) Étudier f :

a) limites de f aux bornes de l'ensemble de définition,

b) dérivabilité de f en 0, sens de variation de f, tableau de variation,

c) courbe représentative de f.

2) Soient p et q des nombres rationnels tels que $p>1$ et $p+q+1=0$.

Démontrer que pour tout réel $x\in]0;1[$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{1}{pq}(x+q)x^p(1-x)^q-\frac{1+2q}{pq}$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)dt$.

(5 points)

II. On considère la fonction h_a définie par $h_a(x)=(x-a)^{ax}$ $\quad(a\in\mathbb{R}^*)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de h_a.

2) Montrer qu'on peut prolonger h_a par continuité en a, soit f_a ce prolongement.

3) Étudier les éventuelles branches infinies de f_a.

4) Étudier la dérivabilité de f_a en a.

5) Pour $a>0$, étudier les variations de f_a et esquisser l'allure des courbes représentatives des f_a.

(8 points)

III. Soit $J_n = \int_a^x (\tan t)^n dt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec $\cos t \neq 0$ pour $t \in [a, x]$.

1) Calculer J_1 et J_2.

2) Pour $n \geq 3$, calculer $J_n + J_{n-2}$. En déduire J_5.

(4 points)

IV. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels m et p la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + px^2 + x + 1} + mx\sqrt{x+2} \right)$$

(3 points)

Épreuve d'analyse 2005 (novembre)

I. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}\sqrt[3]{\frac{x^4}{1-x}} = \sqrt[3]{\frac{x^4}{(1-x)^{13}}}$ sur $]-\infty;1[$

1) a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^4}{(1-x)^{13}}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^{13}(\frac{1}{x}-1)^{13}}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{\underbrace{x^3}_{-\infty}\underbrace{(\frac{1}{x}-1)^{13}}_{-1}}} = 0$
$\quad +\infty$

Donc le graphe de $f(x)$ admet une A.H. d'équation $y=0$.

$\lim_{x\to1^-} \sqrt[3]{\frac{x^4=1}{\underbrace{(1-x)^{13}}_{\to0^+}}} = +\infty$

Donc le graphe de $f(x)$ admet une A.V. d'équation $x=1$.

b) $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^8}{(1-x)^{26}}}} \cdot \frac{4x^3(1-x)^{13} + x^4(1-x)^{12}\cdot 13}{(1-x)^{26}}$

$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-x)^{24}}{x^8}} \frac{(1-x)^8 x^3(1-x)^{12}[4x(1-x)+13x^2]}{(1-x)^{26}}$

$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-x)^{24}}{x^8}} \frac{4x-4x^2+13x^2}{(1-x)^6}$

$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-x)^{24}}{x^8}} \frac{x(4+9x)}{(1-x)^6}$ défini sur $]-\infty;0[\cup]0;1[$.

dérivabilité en 0:

$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt[3]{\frac{x^4}{1-x}} \cdot \frac{1}{x}$

$= \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} = 0$

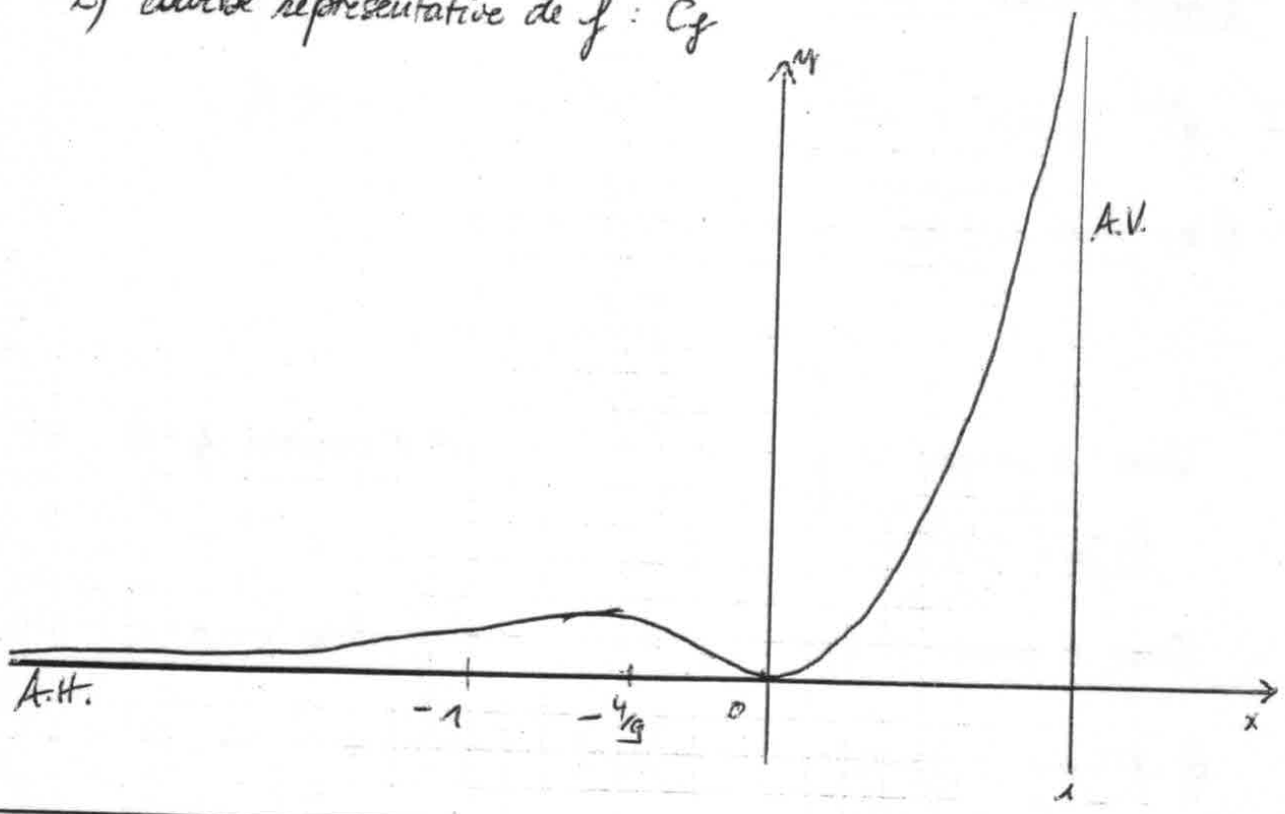
Donc $f(x)$ est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Sens de variation:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{4}{9}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{9}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	max $f(-\frac{4}{9})$ $\approx 0{,}065$	↘	min $f(0)=0$	↗	$+\infty$

c) courbe représentative de f : C_f



---

d) $\left(\frac{1}{pq}(x+q)x^p(1-x)^q - \frac{1+2q}{pq}\right)' = \frac{1}{pq}\left(x^p(1-x)^q + p(x+q)x^{p-1}(1-x)^q - q(x+q)x^p(1-x)^{q-1}\right)$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left(x(1-x) + p(x+q)(1-x) - q(x+q)x\right)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left(x - x^2 + (px+pq)(1-x) - qx^2 + q^2x\right)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left(x - x^2 + px - px^2 + pq - pqx - qx^2 + q^2x\right)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left(pq + x(1+p-q-pq) + x^2(\underbrace{-p-q+1}_{=0})\right)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left(pq + x^2 + x(\underbrace{1+p-q}_{=-q}(q+p))\right)\right.$

$= x^{p-1}(1-x)^{q-1} \qquad q(-1+q-p) = 0$

$= x^{p-1}(1-x)^{q-1}$

puisque $f(x) = x^{\frac{4}{3}} \cdot (1-x)^{-\frac{13}{3}}$ on a $p = \frac{7}{3}$ et $q = -\frac{10}{3}$

et $\lim\limits_{x\to 1} \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{-\frac{70}{9}} \cdot \left(x - \frac{10}{3}\right) x^{\frac{7}{3}}(1-x)^{-\frac{10}{3}} - \frac{1 - \frac{20}{3}}{-\frac{70}{9}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} -\frac{9}{70} \underbrace{\left(x - \frac{10}{3}\right)}_{\text{fini}} \underbrace{x^{\frac{7}{3}}}_{1} \underbrace{(1-x)^{-\frac{10}{3}}}_{+\infty} + \underbrace{\frac{17}{3} \cdot \left(-\frac{9}{70}\right)}_{-\frac{51}{70}}$

$= +\infty \qquad -\frac{51}{70} = +\infty$

I 1) $\forall x \in]-\infty;+1[$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{(1-x)}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{(1-x)^{13}}}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ A.H.G. : $y=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ A.V. : $x=1$

b) f est continue sur $]-\infty,1[$

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ et pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;1[$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{(1-x)^{13}}\right)^2}}\cdot\frac{4x^3(1-x)^{13}+13x^4(1-x)^{12}}{(1-x)^{26}} = \frac{x^3(1-x)^{12}(9x+4)}{3\frac{x^2}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(1-x)^2}}(1-x)^{22}} = \frac{x\cdot(9x+4)\sqrt[3]{(1-x)^2}}{3\cdot(1-x)^6\sqrt[3]{x^2}}$$

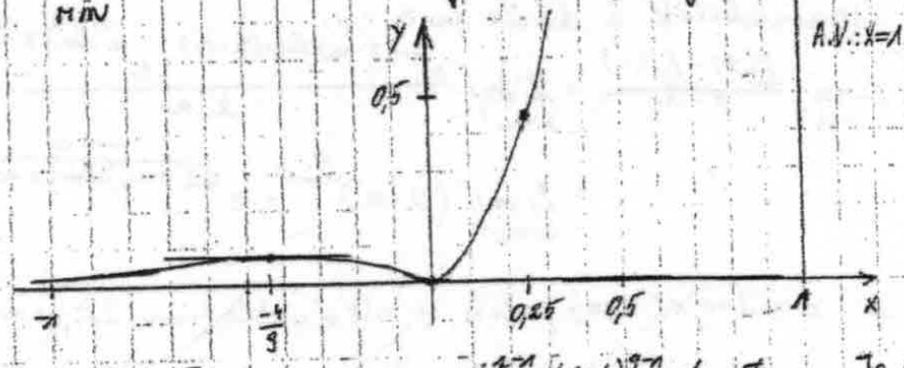
dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{x}{(1-x)^{13}}} = 0$ donc $f'(0)=0$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{9}$		0		1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	max local	↘	min	↗	$+\infty$

$f\left(\frac{-4}{9}\right) \approx 0{,}069$

$f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}45$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$

c)



2) L'intégrale existe pour tout $x\in]0;1[$ puisque $t \longmapsto t^{p-1}\cdot(1-t)^{q-1}$ est continue sur $]0;1[$

Pour $x=\frac{1}{2}$, l'égalité est vérifiée. En effet $\frac{1}{pq}\left(\frac{1}{2}+q\right)\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^q - \frac{1+2q}{pq}$

$= \frac{1}{p\cdot q}\left(\frac{1}{2}+q\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q} - \frac{1+2q}{pq} = \frac{1}{pq}\left(\frac{1}{2}+q\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \frac{1+2q}{pq} \overset{!}{=} 0$ (car $p+q=-1$).

Reste à montrer que les deux membres de l'égalité ont la même dérivée :

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\right)' = x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}$$

$$\left(\frac{1}{pq}\cdot(x+q)x^p\cdot(1-x)^q - \frac{1+2q}{pq}\right)' = \frac{1}{pq}\left[x^p\cdot(-q)(1-x)^q + p(x+q)x^{p-1}(1-x)^q - q(x+q)x^p(1-x)^{q-1}\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\cdot\left[x\cdot(1-x) + p(x+q)(1-x) - q(x+q)x\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[x-x^2+px+pq-px^2-pqx-qx^2-q^2x\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[pq + \underbrace{(1+p-pq-q^2)}_{-q}x - \underbrace{(1+p+q)}_{0}x^2\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[pq - q\underbrace{(1+p+q)}_{0}x\right] \overset{!}{=} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}$$

$\forall x\in]0;1[$, $f(x) = x^{\frac{4}{3}}\cdot(1-x)^{-\frac{13}{3}}$.

Pour $p=\frac{7}{3}$ et $q=\frac{-10}{3}$ on a : $\lim\left[\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt = \lim\left[\frac{-9}{70}\cdot\left(x-\frac{10}{9}\right)x^{\frac{7}{3}}(1-x)^{\frac{-10}{3}} - \frac{51}{70}\right] = +\infty\right.$

II

$f_a(x) = (x-a)^{a^2} = e^{a^2 \ln(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}^+$

1) $D =]a, +\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to a^+} f_a(x) = \lim\limits_{x \to a^+} e^{a^2 \overbrace{(x-a)\ln(x-a)}^{\to 0}} \cdot e^{\overbrace{a^2 \ln(x-a)}^{\to -\infty}} = 1 \cdot 0 = 0$

on prolonge f_a par continuité en $x = a$ en posant $f_a(a) = 0$

3) comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-a) = +\infty$, on obtient

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$ si $a > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$ si $a < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_a(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot e^{x(a \ln(x-a) - 1)} = +\infty$ avec $a > 0$

BP de direction (oy) si $a > 0$ et $AH : y = 0$ si $a < 0$

4) f_a dérivable sur $]a, +\infty[$

dérivabilité à droite en a :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f_a(x) - f_a(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{e^{a^2(x-a)\ln(x-a)} \cdot e^{a^2 \ln(x-a)}}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a^+} (x-a)^{a^2-1} \cdot e^{\overbrace{a^2(x-a)\ln(x-a)}^{\to 0}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a^2 - 1 > 0 \\ 1 & \text{si } a^2 - 1 = 0 \\ +\infty & \text{si } a^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

si $a \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, alors f dérivable sur $]a, +\infty[$

si $a \notin]-1, 1[$, alors f dérivable sur $[a, +\infty[$

5) $f_a'(x) = a f_a(x) \left(\ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a} \right)$???

posons $g_a(x) = \ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}$, le signe de $f_a'(x)$ est celui de $a g_a(x)$

$g_a'(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{x-a-x}{(x-a)^2} = \dfrac{x-2a}{(x-a)^2}$ du signe de $x - 2a$

II. $h_a(x) = (x-a)^{ax}$

puisque ax est réel, on sait calculer $h_a(x)$ seulement si on l'écrit $h_a(x) = e^{ax\ln(x-a)}$.

1) h_a est défini $\Rightarrow x - a > 0$

$x > a$

$D_{h_a} =]a; +\infty[$.

2) $\lim_{x\to a} e^{\underbrace{ax}_{\to a^2}\underbrace{\ln(x-a)}_{\to -\infty}} = \lim_{x\to a} \underbrace{e^{a(x-a)\ln(x-a)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^{a^2\ln(x-a)}}_{0} = 0$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\to -\infty}$

$\to 0$

On peut prolonger $h_a(x)$ en a en posant $h_a(a) = 0$.

$$f_a(x) = \begin{cases} h_a(x) & \text{si } x \in]+a; +\infty[\\ 0 & \text{si } x = +a. \end{cases}$$

3) Comme $\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln(x-a) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^{f_a(x)} = +\infty$. si $a>0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax\ln(x-a)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}\cdot e^{x(a\ln(x-a)-1)} = +\infty$ si $a>0$

B.P. de direction Oy si $a>0$ et A.H. d'éq. $y=0$ si $a<0$.

4) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{e^{ax\ln(x-a)}}{x-a} = \lim_{x\to a^+} (x-a)^{ax-1}$

$= \lim_{x\to a^+} (x-a)^{a^2-1}$ $\begin{cases} a^2-1>0 & 0 \\ a^2-1=0 & 1 \\ a^2-1<0 & +\infty \end{cases}$

si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ f_a est dérivable en a. et $f'_a(a) = 0$

si $a \in \{-1; 1\}$ f_a est dérivable en a. $f'_a(a) = 1$

si $a \in]-1;1[$ f_a n'est pas dérivable

5) $f'_a(x) = e^{ax\ln(x-a)}\cdot\left(a\ln(x-a) + ax\cdot\frac{1}{x-a}\right)$

$= (x-a)^{ax}\cdot\left(a\ln(x-a) + ax\,\frac{1}{x-a}\right)$

$= \frac{(x-a)^{ax}\cdot\left(a\cdot(x-a)\ln(x-a) + ax\right)}{x-a}$

le signe de $f'_a(x)$ est celui de $a\ln(x-a) + \frac{ax}{x-a}$. $(= g_a(x))$

$g'_a(x) = \frac{a}{x-a} + a\,\frac{(x-a) - ax}{(x-a)^2}$

$= a\,\frac{(x-a-a)}{(x-a)^2}$

$= a\,\frac{x-2a}{(x-a)^2}$

$a > 0$

x	a	$2a$	$+\infty$
$g_a'(x)$	$-$	0	$+$
$g_a(x)$	$+\infty$ ↘	$2+\ln a$	↗ $+\infty$

$$\lim_{x\to a^+} \ln(x-a) + \frac{x}{x-a} \quad (a>0)$$
$$= \lim_{x\to a^+} \frac{(x-a)\ln(x-a) + x}{x-a} \quad (x-a \to 0^+) = +\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} \ln(x-a) + \frac{x}{x-a} = +\infty$$

$2+\ln a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{e^2}$; $2+\ln a < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{e^2}$

$0 < a < \frac{1}{e^2}$

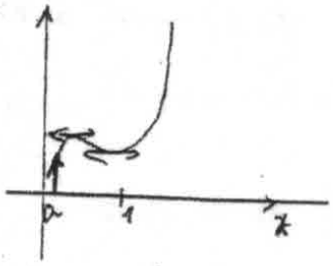
x	a	$2a$	$+\infty$
$g_a'(x)$	$\|\|$	$-$ 0	$+$
$g_a(x)$	$+\infty$	↘ 0 ↘ $2+\ln a<0$	↗ 0 ↗ $+\infty$
$f_a'(x)$	$+\infty$	↱ $\|\|$ $-$	0 $+$
$f_a(x)$	0 ↗	↘	↗ $+\infty$

$a = \frac{1}{e^2}$

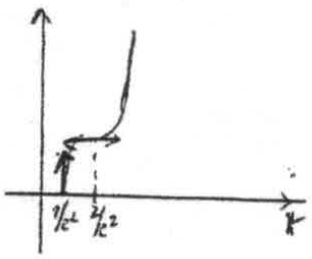
x	a	$2a$	$+\infty$
$g_a'(x)$	$\|\|$	$-$	0 $+$
$g_a(x)$	$+\infty$	↘	0 ↗ $+\infty$
$f_a'(x)$	$+\infty$	$+$	0 $+$
$f_a(x)$	0 ↗		↗ $+\infty$

$a > \frac{1}{e^2}$

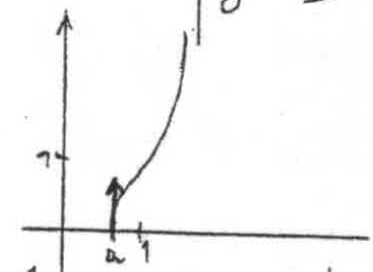
x	a	$2a$	$+\infty$
$g_a'(x)$	$-$	0	$+$
$g_a(x)$	$+\infty$	↘ $2+\ln a>0$	↗ $+\infty$
	$+\infty$ si $a<\frac{1}{e^2}$ 1 si $a=1$ 0 si $a>1$		$+$
	0		↗ $+\infty$



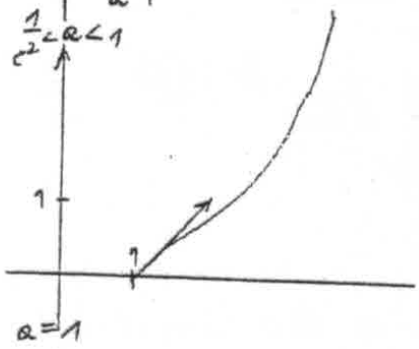
$0 < a < \frac{1}{e^2}$



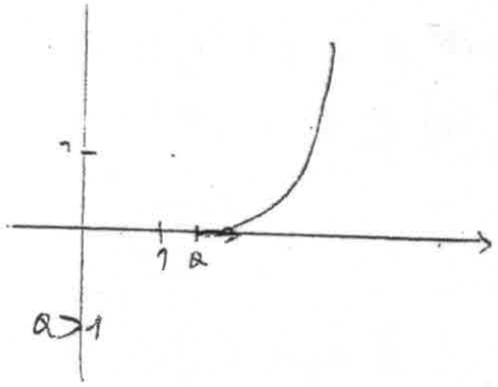
$a = \frac{1}{e^2}$



$\frac{1}{e^2} < a < 1$



$a = 1$



$a > 1$

I 1) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c} + mx\sqrt{x+2}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} + m\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)$

$x\sqrt{x} \to +\infty$; $\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} \to 1$; $m\sqrt{1+\frac{2}{x}} \to m$

pour $m=-1$: $\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}}$

$= \dfrac{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3} - 1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}\left(\frac{a-2}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}\right)}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(a-2)\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{x}}+\frac{c}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}}$; dénominateur $\to 2$

m		$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c} + mx\sqrt{x+2}\right)$
< -1		$-\infty$
$= -1$	$a < 2$	$-\infty$
	$a = 2$	0
	$a > 2$	$+\infty$
> -1		$+\infty$

III 1) $J_1 = \int_a^x \tan t\, dt = -\int_a^x \frac{-\sin t}{\cos t}\, dt = -\left[\ln|\cos t|\right]_a^x = \ln\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right|$.

$J_2 = \int_a^x \tan^2 t\, dt = \int_a^x \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \int_a^x \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt = \tan x - \tan a - (x-a)$.

2) Pour $n \geq 2$, $J_n + J_{n-2} = \int_a^x \left(\tan^n t + \tan^{n-2} t\right) dt$

$= \int_a^x \left(\tan^{n-2} t\right)\cdot\left(1+\tan^2 t\right) dt$

$= \frac{1}{n-1}\left[\tan^{n-1} t\right]_a^x$.

D'où $J_5 = \frac{1}{4}\cdot\left[\tan^4 t\right]_a^x - J_3 = \frac{1}{4}\cdot\left[\tan^4 t\right]_a^x - \frac{1}{2}\left[\tan^2 t\right]_a^x + J_1$

$= \frac{1}{4}\left(\tan^4 x - \tan^4 a\right) - \frac{1}{2}\left(\tan^2 x - \tan^2 a\right) + \ln\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right|$.

III. $J_n = \int_a^x (\tan t)^n \, dt \quad n \in \mathbb{N}^*$

1) $J_1 = \int_a^x \tan t \, dt$

$= \int_a^x \frac{\sin t}{\cos t} \, dt$

$= -\left[\ln|\cos t|\right]_a^x$

$= -\ln|\cos x| + \ln|\cos t|$

$= \ln \frac{|\cos a|}{|\cos x|}$

$J_2 = \int_a^x (\tan t)^2 \, dt$

$= \int_a^x \tan^2 t + 1 - 1 \, dt$

$= \left[\tan t - t\right]_a^x$

$= \tan x - \tan a - x + a$

ou bien : $J_2 = \int_a^x \tan^2 t \, dt$

$= \int_a^x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dt$ ($\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$)

$= \int_a^x \frac{1}{\cos^2 t} - 1 \, dt$

$= \tan t - t \Big]_a^x$

2) $J_n + J_{n-2} = \int_a^x \left[(\tan t)^n + (\tan t)^{n-2}\right] dt$

$= \int_a^x (\tan t)^{n-2} \left((\tan t)^2 + 1\right) dt$

$= \frac{1}{n-1}\left[(\tan t)^{n-1}\right]_a^x$

D'où $J_5 = \frac{1}{4}\left[(\tan t)^4\right]_a^x - J_3$

$= \frac{1}{4}\left[(\tan t)^4\right]_a^x - \frac{1}{2}\left[(\tan t)^2\right]_a^x + J_1$

$= \frac{1}{4}\left[(\tan t)^4\right]_a^x - \frac{1}{2}\left[(\tan t)^2\right]_a^x + \ln \frac{|\cos a|}{|\cos x|}$

$= \frac{1}{4}\left((\tan x)^4 - \tan^4 a\right) - \frac{1}{2}\left(\tan^2 x - \tan^2 a\right) + \ln \frac{|\cos a|}{|\cos x|}$

$\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}^{k(x)}$

IV. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+px^2+x+1} + mx\sqrt{x+2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+p\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} + m\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\right)$

si $m \geq -1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

si $m = -1$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+px^2+x+1} - x\sqrt{x+2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+px^2+x+1-x^3-2x^2}{x^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{p}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(p-2)x^2+x+1}{\cdots}$

si $p > 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

$p = 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$

$p < 2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$

si $m < -1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$

Tableau récapitulatif

m	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+px^2+x+1} + mx\sqrt{x+2}\right)$
$m > -1$	$+\infty$
$m = -1$	
$p > 2$	$+\infty$
$p = 2$	0
$p < 1$	$-\infty$
$m < -1$	$-\infty$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

lundi, le 25 avril 2005

15H00 – 18H00

I. 1) Soit P la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2p}$. Exprimer en fonction de l'abscisse x d'un de ses points M la distance de ce point au foyer.

2) Soit l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$. Calculer les distances des foyers au point M de E d'abscisse x donnée.

(5 points)

II. 1) Démontrer que la composée de trois symétries orthogonales dont les axes forment un véritable triangle n'admet pas de point invariant.

2) Application :

On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ où s_1, s_2 et s_3 sont les symétries orthogonales d'axes AB, AC et BC respectivement.

(6 points)

III. Soit ABCD un tétraèdre et E le milieu de $[AC]$, F le milieu de $[BC]$, G le milieu de $[AD]$ et H le milieu de $[BD]$.

1) Montrer que EFHG est un parallélogramme.

2) Soient M un point quelconque de $[AB]$, N un point quelconque de $[CD]$ et I le milieu de $[MN]$.

Démontrer que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}\right)$

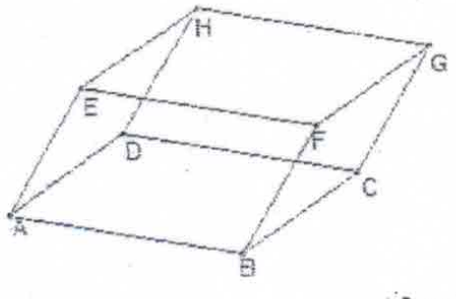
3) Soit $\mathcal{L}$ le lieu géométrique du point I lorsque M et N se déplacent sur $[AB]$ respectivement sur $[CD]$.

Démontrer que $P \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists x \in [0,1]$ et $\exists y \in [0,1]$ tels que $\overrightarrow{EP} = x \cdot \overrightarrow{EF} + y \cdot \overrightarrow{EG}$

4) En déduire la nature de $\mathcal{L}$.

(6 points)

IV. On donne un parallélépipède ABCDEFGH et I le centre de gravité du triangle BDE.
Démontrer que A, I et G sont alignés et préciser la position de I sur le segment $[AG]$.



(3 points)

I. 1) $P : y = \frac{x^2}{2p}$. Il s'agit d'une équation sous la forme $y = kx^2$ avec $k = \frac{1}{2p}$

Dans ce cas le foyer $F(0; \frac{1}{4k}) \rightarrow F(0; \frac{p}{2})$

$$\overline{HF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}}$$

puisque $H \in P$ on peut remplacer y par $\frac{x^2}{2p}$:

$$\overline{HF} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{4p^2} - p\frac{x^2}{2p} + \frac{p^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4}{4p^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

$$= \sqrt{(\frac{x^2}{2p}) + \frac{x^2}{2} + (\frac{p}{2})^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2})^2}$$

$$\overline{HF} = \left| \frac{x^2 + p^2}{2p} \right|$$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ d'où $F(c; 0)$ et $F(-c; 0)$

$$\overline{HF} = \sqrt{(x \mp c)^2 + (y^2 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{(x \mp c)^2 + (1 - \frac{x^2}{a^2}) b^2}$$

$$= \sqrt{x^2 \mp 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \mp 2cx + (c^2 + b^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 \mp 2cx + a^2}$$

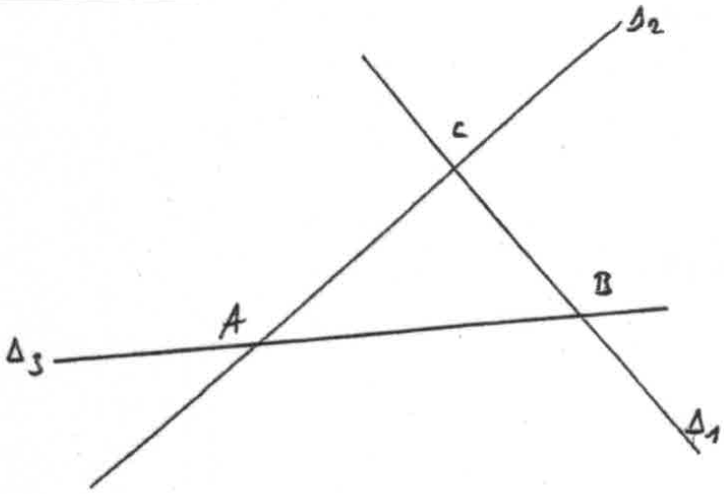
$$= \sqrt{(\frac{c}{a} x \mp a)^2}$$

$$= \left| \frac{c}{a} x \mp a \right|$$

comme $H \in E$ on a

$$y^2 = (1 - \frac{x^2}{a^2}) \cdot b^2$$

Exercice II



1) On ~~as~~ note $f = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$ par l'absurde

Supposons que f admette un point invariant qu'on note I.

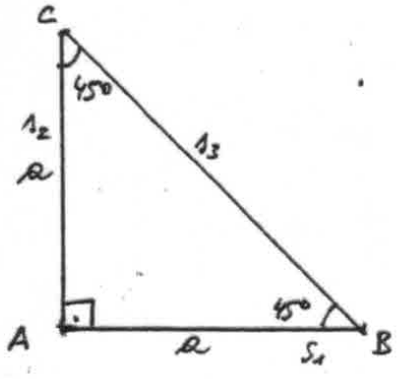
On a $r = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3} = r(A, 2\alpha)$ et $I' = r(I)$.

Alors $s_{\Delta_1}(I') = I \Rightarrow \Delta_1$ = médiatrice de $[II']$

Or $\overline{AI'} = \overline{AI} \Rightarrow A \in$ médiatrice de $[II'] = \Delta_1$

Puisque B et $C \in \Delta_1$ cela voudrait dire que A, B et C sont alignés. Contradiction avec le fait que A, B, C forment un triangle !

2)



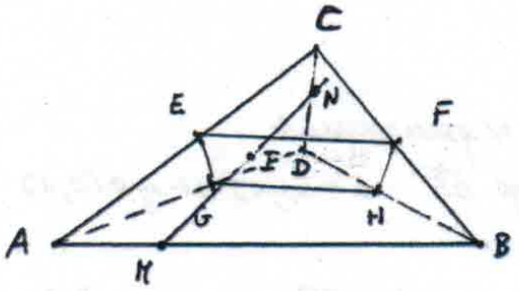
$f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$

$s_2 \circ s_1 = r(A; \vec{\pi}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$ = symétrie centrale (A)

et s_3 = symétrie ~~centrale~~axiale

f est une isométrie d'angle π qui transforme A en A' tel que $ABCA'$ soit un carré.

Exercice III



1) Il suffit de montrer que $EG \parallel NFH$ et $GH \parallel EF$

Thalès

Dans ΔDAB : $\frac{\overline{DG}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow GH \parallel AB$

ΔCAB : $\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CB}} \Rightarrow EF \parallel AB$

$\Rightarrow GH \parallel EF$

Dans ΔADC : $\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow EG \parallel DC$

ΔBDC : $\frac{\overline{BH}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow HF \parallel DC$

$\Rightarrow \overrightarrow{FH} \parallel EG$

$\Rightarrow$ EFHG est un parallélogramme

2) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NI}$

$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HI}$ +

$2\overrightarrow{EI} = 0 + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CN} + 0$

$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CN})$

3) $P \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists x \in [0;1]$ et $\exists y \in [0;1]$ tq $\overrightarrow{EP} = x \cdot \overrightarrow{EF} + y \cdot \overrightarrow{EG}$

"$\Leftarrow$" On a $\overrightarrow{EP} = x \cdot \overrightarrow{EF} + y \cdot \overrightarrow{EG}$

$= \frac{1}{2} x \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} y \overrightarrow{CD}$ Thalès

$= \frac{1}{2}(x \cdot \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{CD})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CN})$

$\Rightarrow P =$ mil $[HN]$ d'après 2) $\Rightarrow P \in \mathcal{L}$.

"⇒" $P \in \mathcal{L} \Rightarrow P = \text{mid}[HN]$

$\Rightarrow \overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (d'après 2)

$\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} y \overrightarrow{CD}$ car H et N parcourent $\overrightarrow{AB}$ resp. $\overrightarrow{CD}$ $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$

$= x \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + y \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$

$= x \cdot \overrightarrow{EF} + y \cdot \overrightarrow{EG}$ car $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ et $\overrightarrow{EG} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$ (d'après Thalès)

4) On a $\overrightarrow{EP} = x\overrightarrow{EF} + y\overrightarrow{EG}$ et $x \in [0;1]$ $y \in [EG]$

Donc $\overrightarrow{EP}$ parcourt le plan ~~de sommets~~ engendré par $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ mais limité à $\underbrace{\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}}_{\text{~~longueur de 1~~}} = \overrightarrow{EH}$ $\Rightarrow$ P reste à l'intérieur de #EFGH.

D'où $\mathcal{L}$ est le parallélogramme EFHG.

IV. I est le ~~xx~~ centre de gravité du Δ BDE

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AI}$ OK

~~$\overrightarrow{AE}$~~ $\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

Donc A, I et G sont alignés

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

Mercredi, le 23 novembre 2005

15H00 – 18H00

I. Soit ABC un triangle non isocèle. On désigne par I et J les projections orthogonales de C et B sur la bissectrice intérieure du triangle ABC issue de A et par M le milieu du côté [BC]. Soient C' le point d'intersection des droites (CI) et (AB) et B' le point d'intersection des droites (BJ) et (AC).

Démontrer que :

1) I est le milieu de [CC'],

2) les droites (MI) et (MJ) sont parallèles respectivement à (AB) et à (AC),

3) les points I et J sont équidistants de M.

(4 points)

II. On donne trois points A, B et C non alignés.
Pour $m \in \mathbb{R}$, on note G_m le barycentre des points pondérés $(A , 1 - m)$, $(B , 2m)$ et $(C , - m)$.

1) Montrer que G_m existe quelle que soit la valeur de m.

2) Préciser la position de G_0 et G_1.

3) Montrer que lorsque m décrit $\mathbb{R}$, le point G_m décrit une droite Δ passant par A.

(4 points)

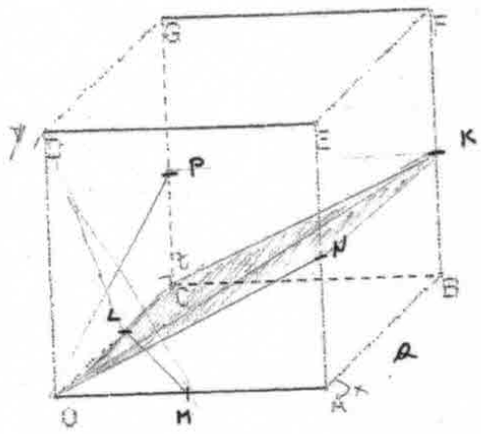
III. Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque dont les diagonales se coupent en un point O.
Soient E le point d'intersection de la droite (BD) avec la parallèle à la droite (AD) passant par C et F le point d'intersection de la droite (BD) avec la parallèle à la droite (AB) passant par C.
Soit Δ la droite passant par E et parallèle à la droite (CD) et Δ' la droite passant par F et parallèle à la droite (BC).

Démontrer que les droites Δ, Δ' et (AC) sont concourantes.

Indication : on pourra utiliser l'homothétie de centre O qui à A associe C et le fait que les droites (AC), (BC) et (CD) sont concourantes.

(4 points)

IV. Soient O, A, B, C, D, E, F et G les sommets d'un cube dont les arêtes verticales sont [OD], [AE], [BF] et [CG].



L, K, M, N, et P sont les milieux des arêtes [OC], [BF], [OA], [AE] et [CG].
La longueur de chaque arête est désignée par a.

1) Montrer que les droites (ON) et (DM) sont orthogonales.

2) Vérifier : a) le plan (ONK) est orthogonal à la droite (DM)
b) le plan (OPK) est orthogonal à la droite (DL)

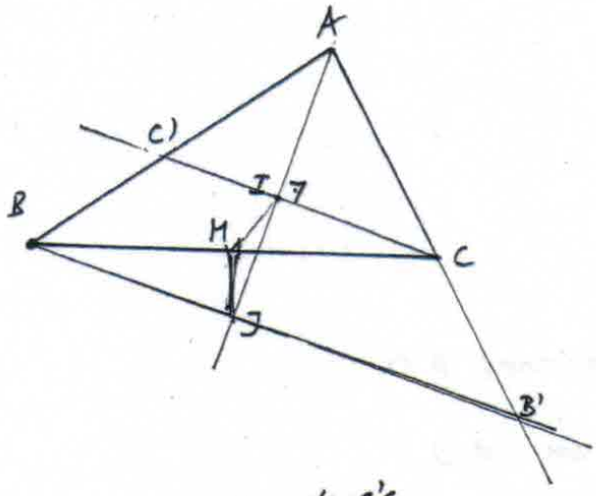
3) Déduire que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

4) Soit H le point d'intersection de la droite (OK) avec le plan (DLM).
On pose $\overline{OH} = \lambda\overline{OK}$.
Montrer que $\overline{OM} \bullet \overline{OK} = \overline{OH} \bullet \overline{OK} = \frac{a^2}{2}$ et déduire que $\lambda = \frac{2}{9}$

5) Calculer l'aire du triangle DLM et le volume du tétraèdre ODLM.

(8 points)

I



1) I est le milieu de c'c

Les triangles AIc et AIC' sont indirectement semblables puisque $A\hat{I}C = c'\hat{I}A = 90°$ et $I\hat{A}C = c'\hat{A}I = \frac{\hat{A}}{2}$ puisque bissectrice

De plus $\overline{AI}$ est un côté commun

D'où $\overline{AC} = \overline{AC'}$ et $\overline{IC'} = \overline{IC}$. Donc I est le milieu de $[C'C]$.

2) $(HI) \parallel (AB)$ et $(HJ) \parallel (AC)$

Comme $\frac{\overline{CI}}{\overline{CC}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CB}}$ d'après la réciproque du théorème de Thalès

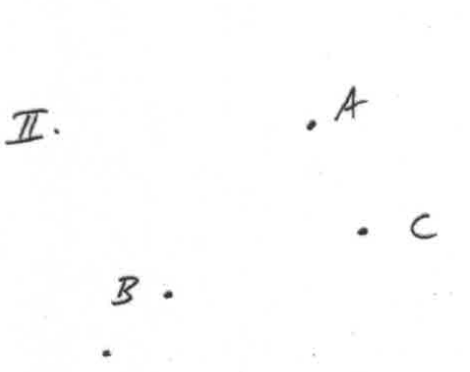
$\frac{1}{2}$ $\frac{H}{1}$

on a que $(IH) \parallel (BC') = (AB)$

) $\overline{IH} = \overline{JH}$

Théorème des milieux

II.



1) Le point G_m existe $\Leftrightarrow (1-m) + 2m + (-m) \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 - m + 2m - m \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 \neq 0$ toujours vrai !

2) G_0 est le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,-2)$

$\Leftrightarrow \vec{G_0A} - 2\vec{G_0B} - \vec{G_0C} = 0 \quad \Rightarrow G_0 = A$

$\Leftrightarrow \vec{G_0A} + 2\vec{BG_0} + 2\vec{BG_0} + \vec{CG_0} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{BA} = 2\vec{BG_0} + \vec{CG_0}$

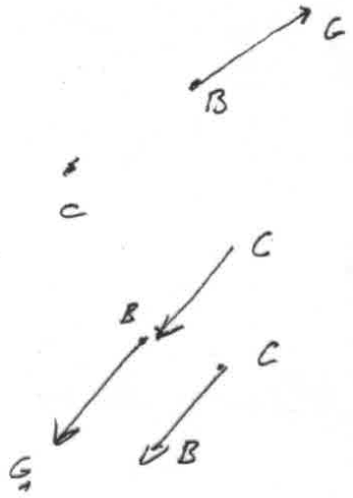
G_1 est le barycentre de $(A,0)$ $(B,2)$ $(C,-1)$

$\Leftrightarrow 2\vec{G_1B} - \vec{G_1C} = 0$

$\Leftrightarrow 2\vec{G_1B} + \vec{G_1B} + \vec{CG_1} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{CB} = \vec{BG_1}$

$\Leftrightarrow \vec{BG_1} = \vec{CB}$



3) $(1-m)\,\vec{G_mA} + 2m\,\vec{G_mB} - m\,\vec{G_mC} = \vec{0}$

$\vec{G_mA} = -m\,\vec{G_mA} + 2m\vec{G_mB} - m\,\vec{G_mC} = \vec{0}$

$\vec{G_mA} + m\,\vec{AG_m} + 2m\,\vec{G_mB} + m\,\vec{G_mB} + m\,\vec{CG_m} = 0$

$\vec{G_mA} + m\,\vec{AB} + m\cdot\vec{CB}$

$\vec{G_mA} = m(\vec{BA} + \vec{BC})$

$\vec{G_0O} = m(\vec{BA} + \vec{BC}) + \vec{AO}$

Donc les points G_m décrivent une droite. pour $m = 0$

$\rightarrow \vec{G_0O} = \vec{AO}$

.. par A.

IV.

1) Pour montrer que 2 droites sont orthogonales il faut que $\vec{ON} \cdot \vec{DH} = 0$

$\hookrightarrow (\vec{OA} + \vec{AN}) \cdot (\vec{DE} + \vec{EN}) = 0$

$\hookrightarrow \vec{OA}\cdot\vec{DE} + \vec{OA}\cdot\vec{EN} + \vec{AN}\cdot\vec{DE} + \vec{AN}\cdot\vec{EN} = 0$ ← revoir !

$\hookrightarrow a^2 + 0 + 0 \leftarrow \vec{AN}\cdot\vec{NE} \overset{?}{=} 0$

$\hookrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = 0$

Dans $(O; \frac{\vec{OA}}{a}; \frac{\vec{OD}}{a}; \frac{\vec{OZ}}{a})$

2) a) $\vec{ON}\begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{NK}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +a \end{pmatrix}$

$\vec{ON} \wedge \vec{NK} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} \\ -a^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{DH} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{DH} = \frac{1}{a}(\vec{ON} \wedge \vec{NK})$

Donc $\vec{DH}$ est $\perp$ (ONK)

b) pareil

3) on a a) $ON \perp DH$
$OK \perp DH$

b) $OP \perp DL$
$OK \perp DL$

$\Rightarrow OK \perp (DHL)$

4)

II.

I. Donner la définition de symétrie orthogonale. (5)

4) $\vec{OH} \cdot \vec{OK} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$

et $= \frac{a^2}{2}$

~~$\vec{OH} \cdot \vec{OK} =$~~

$\vec{OH} \cdot \vec{OK} = (\vec{OH} + \vec{HM}) \cdot \vec{OK}$

$= \vec{OH} \cdot \vec{OK} + \vec{HM} \cdot \vec{OK}$

$= \lambda \vec{OK} \cdot \vec{OK} + \vec{HM} \cdot \vec{OK}$ | à voir

$\lambda \cdot \vec{OK} \cdot \vec{OK} = \frac{a^2}{2}$

$\lambda = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\|\vec{OK}\|^2}$

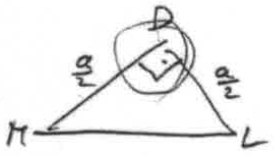
$\lambda = \frac{a^2}{2} \frac{4}{9a^2}$

$\lambda = \frac{2}{9}$

$\begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}$

$= \frac{9a^2}{4}$

5) Aire DLM → triangle rectangle en D



→ Aire = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

$= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{8}$ | à revoir

Comme OH est ⊥ à DLM

Il s'agit de la hauteur du tétraèdre ODLM.

$\mathcal{V}_{ODLM} = \frac{1}{3} \mathcal{S}_{DLM} \cdot \overline{OH}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2a}{3}$

$= \frac{1}{3} \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3}$

$= \frac{a^3}{18}$

$\frac{2}{9} \cdot \|\vec{OK}\|$

$= \frac{2}{9} \cdot \frac{9a^2}{4}$

$\frac{a^2}{2}$

$\frac{2}{9} \cdot \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{6a}{18}$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS
Jeudi, le 28 avril 2005
15.00 – 18.00 heures

QUESTION 1 : (4 points)

1. Soient deux urnes U_1 et U_2 ; la première contient 6 boules blanches et 4 boules noires, la seconde 8 boules blanches et 2 boules noires. D'une des deux urnes, choisie au hasard (il y a équiprobabilité), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne choisie ; si la boule est blanche, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule est noire, on recommence le tirage dans l'autre urne. Cette règle est appliquée à chaque tirage, et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.
   Soit p_n ($n \in \mathbb{N}^*$) la probabilité pour que le $n^{ième}$ tirage se fasse dans l'urne U_1.
   a. déterminer p_1 et p_2 .
   b. montrer qu'il existe une relation de récurrence vérifiée par la suite(p_n) de la forme $p_n = a \cdot p_{n-1} + b$, $n > 1$, a et b étant des réels que l'on déterminera.

2. Soit la suite réelle (u_n) dont le terme général est défini pour n entier strictement positif par : $u_1 = 2$
   $u_n = 0{,}4 \cdot u_{n-1} + 0{,}2$; $n > 1$

   a. déterminer le réel α tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ ($n \in \mathbb{N}^*$) soit une suite géométrique.
   b. en déduire que (u_n) est convergente.
   Trouver ensuite la limite de p_n si $n \to \infty$.

QUESTION 2 : (4 points)

Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2\cos\theta$
$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout entier naturel n

1. Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

   $u_n = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{\theta}{2^n}$
   Déterminer la limite de (v_n) si $n \to \infty$.

4. En déduire que (u_n) converge ; quelle est sa limite si n tend vers ∞ ?

QUESTION 3 (6 points)

1. Soit le nombre complexe $z = \cos\alpha + i\cdot\sin\alpha$ où α désigne un réel.

   a. écrire sous forme trigonométrique $\frac{1}{z}$, z^n et $\frac{1}{z^n}$

   en déduire $z - \frac{1}{z}$ et $z^n - \frac{1}{z^n}$ en fonction de $\sin\alpha$ et de $\sin(n\alpha)$.

   b. calculer de deux façons $\left(z - \frac{1}{z}\right)^5$ en fonction de α

   c. résoudre l'équation : $16\cdot\sin^5 x = 10\cdot\sin x - 6\cdot\sin 3x$

2. Soit $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{5}$

   a. calculer z^5 et en déduire que : $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

   b. déduire de a. les valeurs de $X = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$

   $$Y = \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5}$$

3. Soit x un nombre réel et z le nombre complexe $\cos x + i\cdot\sin x$

   a. exprimer cosx et sinx en fonction de z et de 1/z
   b. montrer que, pour que le réel x vérifie l'égalité : $\cos x + \sqrt{3}\cdot\sin x = \sqrt{2}$ (1), il faut et il suffit que z soit une racine d'une équation du 2nd degré (E) que l'on écrira.

   c. résoudre l'équation (E) et écrire les solutions sous forme trigonométrique et en déduire les solutions de (1).

QUESTION 4 : (6 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer sans calculs l'ensemble E des points M de P d'affixes z tels que
$$|z - 3| = 2$$
2. Montrer que l'ensemble D des points M de P dont l'affixe vérifie
$$(E) \quad |z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$$
est une droite dont on donnera une équation.
3. A tout nombre complexe différent de 2i on associe le complexe $Z = \dfrac{z+1}{z-2i}$
   a. déterminer l'ensemble E_1 des points M images de z tels que Z soit réel .
   b. déterminer l'ensemble E_2 des points M images de z tels que $\pi/2$ soit un argument de Z .
   c. déterminer l'ensemble des points M d'affixe z ($z \neq -3$) tels que $\dfrac{z+3}{\overline{z}+3}$ soit un imaginaire pur .

Épreuve d'algèbre et probabilités du 28 avril 2005

Question 1:

1. 

$P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$

$P_{U_1}(B) = \frac{6}{10}$ $\quad P_{U_2}(B) = \frac{8}{10}$

$P_{U_1}(N) = \frac{4}{10}$ $\quad P_{U_2}(N) = \frac{2}{10}$

a. $p_1 = P(B_1) = \frac{1}{2}$

$p_2 = P(U_1)\, P_{U_1}(B) + P(U_2)\, P_{U_2}(N)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{20}$

b. $p_n = p_{n-1} \cdot P_{U_1}(B) + (1 - p_{n-1})\, P_{U_2}(N)$

$= p_{n-1} \cdot \frac{6}{10} + \frac{2}{10} - p_{n-1} \cdot \frac{2}{10}$

$= \frac{4}{10} p_{n-1} + \frac{2}{10}$

$= 0{,}4\, p_{n-1} + 0{,}2.$

2. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 0{,}4 \cdot u_{n-1} + 0{,}2 \end{cases}$

a. $v_n = u_n - \alpha$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$ $\qquad v_{n+1} = q v_n$

$= 0{,}4\, u_n + 0{,}2 - \alpha$ $\qquad = q u_n - q \cdot \alpha$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}4 u_n + 0{,}2 - \alpha = q u_n - q\alpha$

Cette relation est vraie $\forall u_n$. D'où

$q = 0{,}4$ et $0{,}2 - \alpha = -q\alpha$

$\Leftrightarrow 0{,}2 = (1 - q)\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}2}{0{,}6} = \alpha \quad \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

D'où : $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ est une suite géométrique.

b) On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q = 0,4 \ (<1)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0,4)^{n-1} \underbrace{\left(2-\frac{1}{3}\right)}_{=v_1} = 0$

Comme $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ on a $u_n = v_n + \frac{1}{3}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(v_n + \frac{1}{3}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{3}$.

Question 2:

$$\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases} \qquad \theta \in [0; \tfrac{\pi}{2}]$$

1. $u_0 = 2\cos\theta$

$u_1 = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}$

$u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\theta}}}$

2. $u_0 = 2\cos\theta$ et $u_1 = \sqrt{2+2\cos\theta}$

$= \sqrt{2(2\cos^2\frac{\theta}{2})}$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}$

Supposons la relation $u_n = 2\cos(\frac{\theta}{2^n})$ vrai au rang n et prouvons-la au rang $n+1$:

$u_{n+1} = \sqrt{2+2u_n}$, comme $u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

$= \sqrt{2(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}$ on a $2\cos^2 x = 1+\cos 2x$

$= \sqrt{2(2\cos^2(\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{2}))}$

$= \sqrt{4\cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

3. $v_n = \frac{\theta}{2^n}$

$0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta}{2^n} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\underbrace{\cos(\frac{\theta}{2^n})}_{\to 1} = 2$. ($\frac{\theta}{2^n} \to 0$)

Question 3

1. $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. $\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{e^{in\theta}} = e^{-in\theta} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

$z - \frac{1}{z} = \cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2i\sin\alpha$

$z^n - \frac{1}{z^n} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha + i\sin n\alpha = 2i\sin n\alpha$.

b. $(z - \frac{1}{z})^5 = (2i\sin\alpha)^5 = 32i\sin^5\alpha$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5

$(z - \frac{1}{z})^5 = z^5 - 5z^3 + 10z - 10\frac{1}{z} + 5\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5}$

$= (z^5 - \frac{1}{z^5}) - 5(z^3 - \frac{1}{z^3}) + 10(z - \frac{1}{z})$

$= 2i\sin 5\alpha - 10i\sin 3\alpha + 20i\sin\alpha$

c. $16\sin^5 x = 10\sin x - 6\sin 3x$

$\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x = 10\sin x - 6\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin 5x + \sin 3x = 0$ $\quad \sin\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x \cdot \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0$ ou $\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 0\ [\pi]$ $\qquad x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow x = 0\ [\frac{\pi}{4}]$

2. $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

a. D'après 1.a. $z^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

on a $z^5 - 1 = 0$. De plus $\frac{z^5-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

$\Leftrightarrow z^5 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 0$

Comme $z \neq 1$ on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

b. $1+z+z^2+z^3+z^4=0$

$\Leftrightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$

$+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0 \\ \sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}=0 \end{cases}$

On en déduit que $x=-1$ et $y=0$.

3. a) $x\in\mathbb{R}$ et $z=\cos x+i\sin x$.

On a $z+\frac{1}{z}=\cos x+i\sin x+\cos x-i\sin x$

$=2\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

et $z-\frac{1}{z}=\cos x+i\sin x-\cos x+i\sin x$

$=2i\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$

b. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2} \Leftrightarrow az^2+bz+c=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{3}\,\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2i}z^2-\frac{\sqrt{3}}{2i}-\sqrt{2}z=0$

$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}i}{2}z^2-\sqrt{2}z+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=0 \quad (E)$

c. $\Delta=8-4(1+3i)=-8=(2\sqrt{2}i)^2$

$z=\frac{2\sqrt{2}\pm 2\sqrt{2}i}{2(1-\sqrt{3}i)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i\pm(\sqrt{2}i-\sqrt{6})}{1+3}$

$=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$, $\sin x=\frac{\pm\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ $\nearrow \frac{\pi}{2}$ $\searrow \frac{\pi}{12}$

Question 4

1. Comme la distance au carré de z par rapport à $\Omega(3)$ est une constante ($=2$), l'ensemble E est le cercle de centre $\Omega(3)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2. (E) $|z-1-2i| = |z-7+2i|$ on note $z = x+iy$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2 = (x+7)^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4 = x^2+14x+49+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow 8y = 12x+48$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x+6$

Il s'agit de la médiatrice de [AB] avec $z_A =$

et $z_B =$

3. $Z = \frac{z+1}{z-2i}$ $z \neq 2i$.

a) $Z = \frac{x+iy+1}{x+iy-2i} = \frac{x+1+iy}{x+i(y-2)} \cdot \frac{-iy+2i}{x-i(y-2)}$

$= \frac{x^2+x+iy+y^2-iy-iy+2xi+2i-2y}{x^2-(y+2)^2}$

$= \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y+2)^2} + i \cdot \frac{-y+2x+2}{x^2+(y+2)^2}$

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z)=0 \Leftrightarrow 2x-y+2=0 \Leftrightarrow y = 2x+2 : D'$

b) $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

$Z = \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2-(y+2)^2} + i \frac{-y+2x+2}{x^2-(y+2)^2}$

$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$= 0 + i1$

$(HA,HB) = \frac{\pi}{2}$ donc

$Z = -Z$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+y^2-2y = 0 \\ -y+2x+2 = x^2+(y^2+2y+4) \end{cases}$

$(x^2+\frac{1}{2})^2 + (y^2-1) - 1 - \frac{1}{4} = 0$ et $(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$(x^2+\frac{1}{2})^2 + (y^2-1)^2 = \frac{5}{4}$

Ctrl.

$E_2 = C_1 \cap C_2$ $C_1 = C(\Omega_1(-\frac{1}{2};1); \frac{\sqrt{5}}{2})$, ~~$C_2 = C(\Omega_2(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$~~

c) $\frac{z+3}{\bar{z}+3} = \frac{x+3+iy}{x+3-iy} \cdot \frac{x+3+iy}{x+3+iy} = \frac{(x+3)^2+2i(x+3)y-y^2}{(x+3)^2+y^2}$

$= \frac{(x+3)^2-y^2}{(x+3)+y^2} + i\,\frac{2(x+3)y}{(x+3)^2+y^2}$

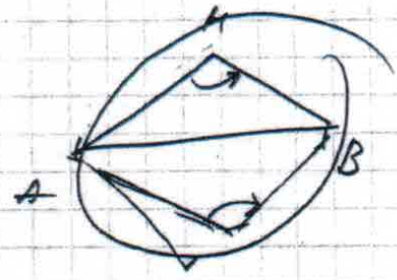
Imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Re = 0

$\Leftrightarrow (x+3)^2-y^2=0 \Leftrightarrow y^2=(x+3)^2$

$\Leftrightarrow y = x+3$ ou $y=-x-3$

$D_1 : y = x+3$ et $D_2 : y=-x-3$

$E_3 = D_1 \cup D_2$



Concours de recrutement — Novembre 2005

Algèbre et Probabilités

I. Trigonométrie (les deux questions sont indépendantes)

1. Soit ABC un triangle quelconque tel que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ où a, b et c sont des réels strictement positifs.

   Démontrer: $2a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2cot\,\hat{A} = cot\,\hat{B} + cot\,\hat{C} \Rightarrow cos(\hat{B} - \hat{C}) = \dfrac{1 - 2cos^2\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{cos\,x} + \sqrt{sin\,x} = 1$

II. Suites (les deux questions sont indépendantes)

1. On considère la suite (u_n) où n est un nombre naturel définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \end{cases}$$

   Etudier si la suite converge et déterminer, le cas échéant, sa limite.

2. Montrer que les trois réels $3k^2 + k + 1$, $2k^2 + k$ et $4k^2 - 6k + 1$, k étant un réel, sont les trois premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   Caractériser cette suite.

III. Probabilités

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. Soit p la probabilité pour que, en tirant simultanément 3 boules, elles soient toutes blanches. Si on ajoute une boule blanche dans l'urne avant l'expérience, cette probabilité se trouve augmentée d'un tiers. Calculer r.

IV. Nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1. Démontrer que, si a et b sont des réels quelconques, les deux nombres complexes

$$\frac{a+i}{a-i} \qquad et \qquad \frac{b+i}{b-i}$$

   ont même module. Sachant que ces deux nombres sont les affixes des points A et B et qu'ils ont comme arguments φ_A et φ_B, démontrer que:

$$tan\frac{\varphi_B - \varphi_A}{2} = \frac{a-b}{ab+1}$$

2. Si $a = -2$, déterminer b pour que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Répartition des points: 3,5+3,5 ; 3,5+1,5 ; 3,5 ; 3,5+1

Épreuve d'algèbre et Probabilités du novembre 2005

I. D'après Al-Kashi on a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

$$(a^2+b^2+c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc\cos\hat{A} - 2ac\cos\hat{B} - 2ab\cos\hat{C})$$

~~$2a^2 = b^2+c^2 \Leftrightarrow 2a^2$~~

$$2a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$$

$$2b^2 + 2c^2 - 4bc\cos\hat{A} = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} - 2ab\cos\hat{C}$$

$$\underbrace{b^2 + c^2 - 2a^2}_{=0} \mid -4bc\cos\hat{A} = -2ac\cos\hat{B} - 2ab\cos\hat{C}, \quad (1)$$

on a : $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$

$\Leftrightarrow 2S = ab\sin\hat{C} = ac\sin\hat{B} = bc\sin\hat{A}$ (2)

(2) & (1) $\Leftrightarrow \dfrac{-4bc\cos\hat{A}}{bc\sin\hat{A}} = \dfrac{-2ac\cos\hat{B}}{ac\sin\hat{B}} - \dfrac{2ab\cos\hat{C}}{ab\sin\hat{C}}$

$\Leftrightarrow -4\cos\hat{A} = -2\cot\hat{B} - 2\cot\hat{C}$

$\Leftrightarrow 2\cos\hat{A} = \cot\hat{B} + \cot\hat{C}$

$$2\cot\hat{A} = \cot\hat{B} + \cot\hat{C} \Rightarrow \cos(\hat{B}-\hat{C}) = \frac{1-2\cos^2\hat{A}}{\cos\hat{A}}$$

$\&\ \frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}}$ ...

2. $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$

C.E. $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\sin x}$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{\cos x} + \cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow 1 + \cos x - \sin x = 2\sqrt{\cos x}$

$\Leftrightarrow 1 + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x - 2\sin x - 2\cos x \sin x = 4\cos x$

$\Leftrightarrow 2 - 2\sin x - 2\cos x \sin x - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x - \sin x (1 + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \cos x = \sin x (1 + \cos x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{x}{2} = \sin x$

$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{x}{2} + \tan^4 \frac{x}{2} = 2\tan \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \tan^4 \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{x}{2} - 2\tan \frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} (\tan^3 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} - 2) = 0$

1ère solution : $\tan \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0 [\pi]$
$x = 0 [2\pi]$.

On pose $y = \tan \frac{x}{2}$

$y^3 + y - 2 = 0$

	1	0	1	−2
1		1	1	2
	1	1	2	0

$y^3 + y - 2 = (y - 1)(y^2 + y + 2)$

$\tan \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$y^2 + y + 2 = 0$ $\quad \Delta = 1^2 - 8$
↖ ne s'annule jamais

$S = \{ 0 [2\pi] ; \frac{\pi}{2} [2\pi] \}$

II. 1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1 \end{cases}$

$u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt[3]{4} - 1 \approx 0{,}587\ldots$

$u_2 = \sqrt[3]{u_1 + 1} - 1 \simeq 0{,}166529$

Montrons par récurrence que $u_n \geq 0$:

Supposons le vrai pour n et prouvons-le au rang $n+1$:

$u_{n+1} = \sqrt[3]{\underbrace{3u_n + 1}_{\geq 0}} - 1 \geq 1 - 1 = 0$ (≥ 1)

$\boxed{u_n \geq 0}$

Posons $\boxed{f(x) = \underbrace{\sqrt[3]{3x+1}}_{u_{n+1}} - 1 - \underbrace{x}_{-u_n}}$

Étudions le signe de $f(x)$: $\forall x \in [0; +\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \frac{1}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}} - 1$

$= \frac{1 - (3x+1)^{\frac{2}{3}}}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}$

$\boxed{f'(x) = 0} \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$ (exclue car $u_n \geq 0$) $\quad 3x + 1 = -1$

$3x =$

Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ et $x > -\frac{2}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = 0$

D'où $\boxed{f \searrow \text{ sur } [0; +\infty[} \Rightarrow f \leq \text{ sur } [0; +\infty[$

Finalement : $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \Rightarrow (u_n) \searrow$.

Comme $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et minorée (par 0)}}$, elle converge. La limite ℓ vérifie

$\ell = \sqrt[3]{3\ell + 1} - 1$

$\Leftrightarrow (\ell + 1)^3 = 3\ell + 1$

$\Leftrightarrow \ell^3 + 3\ell^2 + 3\ell + 1 = 3\ell + 1$

$\Leftrightarrow \ell^2(\ell + 3) = 0$ $\quad \boxed{\ell = 0}$ ou $\ell = -3$ ← impossible car $u_n \geq 0$.

Donc (u_n) converge vers 0.

2) $u_0 = 3k^2 + k + 1$

$u_1 = 2k^2 + k$ et $u_n = u_{n-1} + r = u_n = u_0 + nr$

$u_2 = 4k^2 - 6k + 1$

$u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r$

$3k^2 + k + 1 + r = 2k^2 + k$ (1)

$2k^2 + k + r = 4k^2 - 6k + 1$

$k^2 - 1 = -2k^2 + 7k - 1$

$3k^2 - 7k = 0$

$u_0 = 3k^2 + k + 1$, $u_1 = 2k^2 + k$, $u_2 = 4k^2 - 6k + 1$

$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr$

$u_1 = u_0 + r \Rightarrow 2k^2 + k = 3k^2 + k + 1 + r \Rightarrow r = -k^2 - 1$ (1)

$u_2 = u_1 + r \rightarrow 4k^2 - 6k + 1 = 2k^2 + k + r \Rightarrow r = 2k^2 - 7k + 1$ (2)

(1) = (2) $\Leftrightarrow -k^2 - 1 = 2k^2 - 7k + 1$

$\Leftrightarrow -3k^2 + 7k - 2 = 0$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

D'où $k_{1,2} = \frac{-7 \pm 5}{-6} \Leftrightarrow \begin{matrix} k_1 = \frac{1}{3} \\ k_2 = 2 \end{matrix}$

<u>Pour $k = \frac{1}{3}$</u> $r = -k^2 - 1$ $u_0 = \frac{5}{3}$, $u_1 = \frac{5}{9}$, $u_2 = -\frac{5}{9}$

$r = -\frac{1}{9} - 1 = -\frac{10}{9}$

<u>Pour $k = 2$</u> $r = -2^2 - 1 = -5$ $u_0 = 15$, $u_1 = 10$, $u_2 = 5$

III. Probabilités

b boules blanches et r boules rouges. On tire simultanément 3 boules.

$p = P(\text{"on tire 3 boules blanches"})$

Si on a $(b+1)$ boules blanches $P(\text{"on tire 3 boules blanches"}) = p + \frac{1}{3}$ ou $= \frac{1}{3}p + p$? $= \frac{4}{3}p$

$$p = \frac{C_b^3}{C_{r+b}^3} = \frac{b!}{3!(b-3)!} \cdot \frac{3!(r+b-3)!}{(r+b)!}$$

$$= \frac{(b-2)\cdot(b-1)\cdot b}{(r+b-2)(r+b-1)(r+b)}$$

$$p' = \frac{C_{b+1}^3}{C_{r+b+1}^3} = \frac{(b+1)!}{3!(b-2)!} \cdot \frac{3!(r+b-2)!}{(r+b+1)!}$$

$$= \frac{(b+1)(b)(b-1)}{(r+b+1)(r+b)(r+b-1)}$$

$$p' = \frac{4}{3}p \Leftrightarrow \frac{(b+1)\cdot b\cdot(b-1)}{(r+b+1)(r+b)(r+b-1)} = \frac{4}{3}\frac{(b-2)(b-1)b}{(r+b-2)(r+b-1)(r+b)}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)(r+b-2) = \frac{4}{3}(b-2)(r+b+1)$$

$$\Leftrightarrow 3(br+b^2-2b+r+b-2) = 4(br+b^2+b-2r-2b-2)$$

$$\Leftrightarrow 3br+3b^2-6b+3r+3b-6 = 4br+4b^2+4b-8r-8b-8$$

$$\Leftrightarrow -b^2-br-10b+11r+11b+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2-br+b+11r+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2+b+2+r(-b+11) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{b^2-b-2}{-b+11}$$

r et $b \in \mathbb{N}$ et $b \geq 3$

$b=3$: $r = \frac{9-3-2}{-3+11} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$b=4$: $r = \frac{10}{7} \notin \mathbb{N}$

$b=5$: $r=3$ ok

$b=6$: $r = \frac{25}{5} \notin \mathbb{N}$

$b=7$: $r = \frac{40}{4} = 10$ ok

⋮

IV. Nombres complexes

1) Montrons que $\frac{a+i}{a-i}$ et $\frac{b+i}{b-i}$ ont même module :

$$\frac{a+i}{a-i} = \frac{a^2+2ai-1}{a^2+1} = \frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{2a}{a^2+1}\,i$$

$$\left|\frac{a+i}{a-i}\right|^2 = \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2 = \frac{(a^2-1)^2+(2a)^2}{(a^2+1)^2}$$

$$= \frac{a^4-2a^2+1+4a^2}{(a^2+1)^2}$$

$$= \frac{(a^2+1)^2}{(a^2+1)^2} = 1$$

De même pour $\frac{b+i}{b-i}$. D'où $\left|\frac{a+i}{a-i}\right| = 1 = \left|\frac{b+i}{b-i}\right|$

Montrons que $\tan\frac{\varphi_B-\varphi_A}{2} = \frac{a-b}{ab+1}$

On a $z_A = \frac{a+i}{a-i} = 1\cdot e^{i\varphi_A} \rightarrow \cos\varphi_A = \frac{a^2-1}{a^2+1}$ et $\sin\varphi_A = \frac{2a}{a^2+1}$

$z_B = \frac{b+i}{b-i} = 1\cdot e^{i\varphi_B} \rightarrow \cos\varphi_B = \frac{b^2-1}{b^2+1}$ et $\sin\varphi_B = \frac{2b}{b^2+1}$

D'où $\tan\varphi_A = \frac{2a}{a^2-1}$ et $\tan\varphi_B = \frac{2b}{b^2-1}$

(Comme $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}$)

$\left(\tan\frac{\varphi_B-\varphi_A}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi_B-\varphi_A}{2}}{\cos\frac{\varphi_B-\varphi_A}{2}} = \text{_____}\right)$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\tan\frac{p-q}{2} = \frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}}$

$$\tan\frac{\varphi_B-\varphi_A}{2} = \frac{\frac{2b}{b^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}}{\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{b^2-1}{b^2+1}}$$

$$= \frac{2b(a^2+1)-2a(b^2+1)}{(a^2-1)(b^2+1)+(b^2-1)(a^2+1)}$$

$$= \frac{2a^2b+2b-2ab^2-2a}{a^2b^2+a^2-b^2-1+a^2b^2+b^2-a^2-1}$$

$$= \frac{2(a^2b-ab^2-a+b)}{2(a^2b^2-1)}$$

$$= \frac{a(ab-1)-b(ab-1)}{(ab-1)(ab+1)} = \frac{a-b}{ab+1}$$

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Mercredi, le 25 avril 2006
15h-18h

même concours que mai 2006

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1) Etudiez la continuité et la dérivabilité de f.

2) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{\ln x}$ et étudiez l'existence d'asymptotes au graphe cartésien de f.

3) Etudiez le sens de variation de f et représentez f dans un repère orthonormé.

4) Démontrez que f possède une application réciproque f^{-1} définie sur un ensemble J à déterminer. Etudiez la dérivabilité de f^{-1}. Calculez $(f^{-1})'(1)$. **5 points**

II. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x}$.

1) Etudiez f (limites ; dérivabilité en 0 ; sens de variation ; concavité ; points d'inflexion éventuels ; courbe représentative G_f).

2) Utilisez le théorème de l'inégalité des accroissements finis, pour encadrer f sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ par des fonctions affines. Encadrez $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$ à 0,025 près. **4 points**

deux des plus de défaits en mai

III. Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=\sqrt{mx^2+x+1}$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminez l'ensemble de définition D_m suivant les valeurs du paramètre réel m.

2) Déterminez l'ensemble des points communs à toutes les courbes C_m ($m\in\mathbb{R}$).

3) Démontrez que pour chaque réel non nul m, la courbe C_m admet un axe de symétrie.

4) Déterminez les équations des asymptotes obliques éventuelles. **6 points**

IV. Calculez les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x-1)^3}{\sqrt{5-2x}}\,dx \qquad C=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

$$B=\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx \qquad D=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)\,dx$$

5 points

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Mercredi, le 3 mai 2006
15h-18h

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1) Etudiez la continuité et la dérivabilité de f.

2) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{\ln x}$ et étudiez l'existence d'asymptotes au graphe cartésien de f.

3) Etudiez le sens de variation de f et représentez f dans un repère orthonormé.

4) Démontrez que f possède une application réciproque f^{-1} définie sur un ensemble J à déterminer. Etudiez la dérivabilité de f^{-1}. Calculez $(f^{-1})'(1)$. **5 points**

II. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x}$.

1) Etudiez f (limites ; dérivabilité en 0 ; sens de variation ; concavité ; points d'inflexion éventuels ; courbe représentative G_f).

2) A l'aide du théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrez que pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, $\dfrac{-1}{2e}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\le f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$. Encadrez $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,dx$ à 0,025 près.

4 points

III. Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=\sqrt{mx^2+x+1}$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminez l'ensemble de définition D_m suivant les valeurs du paramètre réel m.

2) Déterminez l'ensemble des points communs à toutes les courbes C_m $(m\in\mathbb{R})$.

3) Démontrez que pour chaque réel non nul m, la courbe C_m admet un axe de symétrie.

4) Déterminez les équations des asymptotes obliques éventuelles. **6 points**

IV. Calculez les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x-1)^3}{\sqrt{5-2x}}\,dx \qquad C=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

$$B=\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx \qquad D=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)\,dx$$

5 points

I $f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad \text{dom } f = \mathbb{R}_+$

1) f est continue sur $]0;+\infty[$, comme composée et produit de fonctions continues

$\lim\limits_{x\to 0} e^{(1+\frac{1}{x})\cdot \ln x} = 0 = f(0)$ (car $(1+\frac{1}{x})\cdot\ln x \to -\infty$) donc f est continue en 0.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} = 0$ (car $\frac{1}{x}\cdot\ln x \to -\infty$)

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(1+\frac{1}{x})\cdot\ln x} = +\infty$ (car $(1+\frac{1}{x})\cdot\ln x \to +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$ (car $\frac{\ln x}{x} \to 0$)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $\dfrac{f(x)-x}{\ln x} = \dfrac{x^{1+\frac{1}{x}} - x}{\ln x} = \dfrac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x} = \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)-x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{Y\to 0} \dfrac{e^Y - 1}{Y} = 1$ (car $\lim \frac{e^u - 1}{u} = \lim \frac{(e^u)'}{u'}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{f(x)-x}{\ln x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to+\infty} = +\infty$, B.P. dans la dir. de la droite d'éq. $y=x$.

3) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln x} \cdot \left[\frac{-1}{x^2}\cdot\ln x + (1+\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x}\right]$

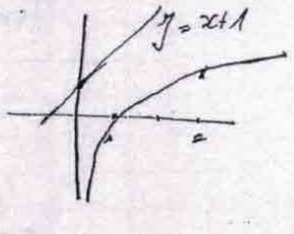
$= \underbrace{e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(x+1-\ln x\right)}_{>0 \ (*)} > 0$

$g(x) = x+1-\ln x$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$

x	0		1	$+\infty$
g'	‖	$-$	0	$+$
g	‖ ↘		2 (MIN)	↗

donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.



En effet :

$g(x) = x+1-\ln x$

$\text{dom } g =]0;+\infty[$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$

ainsi $g > 0$

4) f ↗ croissante et continue → bijective de $I]0;+\infty[$ dans $f(I]0;+\infty[) = I]f(0);\lim_{+\infty} f[= I]0;+\infty[$ ($f(0) = 0$)

II

1) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$

f est continue sur $\mathrm{dom} f = [0;+\infty[$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{-x}$$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot 2\sqrt{x} - (1-2x)\cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} e^{-x} + \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{-x} \cdot (-1)$$

$$= \frac{-4x - 1 + 2x - 2x + 4x^2}{4x\sqrt{x}} e^{-x}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x - 1}{4x\sqrt{x}} e^{-x}$$

$\Delta = 32$ $\quad x_1 = \frac{4+4\sqrt{2}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$

$\frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}2$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f''	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f'	‖	$+$	0	$-$		$+$	
f	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘		↗	0

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ A.H. : $y = 0$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ demi-tangente verticale en 0

f n'est pas dérivable en 0

2) a) f' est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2};1]$,

donc pour tout $x \in [\frac{1}{2};1]$, $\quad f'(1) \leq f'(x) \leq f'(\frac{1}{2})$

$\quad \frac{-1}{2e} \qquad\qquad 0$

Pour tout $x \in]\frac{1}{2};1]$,

f est continue sur $[\frac{1}{2};x]$

f est dérivable sur $]\frac{1}{2};x[$

pour tout $t \in]\frac{1}{2};x[$, $\quad \frac{-1}{2e} \leq f'(t) \leq 0$.

Donc, par le théorème de l'inégalité des accroissements finis,

$$\frac{-1}{2e} \leq \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + f(\tfrac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(\tfrac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2e}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

b) D'où : $\left[\frac{-1}{4e}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2e}}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \leq \left[\frac{1}{\sqrt{2e}}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$ a.o.

$$0{,}190 \leq \underbrace{\frac{-1}{16e} + \frac{1}{2\sqrt{2e}}}_{\approx -0{,}02299} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2e}}}_{\approx 0{,}21444} \leq 0{,}215$$

3) Si $m = 0$, $D_0 =]-1, +\infty[$ et C_0 n'admet pas d'axe de symétrie vertical.

Si $m \neq 0$, posons $g_m(x) = mx^2 + x + 1$. La courbe représentative de g_m est une parabole ayant comme axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-1}{2m}$.

Or pour tout $m \neq 0$, D_m est symétrique par rapport à $\frac{-1}{2m}$.

Si $\frac{-1}{2m} + x \in D_m$, alors $\frac{-1}{2m} - x \in D_m$ et

$f_m\left(\frac{-1}{2m} + x\right) = \sqrt{g_m\left(\frac{-1}{2m} + x\right)} = \sqrt{g_m\left(\frac{-1}{2m} - x\right)} = f_m\left(\frac{-1}{2m} - x\right)$.

Par conséquent, C_m est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-1}{2m}$, si $m \neq 0$.

4) **Si $m = 0$**, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

B.P. dans la direction de l'axe des x si $x \to +\infty$.

Si $m > 0$, $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \sqrt{mx^2 + x + 1} = \pm\infty = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{m} \cdot |x| \sqrt{1 + \frac{1}{mx} + \frac{1}{mx^2}}}{x} = \sqrt{m}$ ou $-\sqrt{m}$

$\lim_{x \to +\infty} \left[f_m(x) - \sqrt{m}\, x \right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\sqrt{mx^2+x+1}}_{\to +\infty} - \underbrace{\sqrt{m}\, x}_{\to +\infty} \right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+x+1} + \sqrt{m}\, x}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{m}\right)}$

$= \frac{1}{2\sqrt{m}}$

A.O. : $y = \sqrt{m}\, x + \frac{1}{2\sqrt{m}}$ si $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \left[f_m(x) + \sqrt{m}\, x \right]$

$= \lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{\sqrt{mx^2+x+1}}_{\to +\infty} + \underbrace{\sqrt{m}\, x}_{\to -\infty} \right]$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+x+1} - \sqrt{m}\, x}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{m}\right)}$

$= \frac{-1}{2\sqrt{m}}$

A.O. : $y = -\sqrt{m}\, x - \frac{1}{2\sqrt{m}}$ si $x \to -\infty$

Si $m < 0$, C_m n'admet pas d'A.O. car $D_m = [x_1; x_2]$.

3) $f : x \longrightarrow \sqrt{1-\cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc C existe

$$C = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right| dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + \left[-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\sqrt{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\sqrt{2} = \underline{-2+4\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

4) $f : x \longrightarrow (\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc D existe.

$$D = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)\, dx$$

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
- $\sin^2 x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 3x\cdot\cos 2x$
  $= \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{4}(\cos 5x + \cos x)$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 5x - \frac{1}{4}\cos x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{20}\sin 5x - \frac{1}{4}\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{20}\sin\frac{5\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{20}\cdot\frac{+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{60}$$

A = ... poser $t = 5-2x$

$$B = \int_{1}^{2} e^{\frac{1}{x}}\, dx - \int_{1}^{2} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}\, dx$$

Cuisses

$e^{\frac{1}{x}}$	1
$e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\right)$	x

= ...

Problème 2

$\forall m \in \mathbb{R}$: $f_m(x) = \sqrt{mx^2 + x + 1}$

1) Si $\boxed{m = 0}$, $f_0(x) = \sqrt{x+1}$

$\rightsquigarrow \mathcal{D}_0 = [-1, +\infty[$

Si $\boxed{m \neq 0}$ $\quad$ CE : $mx^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta = 1 - 4m$

1er cas $\quad \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

on obtient : $(\frac{x}{2} + 1)^2 \geq 0$ toujours vrai

$\mathcal{D}_{\frac{1}{4}} = \mathbb{R}$

2e cas $\quad \Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

$mx^2 + x + 1 \geq 0$ toujours vrai

$\mathcal{D}_m = \mathbb{R}$, si $m > \frac{1}{4}$

3e cas $\quad \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Racines : $\frac{-1 - \sqrt{1-4m}}{2m} = x_1$

$\frac{-1 + \sqrt{1-4m}}{2m} = x_2$

Si $0 < m < \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$mx^2 + x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $m < 0$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$mx^2 + x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $\mathcal{D}_m =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$, si $0 < m < \frac{1}{4}$

$\mathcal{D}_m = [x_2, x_1]$, si $m < 0$

2) $y = f_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $y^2 = mx^2 + x + 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $y^2 - x - 1 = mx^2$, $\forall m \in \mathbb{R}$

seul point commun à $\forall m$, donc $x^2 = 0$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $x^2 = 0$ et $y^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ et $y = 1$

Ainsi $(0, 1)$ est le seul point commun des C_i

3) ~~Suivant les valeurs de m, $\Delta = 1 + 4m$ est > 0 ou < 0 donc on a~~
~~des paraboles tournées vers le haut ou vers le bas. Leur sommet~~
~~a pour abscisse $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2m}$ ($m \neq 0$) on a $x = \frac{b}{2a}$ ($m \neq 0$)~~
~~Tous les sommets sont situés sur la droite d'équation $y = x + 1$~~

Nous savons que la parabole d'équation $y = mx^2 + x + 1$ admet comme axe de symétrie la droite $d \equiv x = -\frac{b}{2a}$ (sommet de la parabole)

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2m}$ $(m \neq 0)$

Il en est de même pour C_m.

4) Vu les domaines on peut supposer $\underline{m > 0}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_m(x) = \lim_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} +\infty : \sqrt{m} \\ -\infty : -\sqrt{m} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f_m(x) - \sqrt{m}\, x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + x + 1} - \sqrt{m}\, x}{1} \cdot \frac{\sqrt{mx^2 + x + 1} + \sqrt{m}\, x}{\sqrt{mx^2 + x + 1} + \sqrt{m}\, x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{mx^2 + x + 1 - mx^2}{\sqrt{mx^2 + x + 1} + \sqrt{m}\, x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{m}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

A.O. si $y = \sqrt{m}\, x + \frac{1}{2\sqrt{m}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\sqrt{m'}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+x+1}-\sqrt{m'}x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{m+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{m'}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{m'}}$$

A.O g : $y=-\sqrt{m'}x-\frac{1}{2\sqrt{m'}}$

Concours de recrutement — **Épreuve d'analyse**

Mathématiques — **Jeudi, le 16 novembre 2006**

15.00 – 18.00

I. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on considère les fonctions f_n et g_n définies par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ et $g_n(x) = \dfrac{n\,x^n}{1+x^n}$ et on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ et $J_n = \int_0^1 g_n(x)dx$.

1) Etudiez f_n : dom f_n, branches infinies, sens de variation et extremums éventuels, dérivée seconde, concavité et point d'inflexions éventuels.

2) a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $n \cdot I_n + J_n = n$ après avoir justifié l'existence de I_n et J_n.

b) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $J_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

c) Démontrez que pour tout réel positif t, $0 \le \ln(1+t) \le t$.

d) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $1 - \dfrac{\ln 2}{n} \le I_n \le 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{1}{n^2+n}$.

3) a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}_0 - \{1\}$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$,

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1}{x^n+1} \le \frac{1}{x^n}.$$

b) Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}_0 - \{1\}$,

$$\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \lim_{a \to +\infty} \int_1^a f_n(x)\,dx \le \frac{1}{n-1}.$$

8 points

II. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1) Précisez dom g et montrez que g admet un prolongement par continuité en 0, soit f ce prolongement.

2) Etudiez les branches infinies du graphe cartésien C_f de f.

3) Etudiez le sens de variation de f et étudiez la dérivabilité de f en 0.

4) Démontrez que f possède une application réciproque f^{-1} définie sur un ensemble J à déterminer. Calculez $\left(f^{-1}\right)'(e)$ et $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

5) Tracez les graphes cartésiens de f et f^{-1} et leurs asymptotes dans un repère orthonormé du plan.

7 points

III. 1) Déterminez les primitives de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ sur chacun des intervalles de son domaine. On pourra déterminer des réels a, b, c tels que pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left(2x+3-2\sqrt{x^2-x-4}\right)$.

Déterminez dom g et calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

5 points

Epreuve d'analyse

I 1) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0)$

a) $\mathrm{dom}\, f_n \begin{cases} = \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est pair} \\ = \mathbb{R} - \{-1\} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \dfrac{1}{1+x^n} = 0$ $\quad$ A.H. $y = 0$ $\quad$ (en $+\infty$ et en $-\infty$)

si n est impair : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{1}{1+x^n} = +\infty$ ($1+x^n \to 0^+$)

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{1}{1+x^n} = -\infty$ $\quad$ A.V. : $x = -1$ (si n est impair) $\quad$ 0,5

$\mathrm{dom}\, f_n' = \mathrm{dom}\, f_n$

$$f_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{-n x^{n-1}}{(1+x^n)^2} & \text{si } n > 1 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

$\mathrm{dom}\, f_n'' = \mathrm{dom}\, f_n$

si $n \geq 2$: $f_n''(x) = \dfrac{-n(n-1)x^{n-2}\cdot(1+x^n)^2 + n x^{n-1}\cdot 2\cdot(1+x^n)\cdot n\cdot x^{n-1}}{(1+x^n)^4}$

$$= \frac{n\cdot x^{n-2}\cdot\left[-(n-1)\cdot(1+x^n) + 2n x^n\right]}{(1+x^n)^3}$$

$$= \frac{n\cdot x^{n-2}\cdot\left[-n+1-nx^n+x^n+2nx^n\right]}{(1+x^n)^3}$$

$$= \frac{n\cdot x^{n-2}\cdot\left[(n+1)x^n-(n-1)\right]}{(1+x^n)^3}$$

si $n = 2$: $f_n''(x) = \dfrac{2\cdot(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

si $n = 1$: $f_n''(x) = \dfrac{+2}{(1+x)^3}$

$\left[f_n\left(\sqrt[n]{\tfrac{n-1}{n+1}}\right) = \dfrac{1}{1+\frac{n-1}{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n} \right]$

$\left[\text{si } n \text{ pair } \quad f_n\left(-\sqrt[n]{\tfrac{n-1}{n+1}}\right) = \dfrac{n+1}{2n} \right]$

$n = 1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	‖	$+$	
f'		$-$	‖	$-$	
f	0	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0

pas d'extremum, par de pt d'inflexion

$n = 2$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	0	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘	0

P.I. MAX P.I.

n est impair > 1

x		-1		0		$\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}$		
f''	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f'	$-$	‖	$-$	0	$-$		$-$	
f	0	↘ ‖	↘		↘		↘	0

P.I. P.I.

n est pair > 2

x	$-\infty$		$-\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}$		0		$\sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	0	↗		↗	1	↘		↘	0

P.I. MAX P.I.

1,5

(2)

2) a) f_n et g_n sont des fonctions continues sur $[0;1]$, donc I_n et J_n existent.

0,25 $\quad n \cdot I_n + J_n = n \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx + \int_0^1 \frac{n x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 n\,dx = n$

0,5 b) $J_n = \int_0^1 \frac{n x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \frac{n \cdot x^{n-1}}{1+x^n} \cdot x\,dx = \left[x \cdot \ln|1+x^n|\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$

$= \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$

0,75 c) $\forall t \in [0;+\infty[$, $\ln(1+t) \geqslant 0$.

Soit $h(t) = \ln(1+t) - t$ pour $t \in [0;+\infty[$.

h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $t \in [0;+\infty[$, $h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$.

t	-1	0		$+\infty$
h'		0	$-$	
h		0	$\searrow$	

Donc pour tout $t \geqslant 0$, $h(t) \leqslant 0$,

c'est-à-dire $\ln(1+t) \leqslant t$

d) $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$

1 d'où $\quad 0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

ainsi $\quad \frac{-1}{n+1} \leqslant -\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant 0$

et $\quad \ln 2 - \frac{1}{n+1} \leqslant J_n \leqslant \ln 2$.

Or $\quad I_n = 1 - \frac{1}{n} J_{n+1}$

donc $\quad \frac{-1}{n}\ln 2 \leqslant -\frac{1}{n} J_n \leqslant \frac{-1}{n}\ln 2 + \frac{1}{(n+1)\cdot n}$

et $\quad 1 - \frac{\ln 2}{n} \leqslant I_n \leqslant 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n^2+n}$.

en particulier pour $n = 10$: $\quad \underbrace{1 - \frac{\ln 2}{10}}_{0,93 <} \leqslant I_{10} \leqslant \underbrace{1 - \frac{\ln 2}{10} + \frac{1}{110}}_{< 0,94}$

1,5 3) a) Soit $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$.

On a : $\left(x + \frac{1}{n}\right)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$

$= x^n + x^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{termes positifs}}$

$> x^n + x^{n-1}$

$> x^n + 1$ (car $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$)

Ainsi $\quad \left(x + \frac{1}{n}\right)^n > x^n + 1 > x^n$,

D'où $\quad \frac{1}{\left(x + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{x^n + 1} < \frac{1}{x^n}$.

b) Donc $\quad \left[\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}\right]_1^a < \int_1^a f_n(x)\,dx < \left[\frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^a$.

D'où $\quad \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{e}} - \frac{1}{n-1} < \lim_{a \to +\infty} \int_1^a f_n(x)\,dx < \frac{1}{n-1}$.

II $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

0,75 a) $\mathrm{dom}\, g =]-1;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$ ($\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$)

Donc g admet un prolongement par continuité en 0 défini par :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

0,75 b) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1$ ($\frac{\ln(1+x)}{x} \to 0$) en effet $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$ ($\ln(1+x)\to+\infty$, $x\to+\infty$, f.i. "$\frac{\infty}{\infty}$")

A.H. : $y = 1$ en $+\infty$

$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = +\infty$ ($\ln(1+x)\to-\infty$, $x\to 0^-$, $\frac{\ln(1+x)}{x}\to+\infty$)

A.V. : $x = -1$

0,5 c) f est dérivable sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$

$\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\cdot x - \ln(1+x)}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

Étudions le signe de $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$:

$\forall x \in]-1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}$

x	-1		0	
h'	‖	$+$	0	$-$
h	‖	↗	0	↘

donc pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $h(x) \leq 0$.

x	-1		0		$+\infty$
f'	‖	$-$	$\frac{-e}{2}$	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	e	↘	1

dérivabilité de f en 0 :

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ($f(x)\to 0$, $x\to 0$, f.i. "$\frac{0}{0}$") car $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ puisque f est continue en 0

$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}}_{\to e} = \frac{-e}{2}$

($\frac{x}{1+x}\to 0$, $\ln(1+x)\to 0$, $x^2\to 0$)

en effet :

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x}{(1+x)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1+x)^2} = \frac{-1}{2}$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{-e}{2}$.

1,25 d) f est dérivable et strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$, donc f définit une bijection de $I =]-1;+\infty[$ vers $J =]1;+\infty[$ et f possède une application réciproque f^{-1} définie sur $]1;+\infty[$ et dérivable sur $]1;+\infty[$ puisque $f'(x) \neq 0$ sur $]-1;+\infty[$.

$\inf f = f(]-1;+\infty[)$

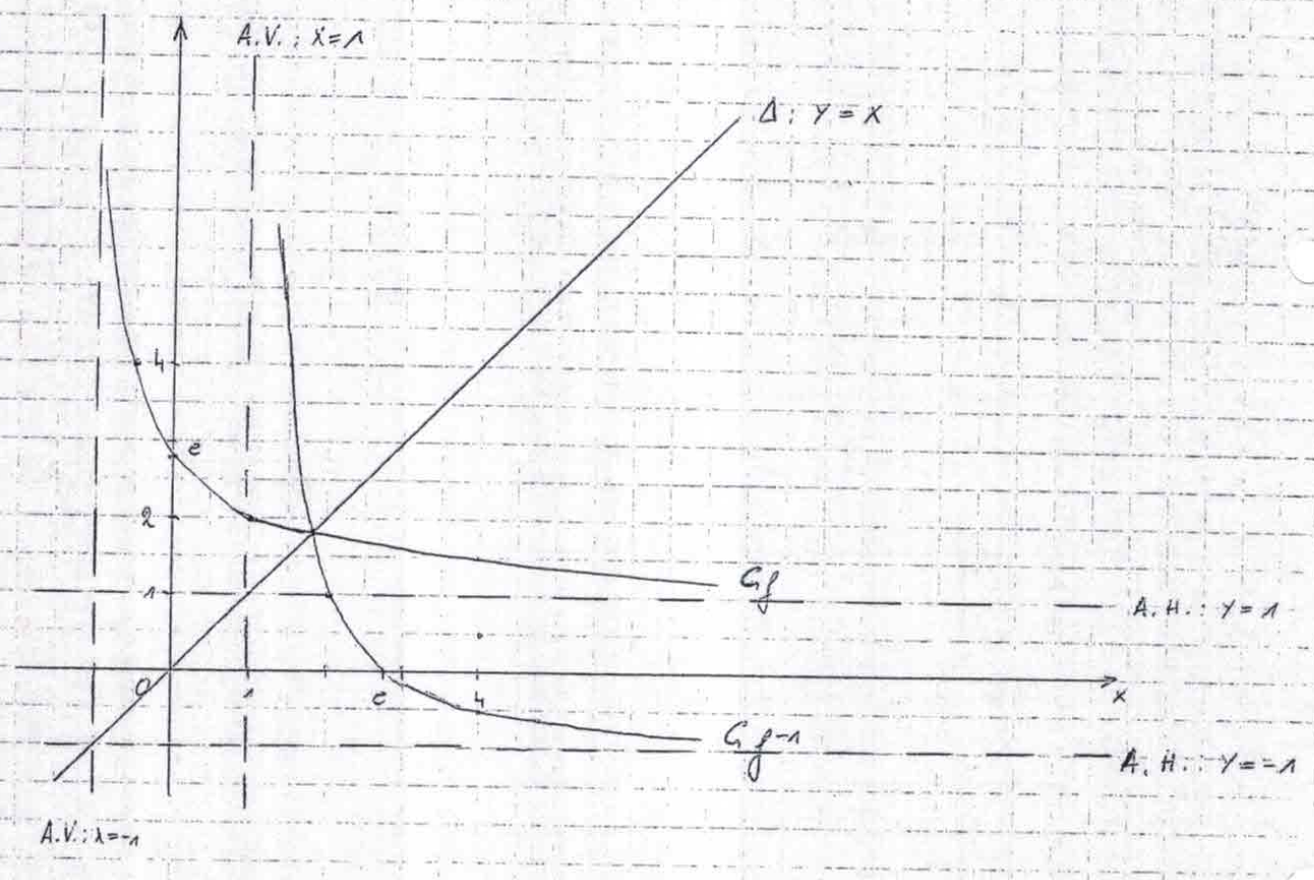
$f(0) = e$

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{-e}{2}} = \frac{-2}{e}.$$

$f(1) = 2$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) \cdot 2} = \frac{1}{1 - \ln 4}$$

0,75 e)



Dans un repère orthonormé, $C_{f^{-1}}$ est l'image de C_f par la symétrie orthogonale d'axe Δ d'équation $Y = X$.

x	0	1	4	$\frac{-1}{2}$
$f(x)$	e	2	$\simeq 1,5$	4

IV 1) $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ $\quad \text{dom } f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(1+x)}{1+x^3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{1+x^3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 & (1) \\ -a+b+c=0 & (2) \\ a+c=1 & (3) \end{cases}$$

de (1) : $b = -a$

de (3) : $c = 1-a$

dans (2) : $-a-a+1-a=0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

d'où : $\underline{\underline{a = \frac{1}{3} \; ; \; b = \frac{-1}{3} \; ; \; c = \frac{2}{3}}}$

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{1+x}\,dx + \int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$\left(\begin{array}{l} x^2-x+1 \\ = x^2-2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} \\ = \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| + \int \frac{\frac{-1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \int \frac{1}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \int \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)\right] + C$$

2 2) $g(x) = \ln\left(2x+3 - 2\sqrt{x^2-x-4} \right)$

C.E. : ① $x^2 - x - 4 \geq 0$ $\quad \Delta = 17$ $\quad x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \approx 2,5616$ $\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \approx -1,5616$

② lorsque $x \in \left]-\infty ; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right[= \mathcal{D}$,

$2x+3 - 2\sqrt{x^2-x-4} > 0$

$\Leftrightarrow 2x+3 > 2\sqrt{x^2-x-4}$

1er cas : $2x+3 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \leq \frac{-3}{2}}$

$\underbrace{2x+3}_{\text{négatif}} > \underbrace{2\sqrt{x^2-x-4}}_{\text{positif}}$

impossible $\quad S_{1^{er}\,cas} = \emptyset$

2e cas : $2x+3 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{-3}{2}}$

$\underbrace{2x+3}_{\text{positif}} > \underbrace{2\sqrt{x^2-x-4}}_{\text{positif}}$ | élever au carré

$\Leftrightarrow (2x+3)^2 > 4(x^2-x-4)$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 > 4x^2 - 4x - 16$

$\Leftrightarrow 16x > -25$

$\Leftrightarrow x > \frac{-25}{16} \approx -1,5625$ $\quad \left(\frac{-3}{2} = \frac{-24}{16}\right)$

$S_{2^e\,cas} = \left]\frac{-3}{2} ; +\infty\right[\cap \mathcal{D} = \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right[$

D'où : $\underline{\underline{dom\, g = \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right[}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{2x+3}_{\to+\infty} - \underbrace{2\sqrt{x^2-x-4}}_{\to+\infty} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+3)^2 - 4(x^2-x-4)}{\left(2x+3+2\sqrt{x^2-x-4}\right)}$$

f.i. "$\infty - \infty$"

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{16x^2 \overbrace{\left(1 + \frac{25}{16x}\right)}^{\to 1}}{x \underbrace{\left(2 + \frac{3}{x} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}\right)}_{\to 4}} \quad \begin{matrix} \} \to 16 \\ \} \to 4 \end{matrix}$$

$= 4$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ln 4$.

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

vendredi, le 5 mai 2006

15H00 – 18H00

I. Dans l'espace à trois dimensions on donne cinq points A, B, C, D et E ainsi qu'un réel k. Déterminer, suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble (F_k) des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+k\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}\right\|$

Indication : on peut travailler avec des barycentres.

(6 points)

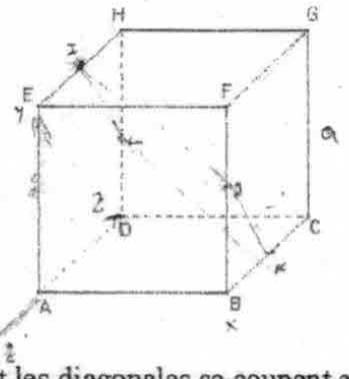
II. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles extérieurs l'un à l'autre de centres O_1 et O_2 et de rayons R_1 et $R_2 = \theta R_1$ où θ est un réel strictement positif. Une droite d coupe $\mathcal{C}_1$ selon la corde $[AB]$ et $\mathcal{C}_2$ selon la corde $[CD]$. De plus $\overline{CD} = \theta \cdot \overline{AB}$. La droite d coupe (O_1O_2) en S situé entre O_1 et O_2.

Démontrer que :

1) (BO_1) est parallèle à (CO_2),
2) $\overline{SO_2} = \theta \cdot \overline{SO_1}$,
3) les tangentes à $\mathcal{C}_1$ menées par S sont aussi tangentes à $\mathcal{C}_2$.

(4 points)

III. ABCDEDFGH est un cube dont la longueur des arêtes vaut a.
I, J, K et L sont les milieux respectifs de [EH], [BF], [BC] et [DH].



1) Prouver que IJKL est un rectangle dont les diagonales se coupent en O, centre du cube.
2) Calculer la longueur des côtés du rectangle IJKL, puis la longueur de ses diagonales.
3) Calculer la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux diagonales.

(5 points)

IV. Dans un repère orthonormé du plan on choisit un triangle ABC rectangle en A orienté tel que $\overline{AB} = 3$ et $\overline{AC} = 4$ et l'angle $C\hat{A}B = +90°$.
Le point B glisse sur [Ox) et le point C glisse sur [Oy).
Démontrer que le point A est situé sur une droite dont on indiquera l'équation.

(5 points)

On note G le barycentre de $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;k)$ et G_2 celui de $(D;1)$ et $(E;1)$

Donc

$$\Leftrightarrow (2+k) \| \vec{GM} \| = 3 \| \vec{G_2M} \|$$

$$(2+k) \| \vec{MG_1} \| = 3 \| \vec{MG_2} \|$$

si $k = 1$ alors on a $\| \vec{MG_1} \| = \| \vec{MG_2} \|$

Dans ce cas F_k est la médiatrice des points G_1 et G_2.

~~Si $k = -2$~~

Si $k \neq 1$ et $k \neq -2$:

$$(2+k) \| \vec{MG_1} \| - 3 \| \vec{MG_2} \| = 0$$

~~$\Leftrightarrow$~~

~~$\vec{AM}^2 - 16\,IM^2 = 0$~~

$$(2+k)^2 \vec{MG_1}^2 - 9 \vec{MG_2}^2 = 0$$

K barycentre de $(G_1 ; (2+k)^2)$ et $(G_2 ; -9)$

~~Si~~

$$(2+k)^2 (\vec{MK} + \vec{KG_1})^2 - 9 (\vec{MK} + \vec{KG_2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2+k)^2 \vec{MK}^2 + 2(2+k)^2 \cdot \vec{MK} \cdot \vec{KG_1} + (2+k)^2 \cdot \vec{KG_1}^2 - 9\vec{MK}^2 - 18\,\vec{MK} \cdot \vec{KG_2} - 9\vec{KG_2}^2 = 0$$

(car K barycentre $\Rightarrow \vec{KG_1} = 0$ et $\vec{KG_2} = 0$)

$$[(2+k)^2 - 9]\, \vec{MK}^2 = -(2+k)^2 \vec{KG_1}^2 + 9\vec{KG_2}^2$$

ℓ

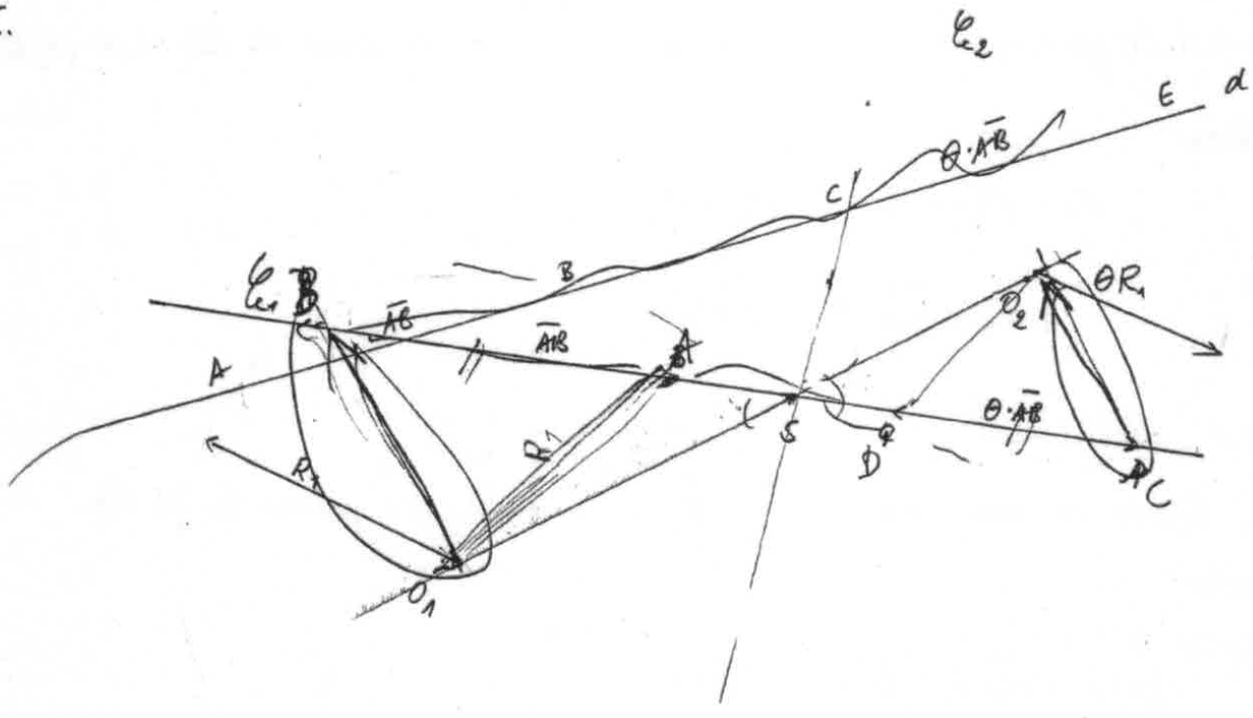
$$\vec{MK}^2 = \frac{-(2+k)^2}{\ell} \vec{KG_1}^2 + \frac{9}{\ell} \vec{KG_2}^2$$

$\rightarrow$ cercle de centre K

Géométrie 5 mai 2006

Ex I

II.



1) $(BO_1) \parallel (CO_2)$

On utilise la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle qui dit: si $\frac{\overline{OB}}{\overline{O_2C}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{O_1S}}{\overline{O_2S}}$ alors les droites $\overline{BO_1}$ et $\overline{CO_2}$ sont $\parallel$.

triangles semblables

$$\frac{\theta R_1}{\theta R_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

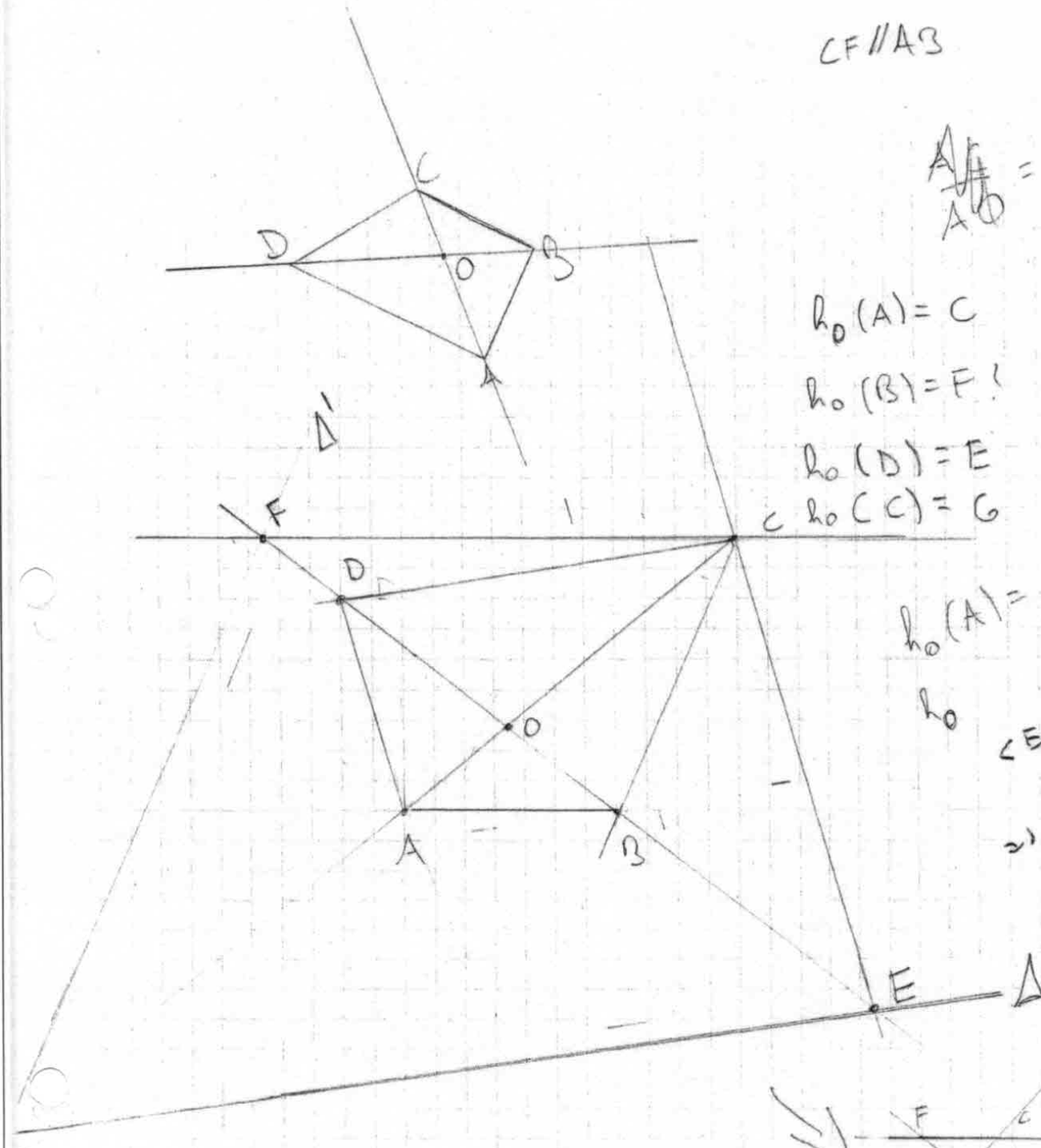
$$\frac{1}{\theta} = \frac{\overline{AB}}{\theta \overline{AB}} \rightarrow \parallel.$$

2) $\overline{SO_2} = \theta \overline{SO_1}$.

Puisque (BO_1) et (CO_2) sont $\parallel$ on a

$$\frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO_2}} = \frac{\cdots}{\cdots} = \theta \Rightarrow \overline{SO_2} = \theta \overline{SO_1}$$

3)



CF // AB

$\frac{A'A}{AO} =$

$h_O(A) = C$

$h_O(B) = F$! Thalès

$h_O(D) = E$

$h_O(C) = G$

DACE

EBFC

ASFC

$h_O(A) = C$

~~$h_O(D) = E$~~

h_O

$(CE) \parallel (DA)$

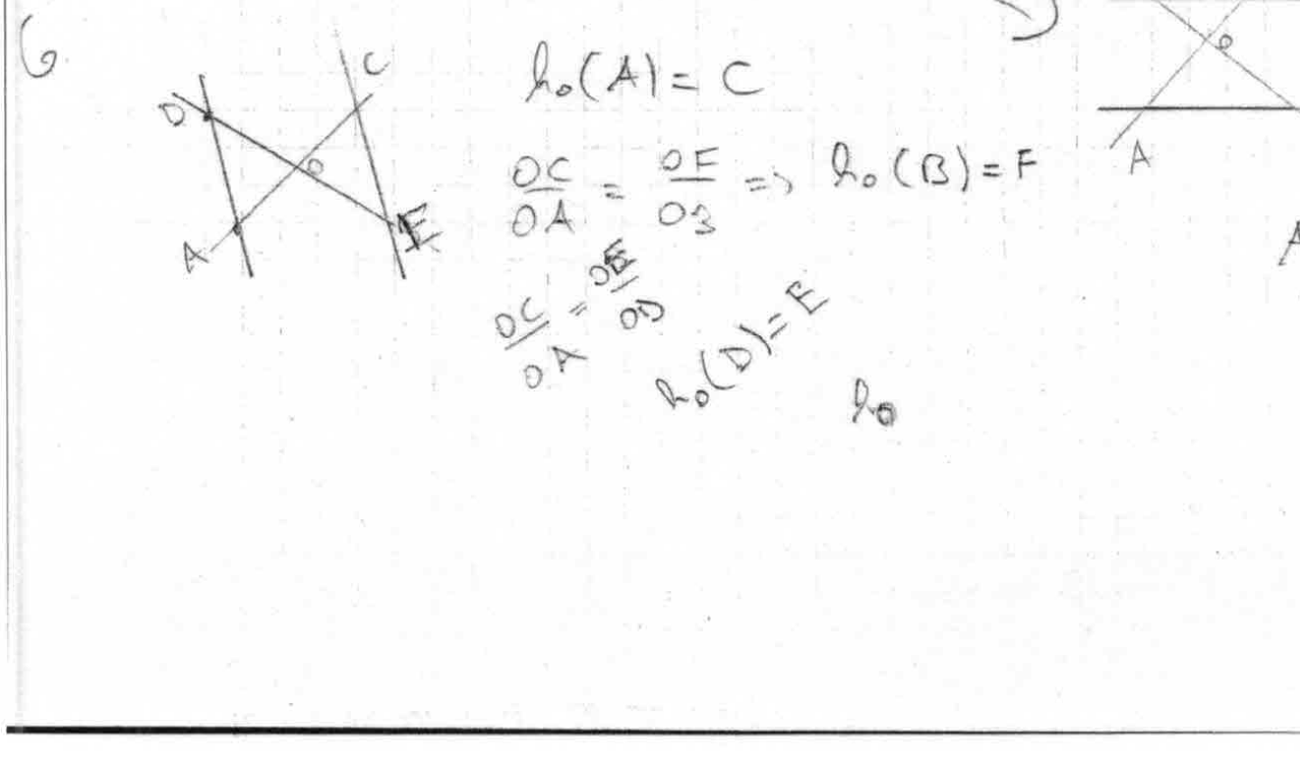
$\frac{OE}{OF} = \frac{OD}{OC} = \frac{OA}{OB}$

$OF = \lambda OB$

$h_O(B) = F$

$\frac{OA}{OC}$

$\frac{OF}{OB} = \frac{OC}{OA}$



$h_O(A) = C$

$\frac{OC}{OA} = \frac{OE}{OB} \Rightarrow h_O(B) = F$

$\frac{OC}{OA} = \frac{OE}{OB}$

$h_O(D) = E$

h_O

A O A'

$\widehat{AM'} = \lambda \widehat{AM}$

$\widehat{OA'} = \lambda \widehat{OA}$

$\frac{OC}{OA} = \lambda \widehat{OA}$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

lundi, le 20 novembre 2006

15H00 – 18H00

I. Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x^2 = 2py$ et de foyer F. Sur cette parabole on choisit un point A distinct du sommet. La droite AF recoupe la parabole en un point B. Soit M le milieu de la corde [AB].
On suppose que le point A parcourt la parabole $\mathcal{P}$.
Démontrer que le point M se déplace sur une parabole dont on déterminera l'équation.

(5 points)

II. On considère un triangle ABC dont tous les angles intérieurs sont aigus.
Déterminer l'ensemble sur lequel se situent les centres de gravité des rectangles DEFG satisfaisant simultanément les conditions suivantes :

1) Les sommets D et E appartiennent à la droite AB,
2) Le sommet F appartient à BC,
3) Le sommet G appartient à AC.

(4 points)

III. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon a, soit H un point du plan tel que OH = 2a et d la perpendiculaire en H à la droite OH.
Soit M un point de d. B et C sont les points de $\mathcal{C}$ tels que les droites MB et MC sont tangentes à $\mathcal{C}$. La droite BC coupe la droite OH en I et la droite OM en K.

1) Démontrer que la droite OM est la médiatrice de [BC].
2) a) Démontrer que les triangles OKI et OHM sont semblables.
   b) Démontrer que les triangles OKB et OBM sont semblables.
   c) En déduire la distance $\overline{OI}$.
3) Si M décrit d, démontrer que I est un point fixe et que K se déplace sur un cercle à déterminer.

(6 points)

IV. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé choisit les points A(1;0;1) , B(2;-1;3), C(0;0;2) et D(-3;1;1).

1) Calculer la distance du point A à la droite BC.
2) Soit d la perpendiculaire commune des droites gauches AB et CD. Chercher les coordonnées du point P, point d'intersection des droites d et AB.
3) Calculer la distance des droites gauches AB et CD.

(5 points)

---

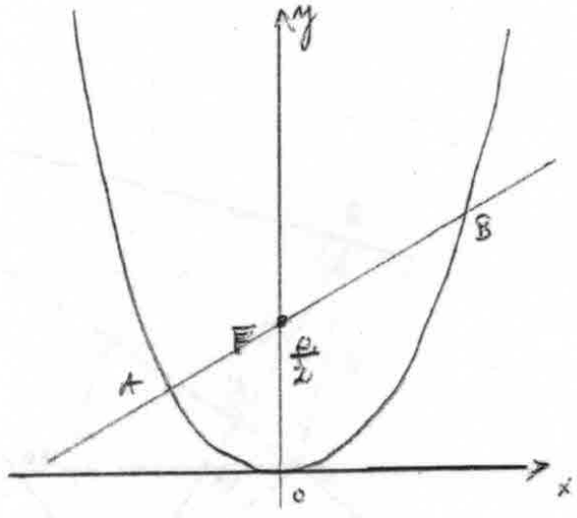
avr. 2002

I. 4.

Épreuve de géométrie du 20 novembre 2006

Exercice I

$\mathcal{P}$: $x^2 = 2py$ de foyer F.



On a :

(AB) $\begin{cases} y = mx + \frac{p}{2} \text{ (1) car la droite coupe le foyer à l'origine.} \\ x^2 = 2py \quad (2) \end{cases}$

$\frac{1}{2}$ $x^2 = 2p(mx + \frac{p}{2})$

$x^2 = 2pmx + p^2$

$x^2 - 2pmx + p^2 = 0$

$\Delta = 4p^2m^2 - 4p^2 = 4p^2(m^2 - 1)$

$x_A = \frac{+2pm + 2p\sqrt{m^2-1}}{2} = pm + p\sqrt{m^2+1}$

$x_B = pm - p\sqrt{m^2+1}$

$y_A = pm^2 + pm\sqrt{m^2+1} + \frac{p}{2}$

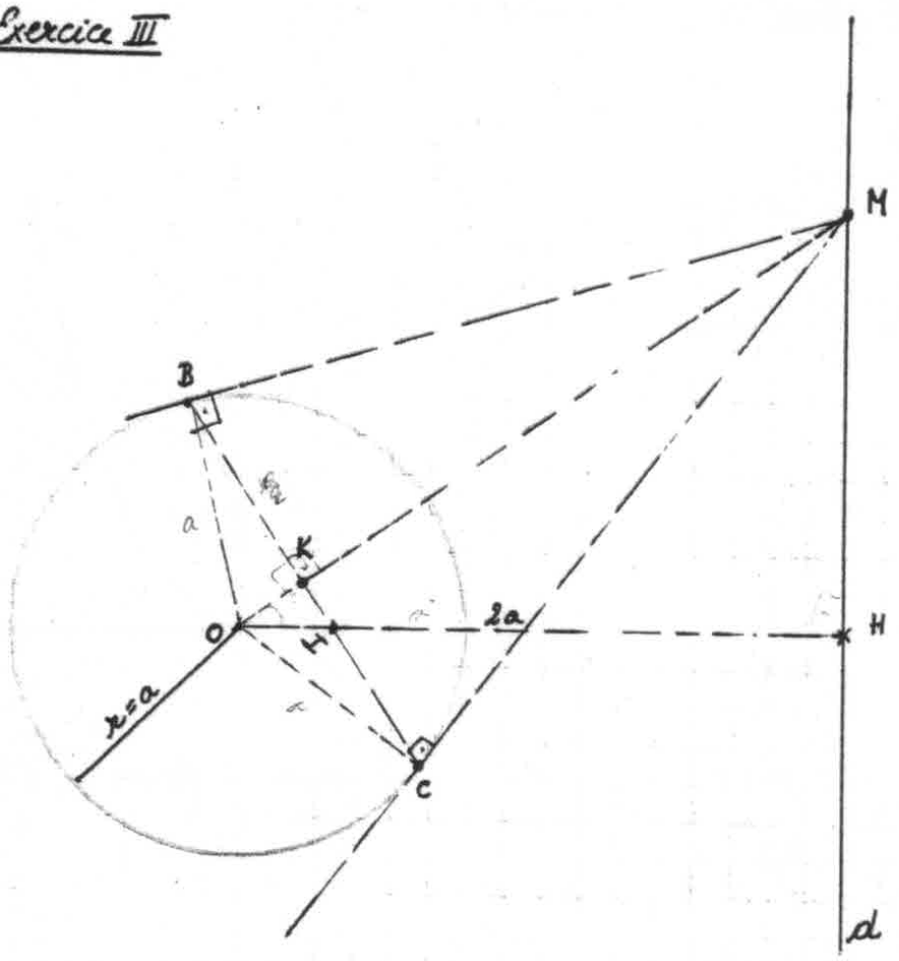
$y_B = pm^2 - pm\sqrt{m^2+1} + \frac{p}{2}$

$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_B}{2} = pm \longrightarrow m = \frac{x_H}{p} \\ y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2pm^2 + p}{2} = \frac{p}{2}(2m^2 + 1) \end{cases}$

$y_H = \frac{p}{2}\left(2\frac{x_H^2}{p^2} + 1\right)$

$y_H = \frac{x_H^2}{p} + \frac{p}{2}$

Exercice III



1) OH est la médiatrice de [BC]

On sait déjà que $\overline{OB} = \overline{OC} = a$ (rayon) puisque B et C appartiennent au cercle.

On sait aussi que puisque HB est tangente à $\mathcal{C}$ elle est perpendiculaire à un diamètre du cercle (ici: BO).

Donc HOB est un triangle rectangle en B. Même raisonnement pour le triangle HOC rectangle en C. On peut alors utiliser le théorème de Pythagore dans les deux triangles:

Δ HBO: $\overline{OH}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{HB}^2$

$\Leftrightarrow \overline{HB} = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{BO}^2}$

$= \sqrt{\overline{OH}^2 - a^2}$

Δ HCO: $\overline{OH}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{HC}^2$

$\Leftrightarrow \overline{HC} = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{CO}^2}$

$= \sqrt{\overline{OH}^2 - a^2}$

Donc $\overline{HB} = \overline{HC}$.

Ainsi puisque $\overline{OB} = \overline{OC}$ et $\overline{HB} = \overline{HC}$ la droite (OH) est la médiatrice du segment [BC].

2) a) <u>ΔOKI et ΔOHH sont semblables:</u>

Puisque $\overline{OH}$ est la médiatrice de $[BC]$ en Ω

dans le ΔOKI : $\widehat{IKO} = \frac{\pi}{2}$.

$\overline{OH} \perp d$ (énoncé) donc dans le ΔOHH : $\widehat{HHO} = \frac{\pi}{2}$

De plus les deux triangle ont un angle en commun :

$\widehat{KOH}$ ou $\widehat{HOH}$.

Deux triangles qui ont 2 angles de même amplitude sont semblables. Donc $\Delta OKI \sim \Delta OHH$.

b) <u>ΔOKB et ΔOBH sont semblables</u>

Les deux triangles ont un angle en commun : $\widehat{KOB}$ ou $\widehat{HOB}$.

De plus les deux triangles sont rectangles :

Δ OBH en B car $\overline{HB}$ est tangent au cercle et $\overline{OB}$ est le diamètre qui passe par le point de tangence, et

Δ OKB est rectangle au point K car KO est la médiatrice de $[BC]$. Donc OKB et OBH sont des triangles semblables.

c) <u>distance $\overline{OI}$:</u>

Or $OKB \sim OBH$: $OK \sim OB$

Thalès : $\frac{\overline{OK}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OH}} \Rightarrow \overline{OI} = \frac{\overline{OK}\,\overline{OH}}{\overline{OH}}$ (1)

$\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OH}} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OK}}$ (2)

(2) dans (1) $\overline{OI} = \frac{\overline{OK}\,\overline{OB}^2}{\overline{OK}\cdot\overline{OH}} = \frac{a^2}{2a} = a^2$

3)

Épreuve de géométrie du 20 novembre 2006

Exercice IV

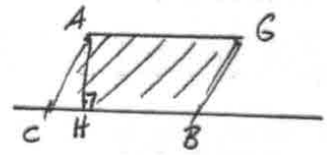
$A(1;0;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;0;2)$ et $D(-3;1;1)$ $\quad \vec{AB} = (\lambda; -\lambda; 2)$

1) Calculons : vecteur directeur de la droite BC :

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et on a $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

On sait que la norme du vecteur $\vec{BC} \wedge \vec{AC}$ est l'aire du parallélogramme ABCG.

Donc :



$$\begin{pmatrix}-2\\+1\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur est donc $\sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$

La norme de $\vec{BC} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$$\overline{AH} = \frac{\|\vec{BC} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{11}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{11}}{6\sqrt{6}}$$

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de d est : $\vec{AB} \wedge \vec{CD} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}$

Équation paramétrique de la droite AB :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t \\ z = +2t + 1 \end{cases} \qquad \text{v.d } \vec{AB} = (\lambda; -\lambda; 2) \qquad \text{pt } A = (\lambda; 0; \lambda)$$



Équation du plan D qui contient la droite CD et d :

$$\vec{CD} \wedge d = \begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-5\\16\end{pmatrix}$$

$D : -7x - 5y + 16z + d = 0$

Comme $C \in D$: $16 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = -32$

$D : -7x - 5y + 16z - 32 = 0$

$-14+5+47$

Comme $P \in AB \cap D$:

$-7(-t+1)-5(-1t)+16(+2t+1)-32=0$

$7t-7+5t+32t+16-32=0$

$44t=+23$

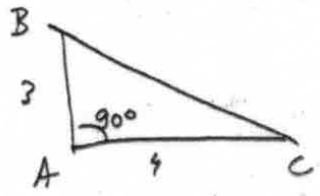
$t=-\frac{9}{29}$.

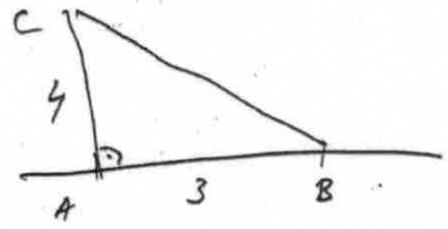
D'où $P\left(\frac{9}{29}+1 ; \frac{9}{29} ; \frac{23}{22}+1\right)$

3)

~~Exercice III~~:

Exercice IV:





~~Soit A(x;y) On a~~ $B(x;0)$ et $C(0;y)$

Puisque la distance A à B est de 3 on a :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 3$$

et $$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_A - x)^2 + y_A^2 = 9 \\ \Leftrightarrow \text{(illegible)}\ x_A^2 + (y_A - y_C)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A^2 - x^2 + y_A^2 = 9 \\ x_A^2 + y \end{cases}$$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} x - x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} -x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ de plus $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$

de norme 3 de norme 4

$$\Leftrightarrow -x_A x + x_A^2 + y_A^2 - y y_A = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)x + (x-3)^2 + (y-4)^2 - y(y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y_A^2 = 9 \\ x_A^2 + y^2 - 2y y_A + y_A^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - y^2 + 4y =$$

$$-3x - 4y = -25$$

$$4y = 25 - 3x$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS
mercredi, le 10 mai 2006
15.00 – 18.00 heures

QUESTION 1 : (3 + 3 points)

a. Résoudre l'équation dans IR :

$$tgx + tg2x + tg3x = 0$$

b. Soit le triangle ABC dont les côtés mesurent $\overline{AB} = 142$, $\overline{AC} = 195$ et $\overline{BC} = 210$. Par le sommet A à l'intérieur du triangle, on trace deux segments de droite [AB'] et [AC'] formant avec les côtés [AB] et [AC] des angles de 20 degrés, tels que B' et C' appartiennent au côté [BC]. Calculer l'aire du triangle AB'C'.

QUESTION 2 : (3 points)

a. démontrer la formule $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

b. en vous basant sur cette formule, calculer la somme des cubes des entiers multiples de 3 compris entre 32 et 62.

QUESTION 3 (1 + 2 + 3 + 1 points)

On considère l'ensemble E des suites (u_n) qui vérifient la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que toute combinaison linéaire de suites de E est une suite de E.

2. Comment choisir la raison q d'une suite géométrique (a_n) pour qu'elle soit une suite de E ? (On notera q_1 et q_2 les deux solutions obtenues avec $q_1 < q_2$)

Dans ce qui suit, on ne considère plus que q_1 et q_2 .

3. On considère ensuite la suite définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

   a. calculer u_2, u_3 , u_4 ,u_5 et u_6
   b. déterminer les valeurs de α et μ telles que pour tout n de IN
   $u_n = \alpha \cdot q_1^n + \mu \cdot q_2^n$

(suite page 2)

c. démontrer que $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

d. démontrer, par récurrence , que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$$

4. on note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ où (u_n) est la suite définie en 3.

a. calculer S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4

b. démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = u_{n+2} - 1$

QUESTION 4 : (4 points)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe i.
A tout point M du plan, distinct de A, on associe son affixe z.

1. résoudre l'équation $z = \frac{z^2}{i - z}$

2. déterminer l'ensemble E des points de P tels que $z' = \frac{z^2}{i - z}$

soit un imaginaire pur.

3. Si O, A, M, M' sont les points d'affixes 0, i, z, z' , déterminer une relation entre les longueurs OA, OM' et AM. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O .

4. On considère un point M d'affixe z situé sur le cercle de centre A et de rayon 0,5 . M' est le point d'affixe z' correspondant et G l'isobarycentre des points A, M, M' .
Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

LYCEE DE GARÇONS DE LUXEMBOURG

Examen de fin d'études secondaires

Enseignement : ..... Section :

Nom :

Numéro :

SMV Jimmy, Ingo, Jeff, Tom, Sam, Marco, Steve, Luana, Loana, Joe, Jil, Nadia, Laurent, Léa + Catherine, Thierry, Anne, Marie, Michela, Nadia

Épreuve d'algèbre et probabilités du 10 mai 2006

Question 1

$tg\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $\quad 3\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$

$tg\,x + tg\,2x + tg\,3x = 0$ $\quad x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{4}\,[\frac{\pi}{2}]$, $x \neq \frac{\pi}{6}\,[\frac{\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow tg\,x + tg\,2x + \frac{tg\,x + tg\,2x}{1 - tg\,x\,tg\,2x} = 0$

$\Leftrightarrow tg\,x\left(1 + \frac{1}{1 - tg\,x\,tg\,2x}\right) + tg\,2x\left(1 + \frac{1}{1 - tg\,x\,tg\,2x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2 - tg\,x\,tg\,2x}{1 - tg\,x\,tg\,2x}\right)(tg\,x + tg\,2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2 - tg\,x\,tg\,2x = 0$ ou $tg\,x + tg\,2x = 0$

$\Leftrightarrow tg\,x\left(\frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x}\right) = +2$

$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{2\,tg^2 x}{1 - tg^2 x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\,tg^2 x = 0$

$\Leftrightarrow tg^2 x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow tg\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,[\pi]$

$\Leftrightarrow x = \ldots$

$\Leftrightarrow tg\,x\left(1 + \frac{2}{1 - tg^2 x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow tg\,x = 0$ ou $\frac{-tg^2 x + 3}{1 - tg^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0\,[\pi]$ ou $tg^2 x = 3$

$\Leftrightarrow tg\,x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}\,[\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3}\,[\pi]$

$\Leftrightarrow 1 - tg^2 x - 2\,tg^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\,tg^2 x = 1$

$\Leftrightarrow tg\,x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,[\pi]$

$\left(1 + \frac{1}{1 - tg\,x\,tg\,2x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - tg\,x\,tg\,2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - tg\,x\,tg\,2x = 0$

$\Leftrightarrow 2 - tg\,x\,\frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{tg^2 x}{1 - tg^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\,tg^2 x = 0$

$\Leftrightarrow tg^2 x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow tg\,x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow x \in$?

$\sin^2 x \quad 1 - \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}$

$\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Question 2

a. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Prouvons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n + 1 + 2 + \dots + 1$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)\cdot n$$

D'où $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$

Prouvons que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^2$

On a : $1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1^2 + 2^2)^2$

Supposons la formule vraie au rang n et prouvons-la pour n+1 :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + \frac{(n^3+3n^2+3n+1)\cdot 4}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\left[n^2 + 4(n+1)\right]}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

■

b. $\sum_{k=1}^{20} (3k)^3 = 27\sum_{k=1}^{20} k^3 = 27\cdot\left[\frac{20\cdot 21}{2}\right]^2$

$= 1190700$

$\sum_{k=1}^{10} (3k)^3 = 27\cdot\left[\frac{10\cdot 11}{2}\right]^2 = 81675$

$\sum_{k=11}^{20} (3k)^3 = 1190700 - 81675 = 1109025$

Question 3

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) Soient $(u^i)_n$ des suites de E :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_n^i}_{U_n} = \lambda_1 u_n^1 + \lambda_2 u_n^2 + \dots \lambda_m u_n^m$$

$$= \lambda_1 (u_{n-1}^1 + u_{n-2}^1) + \dots + \lambda_m (u_{n-1}^m + u_{n-2}^m)$$

$$= \lambda_1 u_{n-1}^1 + \dots + \lambda_m u_{n-1}^m + \lambda_1 u_{n-2}^1 + \dots \lambda_m u_{n-2}^m$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{n-1}^i}_{U_{n-1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_{n-2}^i}_{U_{n-2}} \quad \in E$$

2) on a $a_n = q^n a_0$.

De plus on veut $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_0 q^{n+2} = a_0 q^{n+1} + a_0 q^n$ $\quad a_0 \neq 0 \rightarrow$ suite constante

$q^n (q^2 - q - 1) = 0$

$q \neq 0 \rightarrow$ suite constante

$q_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. a. $u_2 = 1 \qquad u_4 = 3 \qquad u_6 = 8$

$u_3 = 2 \qquad u_5 = 5$

b. $u_2 = \alpha \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$u_1 = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1$

$= \dfrac{\alpha + \beta - \alpha\sqrt{5} + \beta\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} 1 = \alpha(1-\sqrt{5}) + \beta(1+\sqrt{5}) \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \quad \Big| \cdot (1-\sqrt{5})$$

$1 = \beta (1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5})$

$\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ et α

$\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{2}\right)$

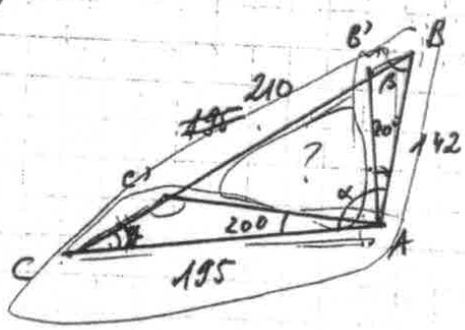
$+ \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{2}\right)$

$\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{2+10}{2}\right) \quad (-(1+\sqrt{5})$

$\alpha (1 - \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5})$

$\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

b)



Calcul de l'aire AB'C' :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABC} - \mathcal{A}_{ABC'} - \mathcal{A}_{AB'C}$

a)

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

1) Calculer $\mathcal{A}_{ABC}$

2)

Question 4

1) $\Leftrightarrow z(i-z) = z^2 \Leftrightarrow z^2 + z^2 - iz = 0 \Leftrightarrow z(2z-i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \frac{i}{2}$

2) Notons $z = x + iy$

$$\frac{(x+iy)^2}{i-(x+iy)} = \frac{(x+iy)^2}{i(1-y)-x} \cdot \frac{i(1-y)+x}{i(1-y)+x} = \frac{(x+iy)^2 \cdot [i(1-y)+x]}{-(1-y)^2 - x^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 2ixy - y^2)(i - iy + x)}{-(1-2y+y) - x^2} = i(x^2 - x^2y + 2x^2y - y^2 + y^3) + (x^3 - 2xy + 2xy^2 - xy^2)$$

$$= (x^3 - 2xy + xy^2) + i(x^2 + x^2y - y^2 + y^3)$$

z' = imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + y^2 - 2y) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + (y-1)^2 = 1$

↓ Droite

↓ Cercle de centre $(0;1)$ et de rayon 1

3. $O(0;0)$, $A(0;1)$, $M(x;y)$, $M'(x';y')$ OM OM' AM

$\overrightarrow{OM}$ =

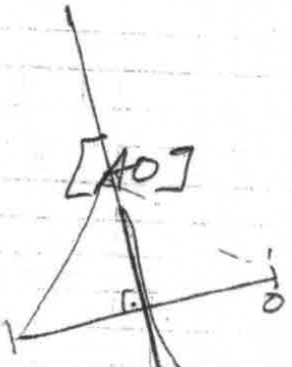
$\|\overrightarrow{OM}\| = |z|$

$\|\overrightarrow{OM'}\| = |z'| = \frac{|z|^2}{|z-i|}$

$\|\overrightarrow{OM'}\| = \frac{\|\overrightarrow{OM}\|^2}{\|\overrightarrow{AM}\|}$

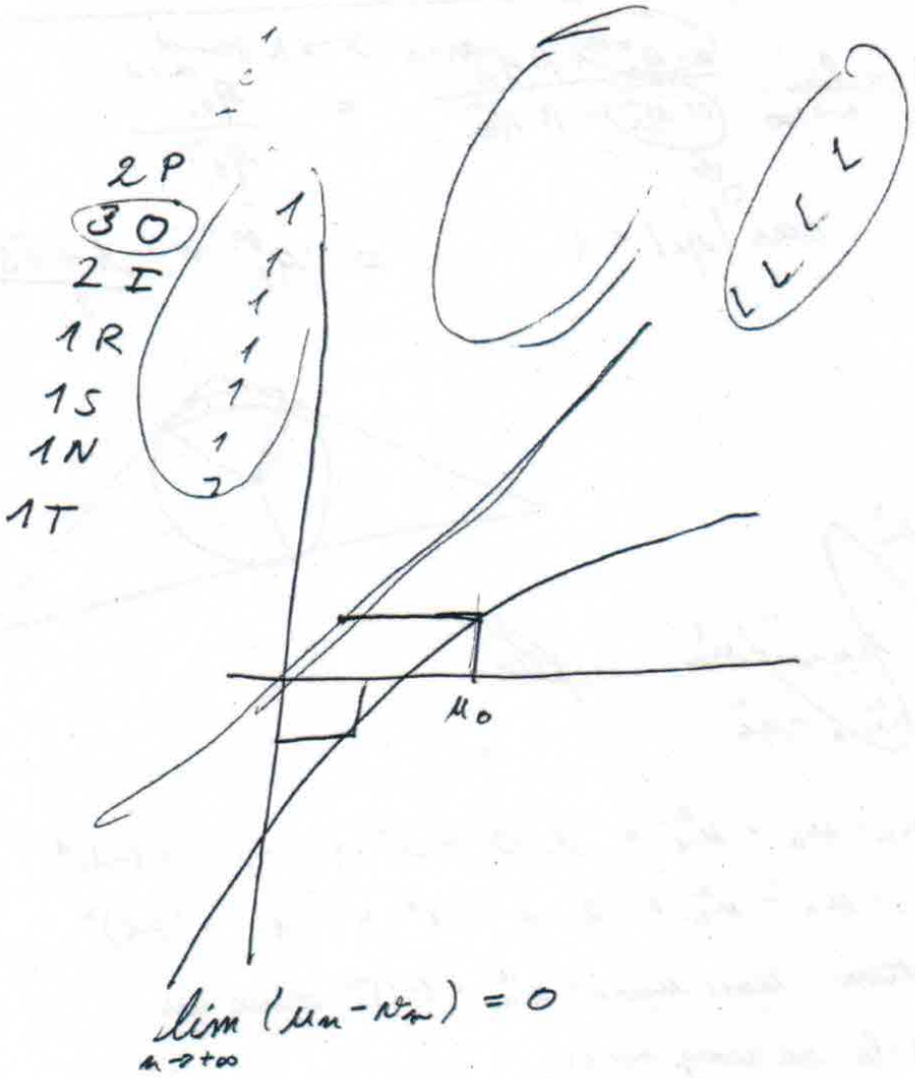
$\|\overrightarrow{AM}\| = |z - i| = \frac{|z|^2}{|z'|}$

$\|\overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{OM}\|$



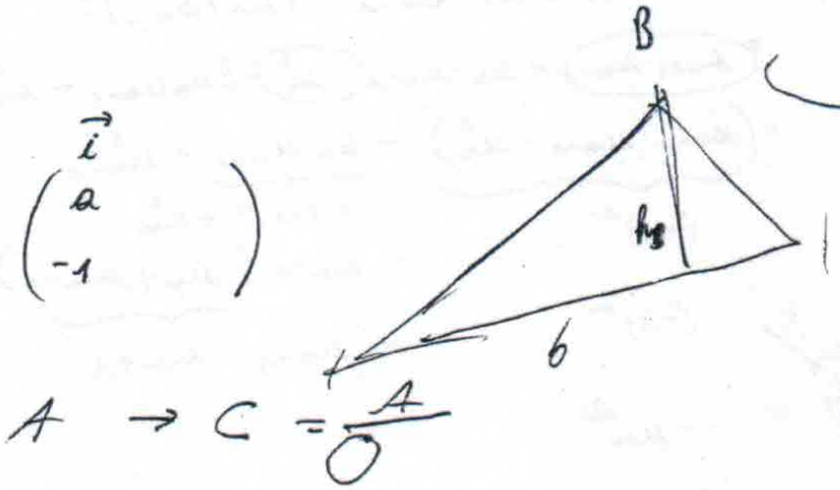
médiatrice de $[AO]$

A_m^4



$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

$S = \sqrt{p(\ldots}$



$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$

$A \rightarrow C = \frac{A}{O}$

2000
Question $\frac{2}{3}$

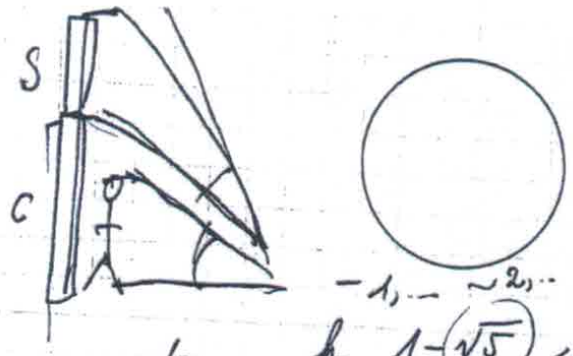
LYCEE DE GARÇONS DE LUXEMBOURG

Examen de fin d'études secondaires

Enseignement : ..... Section :

Nom :

Numéro :

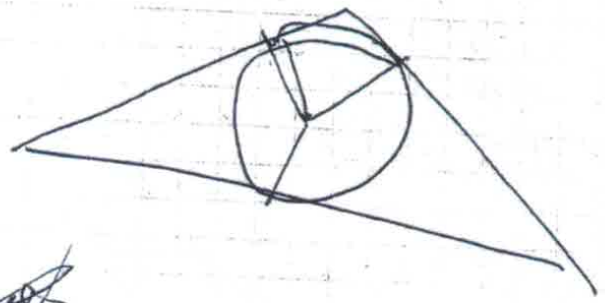


$\tan\alpha = \frac{h}{x}$ $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha q_1^{n+1} + \beta q_2^{n+1}}{\alpha q_1^{n} + \beta q_2^{n}}$ $x = h\tan\alpha$

$= \frac{q_2^{n+1}}{q_2^{n}}$

car $|q_1| < 1$ $= q_2^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



d) $u_{n+1}\cdot u_{n-1} - u_n^2$

$= (u_n + u_{n-1})\cdot u_{n-1} - u_n^2$

$= u_n \cdot u_{n-1} + u_{n-1}^2 - u_n^2$

Pour $n=1$: $u_2 \cdot u_0 - u_1^2 = 1\cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$

$n=2$: $u_3 \cdot u_1 - u_2^2 = 2\cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$

Supposons la relation $u_{n+1}\cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ vraie au rang n et prouvons-la au rang $n+1$:

$u_{n+2}\cdot u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1}+u_n)\cdot u_{n-1} - (u_n + u_{n-1})^2$

$= u_{n+1}\cdot u_{n-1} + u_n \cdot u_{n-1} - u_n^2 + 2u_n u_{n-1} - u_{n-1}^2$

$= (u_{n+1}\cdot u_{n-1} - u_n^2) - u_n u_{n-1} - u_{n-1}^2$

$(-1)^n$ $= (-1)^n + u_n^2$

$- u_{n-1}(u_n + u_{n-1})$

$(-1)^n$ $- u_{n-1}\, u_{n+1}$

$= -u_{n+1}^2$

2e sess. 2001-2002 III IV.

2003 I. eq bizarre

2003 I

→ racines comp. conj → coeff $\in \mathbb{R}$.

Question 3 $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) Déjà fait

2) On a $a_{n+2} = a_0 \cdot q^{n+2}$

et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

on a alors $a_n q^2 - a_n q - a_n = 0$

$\Leftrightarrow a_n (q^2 - q - 1) = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) = 5$ $\quad q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

a) $u_2 = u_1 + u_0 = 1$ $\quad u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$ $\quad u_6 = u_5 + u_4 = 5 + 3 = 8$

$u_3 = u_2 + u_1 = 2$ $\quad u_5 = u_4 + u_3 = 5$

b) $u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$u_0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

$u_1 = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad -\beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad \beta \left(\frac{-1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\alpha \left(\frac{-2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\alpha \left(-\sqrt{5}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 1$

$u_2 \overset{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1+2\sqrt{5}-5}{4} + \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-3\sqrt{5}+3\cdot 5 - 5\sqrt{5} - 1 - 3\sqrt{5} - 15 - 5\sqrt{5}}{8}\right)$ $\quad (3-2)^3$

$\frac{-16\sqrt{5}}{-8\sqrt{5}} = 2$ $\quad \frac{1}{3} \cdot 27$

Épreuve d'algèbre du 10 mai 2006

1) a) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \cdot \tan 2x} = 0$$

$$\tan x \left(1 + \frac{1}{1-\tan x \tan 2x}\right) + \tan 2x \left(1 + \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$$

$$(\tan x + \tan 2x)\left(1 + \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$$

$$(\tan x + \tan 2x)\left(\frac{2 - \tan x \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x}\right) = 0$$

/

$\tan x + \tan 2x = 0 \iff \tan x + \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 0$

$\iff \tan x \left(1 + \frac{2}{1-\tan^2 x}\right) = 0$

$\iff \tan x = 0$ ou $\frac{3 - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 0$

$\iff x = 0 [\pi]$

$3 - \tan^2 x = 0$

$\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\iff x = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $x = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

$2 - \tan x \tan 2x = 0$

$\iff 2 - \tan x \cdot \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 0$

$\iff$

$\iff 2 - \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x} = 0$

$\iff \frac{1 - \tan^2 x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = 0$

$\iff 1 = 2\tan^2 x$

$\iff \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \tan x$

$\iff$

Question 3 $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) Déjà fait

2) On a $a_{n+2} = a_0 \cdot q^{n+2}$

et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

on a alors $a_n \cdot q^2 - a_n \cdot q - a_n = 0$

$\Leftrightarrow a_n (q^2 - q - 1) = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) = 5$ $\quad q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

a) $u_2 = u_1 + u_0 = 1$ $\quad u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$

$u_3 = u_2 + u_1 = 2$ $\quad u_5 = u_4 + u_3 = 5$ $\quad u_6 = u_5 + u_4 = 5 + 3 = 8$

b) $u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$u_0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

$u_1 = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad -\beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad \beta \left(\frac{-1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ $\quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\alpha \left(\frac{-2\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

$\alpha (-\sqrt{5}) = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 1$

$u_2 \overset{?}{=} -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-1+2\sqrt{5}-5}{4} + \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

u_3 $\quad = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-3\sqrt{5}+3\cdot 5-5\sqrt{5}-1-3\sqrt{5}-15-5\sqrt{5}}{8}\right)$

$(3-2)^3$

$\frac{-16\sqrt{5}}{-8\sqrt{5}} = 2$ $\quad \frac{1}{3} \cdot 27$

Épreuve d'algèbre du 10 mai 2006

1) a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$

$$\operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right) + \operatorname{tg} 2x \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right) = 0$$

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)\left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right) = 0$$

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)\left(\frac{2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right) = 0$$

/

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x \left(1 + \frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0$ ou $\frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 [\pi]$ $\quad 3 - \operatorname{tg}^2 x = 0$

$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $x = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 2x$

$= \operatorname{tg}(-2x)$

$\Leftrightarrow x = -2x + k\pi$

$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$

$2 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow 1 = 2\operatorname{tg}^2 x$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg} x$

$\Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + k\pi$

Question 4

$A(0;1)$

1. $z = \dfrac{z^2}{i-z} \Leftrightarrow (i-z)\cdot z = z^2$

$\Leftrightarrow i\cdot z - z^2 - z^2 = 0$

$\Leftrightarrow -2z^2 + iz = 0$

$\Leftrightarrow z(-2z+i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \dfrac{i}{2}$ ok !

2. $z' = \dfrac{z^2}{i-z}$ soit imaginaire pur

notons $x+iy = z$

$$\frac{z^2}{i-z} = \frac{z^2(i+\bar{z})}{-1-z^2}$$

$$= \frac{(x+iy)^2(i+x+iy)}{-1-(x+iy)^2}$$

$$= x^2$$

$$\frac{(x+iy)^2}{i-x-iy} = \frac{(x+iy)^2}{-x+i(1-y)} \cdot \frac{i(1-y)+x}{i(1+y)+x}$$

$$= \frac{(x+iy)\cdot[i(1-y)+x]}{-(1-y)-x^2}$$

$$= \frac{(x+iy)\cdot(i-iy+x)}{\quad}$$

$$= \cancel{ix} - \cancel{ixy} + x^2 - \cancel{xy} + y^2 + \cancel{ixy}$$

$$= (x^2+y^2-y) + i(x-xy+xy)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y(y-1) = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

$x^2+y^2-y = 0$

~~$(0;0)$ et $(0;1)$~~ $\Leftrightarrow$ ✗ $x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

→ Cercle de centre $(0;\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3. $O \to O$ $A \to i$ $M \to z$ $M' \to z'$

OM, OM' AM

$\overline{OM} = \sqrt{x^2+y^2}$ $\overline{OM'} = \sqrt{x'^2+y'^2}$ $\overline{AM} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$$x' + iy' = \frac{(x+iy)^2}{i-(x+iy)}$$

$$= \frac{(x+iy)^2}{i(1+y)-x} = \frac{(x+iy)^2 \cdot (i(1+y)+x)}{-(1+y)^2 - x^2}$$

$$= \frac{(x^2+2ixy+y^2)(i+iy+x)}{-(1+2y+y^2)-x^2}$$

$$= \frac{ix^2+ix^2y+x^3-2xy^2+2ix^2y+iy^2+iy^3+xy^2}{-1-2y-y^2-x^2}$$

4. $S_n = u_0+u_1+\dots+u_n$

a) $S_0 = u_0 = 0$ $S_1 = u_0+u_1 = u_2 = 1$

$S_2 = u_1+u_0 = 1+0 = 2$ $S_3 = u_2+u_1 = 2$

$S_4 = u_3+u_2 =$

$S_2 = u_0+u_1+u_2 = 2$ $S_3 = \overset{0}{u_0}+\overset{1}{u_1}+\overset{1}{u_2}+\overset{2}{u_3} = 4$

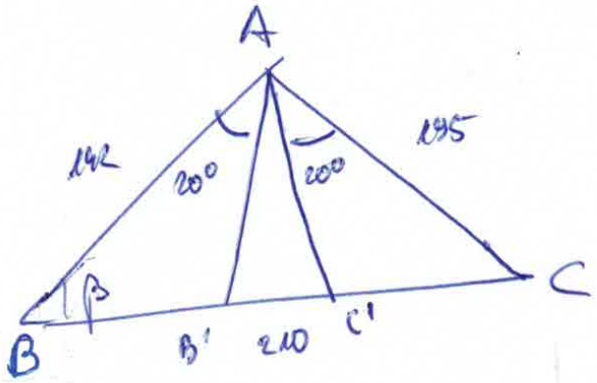
$S_4 = u_0+u_1+u_2+u_3+u_4 = 7$
$\quad\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

b) $S_0 = u_2-1 = 1-1 = 0$ ✓ $S_2 = u_4-1 = 3-1 = 2$ ✓

Supposons vrai au rang $n \to n+1$

$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \underbrace{u_{n+2}+u_{n+1}} - 1$

$= u_{n+3} - 1$ ok



Heron

$A_{ABC} =$

$$A_{AB'C'} = A_{ABC} - A_{ABB'} - A_{ACC'}$$

$$A_{ABB'} = \frac{1}{2} AB' \cdot 142 \sin 20^\circ$$

$$A_{ACC'} = \frac{1}{2} AC' \, 195 \cdot \sin 20^\circ$$

$$\frac{BB'}{\sin 20^\circ} = \frac{AB'}{\sin \beta}$$

$$\frac{CC'}{\sin 20} = \frac{AC'}{\sin \gamma}$$

$|z-i| = \frac{1}{2}$

$3 z_G = i + z + \frac{z^2}{i-2}$

$= \frac{(i+z)(i-z) + z^2}{i-z}$

$= \frac{-1}{i-z}$

donc $|3 z_G| = \left| \frac{-1}{i-z} \right|$

$\Leftrightarrow |z_G| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

cercle de centre O et de rayon $\frac{2}{3}$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ALGEBRE ET DE PROBABILITES

Vendredi, le 24 novembre 2006

15.00 – 18.00 heures

EXERCICE 1 : 4 points

1) Résoudre dans IN l'équation $2 \cdot C_{10}^{x} = 9 \cdot C_{8}^{x-2}$.

2) a) Démontrer que : $C_{n+1}^{r} = C_{n}^{r-1} + C_{n}^{r}$

b) Simplifier ensuite $C_{15}^{x} + C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x-2}$.

3) Messieurs Jean et Luc partent à la chasse au sanglier. La probabilité pour que M. Jean tue le sanglier est $\frac{3}{4}$ et la probabilité pour que M. Luc tue le sanglier est $\frac{4}{5}$. Quelle est la probabilité pour que le sanglier soit tué ?

4) Deux urnes A et B contiennent chacune 10 boules, indiscernables au toucher, mais numérotées de 0 à 9. A et B sont placées côte à côte, on tire une boule de A puis une boule de B et l'on forme le nombre dont le chiffre des dizaines est le numéro tiré de A et celui des unités, le numéro tiré de B. Quelle est la probabilité pour que le nombre obtenu soit divisible par 3 ?

EXERCICE 2 : 4 points

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\sin^2 \alpha \cdot z^2 + \sin 2\alpha \cdot z + 1 + \cos^2 \alpha = 0$, où α désigne un paramètre réel tel que $\alpha \in]\, 0, \pi\, [$. Désigner par z' et z'' les racines de cette équation.

2) Vérifier que $(z')^2 + (z'')^2$ est indépendant de α.

3) Dans le plan complexe, on considère les points M' et M" d'affixes respectives z' et z''. Déterminer α de façon que l'ont ait $\alpha \in \left]\, \frac{\pi}{2}, \pi\, \right[$ et $\left\| \overrightarrow{M'M''} \right\| = 2\sqrt{2}$.

EXERCICE 3 : 4 points

On donne les deux suites complexes $(u_n)_{IN}$ et $(v_n)_{IN}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1+3i \\ \forall n \in IN : u_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}u_n + \dfrac{3(\sqrt{3}+i)}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in IN : v_n = u_n - 3i$$

1) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la " nature " de $(v_n)_{IN}$?

2) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n. Motiver votre réponse.

3) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, ... et porter dans le plan de Gauss les points dont les affixes respectives sont v_0, v_1, v_2, v_3, ... Montrer ensuite que la suite $(v_n)_{IN}$ est périodique. Justifier !

4) Pour quelle(s) valeur(s) de l'entier n, v_n est-il un réel ?

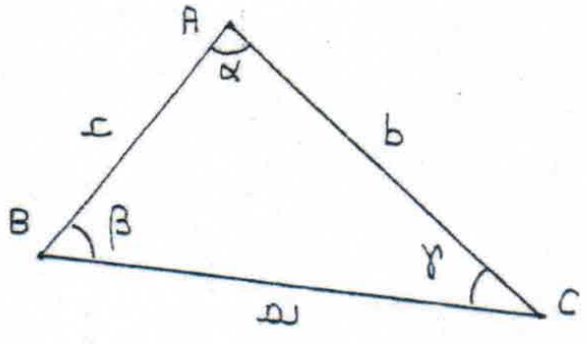
EXERCICE 4 : 4 points

ABC est un triangle tel que $\hat{A} = 60°$ et $\overline{AB} = 8$ cm et $\overline{AC} = 11$ cm .
Désigner par A' le milieu du [BC] et par I le centre du cercle inscrit.
Calculer $\overline{BC}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ $\overline{AA'}$, $\overline{CI}$ et r le rayon du cercle inscrit.

EXERCICE 5 : 4 points

1) Résoudre l'équation $\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$

2) Démontrer que dans un triangle ABC quelconque, on a la relation $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$.



Épreuve d'algèbre et de probabilités du 24 novembre 2006

Exercice I

1) $2\,C_{10}^{x} = 9 \cdot C_{8}^{x-2}$

$\Leftrightarrow 2\,\frac{10!}{x!(10-x)!} = 9 \cdot \frac{8!}{(x-2)!(8-x+2)!}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{10!\,(x-2)!\,(10-x)!}{x!\,(10-x)!\,8!} = 1$

$\Leftrightarrow 2\,\frac{10}{(x-1)\,x} = 1$

$\Leftrightarrow 20 = (x-1)\,x$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \qquad \Delta = 1 + 80$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -4$ à exclure car $x \geq 0$

2) a) $C_m^{r-1} + C_m^r = \frac{m!}{(r-1)!\,(m-r+1)!} + \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$

$= \frac{r \cdot m! + (m-r+1)\,m!}{r!\,(m-r+1)!}$

$= \frac{m!\,(r+m-r+1)}{r!\,(m-r+1)!}$

$= \frac{(m+1)!}{r!\,(m+1-r)!} = C_{m+1}^{r}$

b) $C_{15}^{x} + C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x-2} = C_{15}^{x} + C_{15}^{x-1}$ (on applique 2 fois la formule vue dans 2a)

$= C_{16}^{x}$

3) On note : M l'évènement le sanglier est tué

J l'évènement M. Jean tue le sanglier

L l'évènement M. Luc tue le sanglier.

On sait $P_J(M) = \frac{3}{4}$ et $P_L(M) = \frac{4}{5}$

$P(M) = P(J \cap M) + P(L \cap M)$

$= P(J) \cdot P_J(M) + P(L) \cdot P_L(M)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{5}$

$= \frac{31}{40}$

$P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$1 - (1 - P(\overline{A})) \cdot (1 - P(\overline{B}))$

$x \in [0, 8]$

1) $2 \cdot C_{10}^{x} = 9 \cdot C_{8}^{x-2}$

$\frac{2 \cdot 10!}{x! (10-x)!} = \frac{9 \cdot 8!}{(x-2)! (10-x)!}$

$\frac{2 \cdot 10! \cdot (x-2)!}{x! \; 9 \cdot 8!} = 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot 10 \cdot 9}{x \cdot (x-1) \cdot 9} = 1$

$\Leftrightarrow \quad 20 = x^2 - x \quad \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \Delta = 1 + 80 = 9^2$

$x_1 = \frac{1-9}{2} = -4$

$x_2 = \frac{1+9}{2} = \boxed{5}$ ✓

2) a) $C_{n+1}^{r} = C_{n}^{r-1} + C_{n}^{r}$

$\frac{(n+1)!}{r! (n+1-r)!} = \frac{n!}{(r-1)! (n-r+1)!} + \frac{n!}{r! (n-r)!} \quad | \cdot r! \; | : n!$

$\frac{n+1}{(n+1-r)!} = \frac{r}{(n-r+1)!} + \frac{1}{(n-r)!}$

$n+1 = r + n - r + 1$

$n+1 = n+1$ ✓

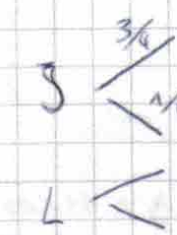
b) $C_{15}^{x} + C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x-2}$

$=$

$C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x} + C_{14}^{x-1} + C_{14}^{x-2}$

$\mathbb{P}(J=1) = 3/4$

$\mathbb{P}(L=1) = 4/5$



A	B
10 b	10 b
où J	où J

1 b A puis 1 b. B

forme nombre A B

Cas possibles : ~~364 possibilités~~

{0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; ... ; 99}

Cas favorables :

A : 0 — B : ~~C_4^{10}~~ 4

A : 1 — B : C_3^{10} 3

A : 2 — B : C_3^{10} 3

A : 3 — B : C_4^{10} 4

A : 4 — B : C_3^{10} 3

A : 5 — B : C_3^{10} 3

.

.

$$4 \cdot \cancel{C_{16}^{10}} + 6 \cdot \cancel{C_3^{10}} = \frac{4 \cdot 10!}{4!\ 16!} = \frac{5 \cdot \cancel{16} \cdot 3 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{8} \cdot 2}$$

$$4 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 16 + 18 = 34$$

Exercice 2

1) $\sin^2\alpha\, z^2 + \sin 2\alpha\, z + 1 + \cos^2\alpha = 0$.

Il s'agit de résoudre une équation du 2e degré, d'où :

$\Delta = (\sin 2\alpha)^2 - 4\cdot \sin^2\alpha \cdot (1+\cos^2\alpha)$

$= (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= -4\sin^2\alpha$

On trouve alors : $z' = \dfrac{-\sin 2\alpha + i\, 2\sin\alpha}{2\sin^2\alpha}$

$= \dfrac{-2\cos\alpha\sin\alpha + i\, 2\sin\alpha}{2\sin^2\alpha} = \dfrac{-\cos\alpha + i}{\sin\alpha}$

$z'' = \dfrac{-2\cos\alpha\sin\alpha - i\, 2\sin\alpha}{2\sin^2\alpha} = \dfrac{-\cos\alpha - i}{\sin\alpha}$

2) $(z')^2 + (z'')^2 = \left(\dfrac{-\cos\alpha + i}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{-\cos\alpha - i}{\sin\alpha}\right)^2$

$= \dfrac{\cos^2\alpha - 2i\cos\alpha - 1 + \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha - 1}{\sin^2\alpha}$

$= \dfrac{2(\cos^2 - 1)}{\sin^2\alpha} = \dfrac{-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -2$

3) $M'\left(\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{i}{\sin\alpha}\right)$ et $M''\left(\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{i}{\sin\alpha}\right)$

$\overrightarrow{M'M''} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ -\dfrac{i}{\sin\alpha} - \dfrac{i}{\sin\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{2i}{\sin\alpha} \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{M'M''}\| = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{-2}{\sin\alpha}\right)^2}$

Comme $\|\overrightarrow{M'M''}\| = 2\sqrt{2}$ on a

$2\sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{4}{\sin^2\alpha}}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$ car $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ donc $\sin\alpha > 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

car $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$

Exercice 3

$$\begin{cases} u_0 = 1+3i \\ u_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} u_n + \frac{3(\sqrt{3}+i)}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad v_n = u_n - 3i \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

1) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3i$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} u_n + \frac{3(\sqrt{3}+i)}{2} - 3i$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} u_n + \frac{3\sqrt{3}+3i-6i}{2}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} u_n + \frac{3\sqrt{3}-3i}{2}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} u_n + \frac{-3i(i\sqrt{3}+1)}{2}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (u_n - 3i)$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2} v_n$

Comme $v_{n+1} = a \cdot v_n$, ici $a = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

2) $v_n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} v_{n-1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} v_{n-2} \right) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 v_{n-2}$

$= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} v_{n-3} \right) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^3 v_{n-3}$

$= \dots = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n v_0$

3) $v_0 = u_0 - 3i = 1+3i-3i = 1$

$v_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$v_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

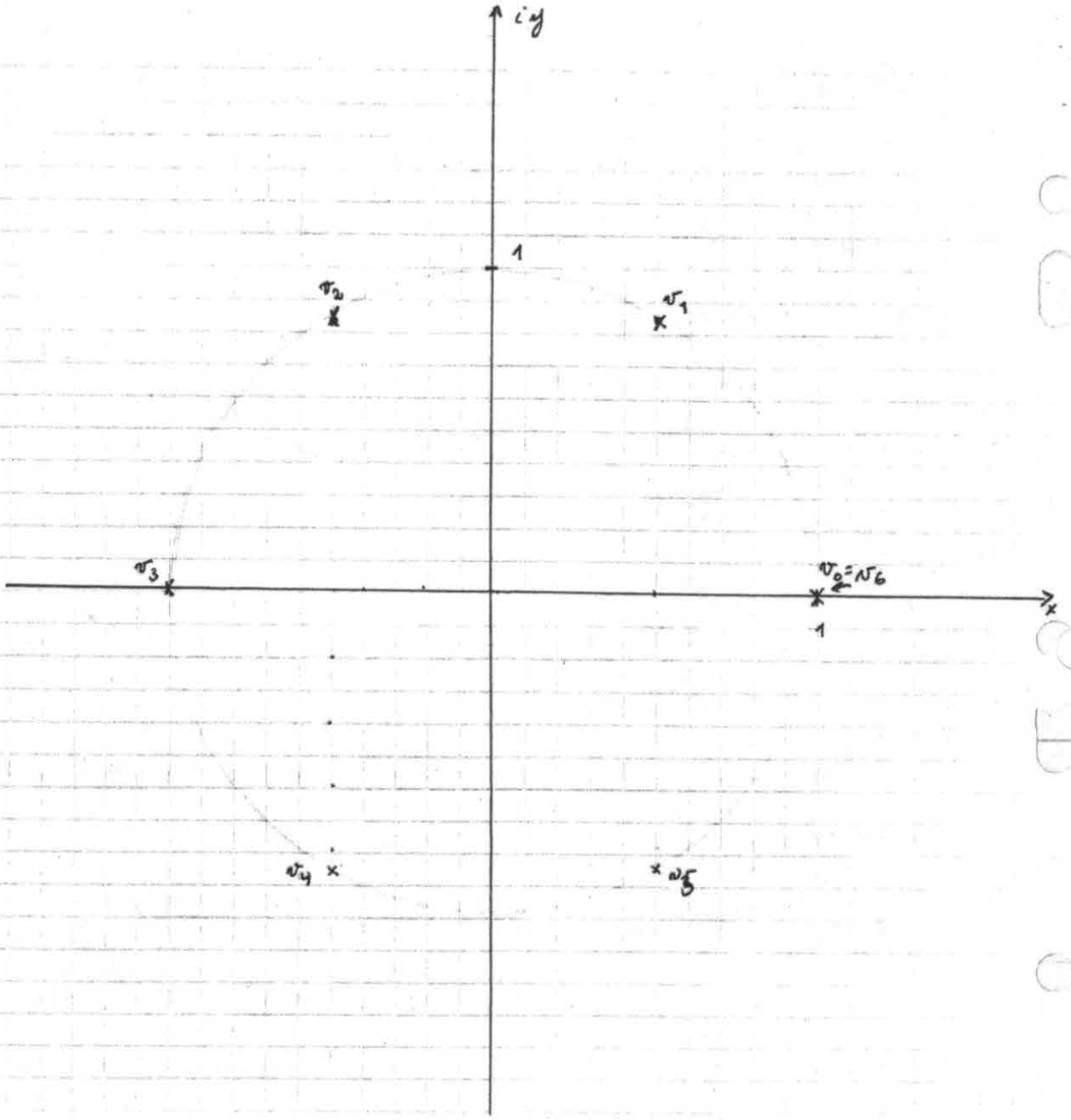
$v_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \quad (= -v_0)$

$v_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad (= -v_1)$

$v_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-(1+i\sqrt{3})}{2} = -\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4} = (-v_2)$

$v_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1+3}{4} = 1 \quad (= v_0)$

$\vdots$



On a trouvé que $v_6 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$

en général : $v_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 v_{n-1}$

$= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 v_{n-6}$

$= v_{n-6}$

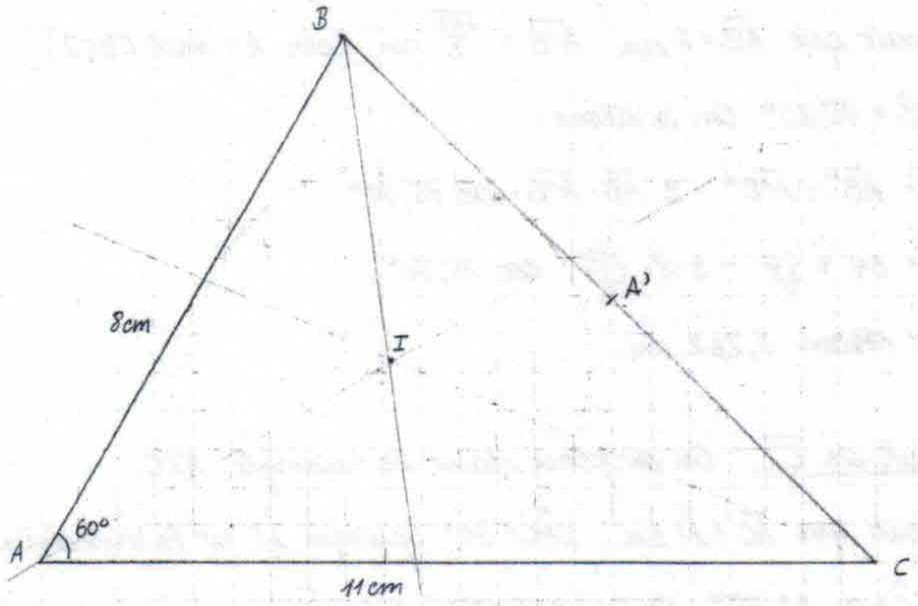
D'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

4) pour $n \in 3\mathbb{N}$.

pour $n \in 3\mathbb{N} \setminus 6\mathbb{N}$ on a $v_n = -1$

et pour $n \in 6\mathbb{N}$ on a $v_n = 1$

Exercice 4



- Calculer $\overline{BC}$

Dans tout triangle ABC on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ (Al-Kashi)

a, b, c désignent les longueurs des côtés. On a alors :

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\hat{A}$.

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 64 + 121 - 176\cos\hat{A}$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 97$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{97}\ (\approx 9{,}85)$

- Calculer $\hat{B}$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\hat{B}$

$\Leftrightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}}$

$\Leftrightarrow \cos\hat{B} = \dfrac{64 + 97 - 121}{2\cdot 8\cdot\sqrt{97}}$

$\cos\hat{B} = \dfrac{5\sqrt{97}}{194}$

$\hat{B} \simeq 75{,}295°$

- Calculer $\hat{C}$

Puisque la somme des amplitudes des angles internes d'un triangle est égale à 180°, on a $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$\Leftrightarrow \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\Leftrightarrow \hat{C} \simeq 44{,}70°$

• Calcul $\overline{AA'}$: On se place dans le triangle $\overset{\frown}{ABA'}$.

On sait que $\overline{AB} = 8$ cm $\quad \overline{A'B} = \frac{\sqrt{97}}{2}$ cm (car A = mil [BC])

et $\hat{B} = 75{,}30°$. On a alors :

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'B}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{A'B}\cdot\cos 75{,}30°$$

$$\overline{AA'}^2 = 64 + \frac{97}{4} - 2\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{97}}{2}\cdot\cos 75{,}30°$$

$$\overline{AA'} \simeq 8{,}262 \text{ cm}$$

• Calcul de $\overline{CI}$: On se place dans le triangle AIC.

On sait que $\overline{AC} = 11$ cm, $I\hat{A}C = 30°$ (puisque AI est la bissectrice en A)

et $I\hat{C}A \simeq 22{,}35°$. On a l'égalité suivante :

$$\frac{\overline{CI}}{\sin I\hat{A}C} = \frac{\overline{AI}}{\sin I\hat{C}A} = \frac{\overline{AC}}{\sin A\hat{I}C}$$

$A\hat{I}C = 180° - 30° - 22{,}35° = 127{,}65°$. Donc :

$$\overline{CI} = \frac{11 \text{ cm}}{\sin 127{,}65°}\cdot \sin 30°$$

$$\simeq 6{,}95 \text{ cm}$$

• Calcul du rayon du cercle inscrit

On a la formule $S = p\cdot r$ où p désigne le demi-périmètre du triangle.

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{97}+19}{2} \simeq 14{,}43$$

$$S = \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} = 22\sqrt{3}$$

$$r = \frac{S}{p} = 2{,}64 \text{ cm}$$

Exercice 5

1) $\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{\sin 2x}{1} = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x}{\cos 3x} + \frac{2\cos x \sin x}{1} = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x}{\cos 3x} + 2\cos x \sin x = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{3\sin x \cos^2 x - \sin^4 x}{\cos 3x} + 2\cos x \sin x = 0$$

$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x - \sin^3 x}{\cos 3x} + 2\cos x \right) = 0$$

$$\sin x \left(\frac{\cos 3x + 3\cos^3 x - \sin^3 x \cos x + 2\cos^2 x \cos 3x}{\cos x \cos 3x} \right) = 0$$

2) $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ $\quad \frac{abc}{2S} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$

On a: $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ et $\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$

$$\frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} =$$

1) $\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$

$$\tan x + \frac{\tan x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} + \frac{\tan 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} + \sin 2x = 0$$

$$\tan x + \frac{\tan x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)(1 - \operatorname{tg}^2 x)} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} + \frac{2}{(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)(1 - \operatorname{tg}^2 x)} + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0$$

$$\operatorname{tg} x \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} + \frac{1}{(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)(1 - \operatorname{tg}^2 x)} + \frac{1}{(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)} + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 0$$

$$\operatorname{tg} x \left[\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) + \frac{1}{(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x)(1 - \operatorname{tg}^4 x)} \right) = 0$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + 2 - 2 \operatorname{tg}^2 x = (3 - \operatorname{tg}^2 x)$$

Epreuve d'Analyse (15-18 h, jeudi le 3 mai 2007)

Question 1: (5 points)

Soit h un réel strictement positif.
On pose $x_k = kh$ pour $k = 1,2,3$.

Calculer l'intégrale $I = \int_{-h}^{h} \left| x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \right| dx$.

Question 2 : (12 points)

Soit $\mathcal{C}_\lambda$ le graphe de $f_\lambda : x \mapsto f_\lambda(x) = \lambda e^x + x^2 + 2x + 2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

1) Etudier $\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

Démontrer qu'il existe une fonction g telle que
$\lim_{x \to -\infty} (f_\lambda(x) - g(x)) = 0$ pour tout réel λ.

2) Calculer $f_\lambda'(x)$.

Démontrer que $y = f_\lambda(x)$ et $y' = f_\lambda'(x)$ vérifient quel que soit le choix de λ, une relation de la forme $F(x,y,y') = 0$ à déterminer.

En déduire l'ensemble des points de $\mathcal{C}_\lambda$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3) Calculer $y'' = f_\lambda''(x)$.

En déduire l'ensemble des points d'inflexion de $\mathcal{C}_\lambda$.

4) Etudier le signe de f_λ' . (On ne demande pas de calculer les racines de f_λ' .)

5) Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_\lambda$ et de $\mathcal{C}_{\lambda'}$ avec $\lambda \neq \lambda'$.

6) Etudier les variations de f_λ et esquisser sur un même graphique, les graphes pour $\lambda < -2$, $\lambda = -2$, $-2 < \lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

Question 3 : (3 points)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (2x-1)^2$ et $g(x) = \sup_{x \le t \le x+1} f(t)$.

Calculer explicitement g(x).

Q1

$$I = \int_{-h}^{h} |\underbrace{x(x-h)(x-2h)(x-3h)}_{\text{Parité}}| \, dx \quad \text{avec} \quad h>0$$

	$-\infty$		$-h$	0	h	$2h$	$3h$	$+\infty$
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-h$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-2h$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x-3h$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	
Parité			$+$	0	$-$			

$$I = \int_{-h}^{0} x(x-h)(x-2h)(x-3h)\,dx - \int_{0}^{h} x(x-h)(x-2h)(x-3h)\,dx$$

$$= \int_{-h}^{0} (x^2-xh)(x^2-5hx+6h^2)\,dx - \int_{0}^{h} (x^2-xh)(x^2-5hx+6h^2)\,dx$$

$$= \int_{-h}^{0} x^4 - 5hx^3 + 6h^2x^2 - x^3h + 5h^2x^2 - 6h^3x \,dx$$

$$- \int_{0}^{h} x^4 - 5hx^3 + 6h^2x^2 - x^3h + 5h^2x^2 - 6h^3x \,dx$$

$$= \int_{-h}^{0} x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x \,dx$$

$$- \int_{0}^{h} x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x \,dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}hx^4 + \frac{11}{3}h^2x^3 - 3h^3x^2\right]_{-h}^{0}$$

$$- \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}hx^4 + \frac{11}{3}h^2x^3 - 3h^3x^2\right]_{0}^{h}$$

$$= -\left(-\frac{h^5}{5} - \frac{3}{2}h\cdot h^4 - \frac{11}{3}h^2h^3 - 3h^3h^2\right) - \frac{h^5}{5} + \frac{3}{2}hh^4 - \frac{11}{3}h^2h^3 + 3$$

$$= -\frac{h^5}{5} + \frac{6h^5}{5} = \frac{9h^5}{5}$$

Q2

$f_\lambda(x) = \lambda e^x + x^2 + 2x + 2, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{dom } f_\lambda = \mathbb{R}$

1) $\lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\lambda e^x}_{\to \pm\infty \text{ ou } 0} + \underbrace{x^2 + 2x + 2}_{\to +\infty}$

$\to +\infty$ si $\lambda > 0$
$\Rightarrow 0$ si $\lambda = 0$
$\to -\infty$ si $\lambda < 0$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\lambda \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to +\infty \text{ si } \lambda > 0,\ = 0 \text{ si } \lambda = 0,\ \to -\infty \text{ si } \lambda < 0 \text{ (Hospital 2 fois)}} + 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$

$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Posons $g(x) = x^2 + 2x + 2$,

alors $\lim_{x \to -\infty} \left(f_\lambda(x) - g(x) \right) = \lim_{x \to -\infty} \lambda \underbrace{e^x}_{\to 0} = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) $\text{dom } f'_\lambda = \text{dom } f_\lambda = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x + 2$

$f_\lambda(x) - f'_\lambda(x) - x^2 = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(x^2 : fonction de x)

$\underbrace{y \quad y'}$

$F(x, y, y')$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) = 0$ (tangente horizontale $\Leftrightarrow$ // Ox)

$\Leftrightarrow$ $f_\lambda(x) - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $f_\lambda(x) = x^2$

Il s'agit des points de la forme $(x,\ f_\lambda(x) = x^2)$

3) Voilà, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2 > 0$ si $\lambda \geq 0$

si $\lambda \geq 0$, $\mathcal{C}_\lambda$ n'a pas de points d'inflexion

si $\lambda < 0$, $\mathcal{C}_\lambda$ admet le P.I $\left(\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right),\ f_\lambda\left(\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right)\right)\right)$

4) Soient $g_\lambda(x) = f'_\lambda(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $g_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x + 2$

$g'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$

si $\lambda \geq 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''_\lambda(x) = g'_\lambda(x)$		$+$	
$f'_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

ainsi si on note, x_0 l'unique zéro de $f'_\lambda(x)$ on a $f'_\lambda(x) < 0$ sur $]-\infty; x_0[$
et $f'_\lambda(x) \geq 0$ sur $]x_0; +\infty[$

pour $\lambda = 0$, $x_0 = -1$ car $f'_\lambda(x) = 2x + 2$

si $\lambda < 0$

x	$-\infty$		$\ln(-\frac{2}{\lambda})$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_\lambda(x)$ $g_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	max	↘	$-\infty$

$$g_\lambda\left(\ln\left(-\tfrac{2}{\lambda}\right)\right) = \lambda\left(-\tfrac{2}{\lambda}\right) + 2\ln\left(-\tfrac{2}{\lambda}\right) + 2$$
$$= 2\ln\left(-\tfrac{2}{\lambda}\right)$$

$f'_\lambda < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'_\lambda(0) = 0 \Leftarrow$ $g_\lambda\left(\ln(-\frac{2}{\lambda})\right) = 0$ si $\lambda = -2$

f'_λ admet deux racines x_1 et $x_2 \Leftarrow$ $g_\lambda\left(\ln(-\frac{2}{\lambda})\right) > 0$ si $\lambda < -2$

$f'_\lambda < 0$ sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f'_\lambda \geq 0$ sur $[x_1; x_2] \Leftarrow$ $g_\lambda\left(\ln(-\frac{2}{\lambda})\right) < 0$ si $\lambda \in]-2; 0[$

$f'_\lambda < 0$ sur $\mathbb{R}$

5) i) $f_\lambda(x) = e^x > 0$

ainsi si $\lambda_2 > \lambda_1$, $f_{\lambda_2}(x) > f_{\lambda_1}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

6) si $\lambda > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

si $\lambda = 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'_\lambda = 2e^x$		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

si $0 > \lambda > -2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_λ	$+\infty$	↘	min	↗		↘	$-\infty$

$\lambda = -2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$-$	
f_λ	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$

$\lambda < -2$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'_λ		$-$	
f_λ	$+\infty$	↘	$-\infty$

Q3

Posons $f(x) = (2x-1)^2$

$$g(x) = \sup_{x \le t \le x+1} f(t)$$

Vrai : $f'(x) = 4(2x-1) = 8x-8$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

$$(2x-1)^2 \le (2(x+\alpha)-1)^2$$

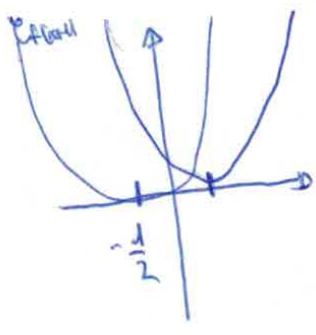
$$4x^2 - 4x + 1 \le 4(x+\alpha)^2 - 4(x+\alpha) + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4x^2 - 4x} \le \cancel{4x^2} + 8x\alpha + 4\alpha^2 \cancel{- 4x} - 4\alpha$$

$$\Leftrightarrow 8x\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha \ge 0$$

$$4\alpha^2 - 4\alpha(1 - 2x) \ge 0$$

à prouver



$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & \text{si } x \ge 0 \\ f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

étudier $f(x+\alpha)$ pour $\alpha \in [0;1]$?

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Jeudi, le 15 novembre 2007
15h-18h

I. Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$, m étant un paramètre réel et C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthogonal.

1) Précisez le domaine de définition et étudiez la continuité de f_m.

2) Démontrez que pour tout réel x et tout réel m, $f_{-m}(x)=f_m(-x)$.

Démontrez que C_{-m} est l'image de C_m par une transformation du plan que l'on précisera.

Dans la suite de l'exercice, on supposera $m>0$.

3) Etudiez les branches infinies de C_m pour $m>0$.

4) Étudiez le sens de variation de f_m pour $m>0$.

Montrez que pour tout réel $x \in dom\, f_m$, $(f_m)'(x)=\dfrac{m\, f_m(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) Étudiez la concavité et l'existence de points d'inflexion éventuels de C_m et dressez le tableau de variation de f_m pour $m>0$. Esquissez $C_{0,5}$, C_1 et C_2 dans un même repère orthonormé du plan.

6) Pour $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, calculez la primitive $F_m(x)$ de $f_m(x)$ qui s'annule en 0.

12 points

II. 1) Démontrez que, pour tout réel x, on a $2\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)=1+\cos^2(2x)$.

Calculez ensuite $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

2) Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[0;a]$ telle que, pour tout $x\in[0;a]$, $f(a-x)=f(x)$.

Démontrez que $\int_0^a x f(x)\,dx=\dfrac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$.

Déduisez-en $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

4 points

III. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la courbe C d'équation

$$y = 2e^{\frac{x}{4}}.$$

1) Démontrez qu'il existe un seul point P d'abscisse x_0 de C qui est le plus près de l'origine et que x_0 est l'unique solution de l'équation $-e^{\frac{x}{2}} = x$ et $x_0 \in [-1;0]$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = -e^{\frac{x}{2}}$.

a) Démontrez que $g([-1;0]) \subset [-1;0]$.

b) Démontrez que pour tout réel $x \in [-1;0]$, on a : $|g(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x_0|$.

c) Déduisez-en que $g\left(g\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ est une valeur approchée de x_0 à $\frac{1}{8}$ près.

4 points

$f_m(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m \qquad (m \in \mathbb{R})$

1) Puisque ① $1+x^2 \geq 0$ vrai pour tout réel x
② $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ vrai pour tout réel x
en effet :

$x + \sqrt{1+x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = -x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 1+x^2 = (-x)^2 \end{cases}$ impossible

donc $g : x \longmapsto x + \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;
or g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 1 > 0$ et par conséquent
$g(x) = x + \sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout réel x.

donc $f_m = \mathbb{R}$

2) $f_{-m}(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-m} = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m} \overset{*_1}{=} \left[\dfrac{(x-\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}\right]^m$

$= \left[-\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)\right]^m = \left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)^m = f_m(-x)$

$*_1$ $x - \sqrt{1+x^2} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x^2 = x^2 \end{cases}$ impossible
donc $h : x \longmapsto x - \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
or h est continue sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = -1$ et par conséquent
$h(x) = x - \sqrt{1+x^2} < 0$ pour tout réel x.

Démontrons que, dans un repère orthogonal, C_{-m} est l'image de C_m par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées :

$\underbrace{M(x;y)}_{s_\Delta(M'(-x;y))} \in C_{-m} \Leftrightarrow y = f_{-m}(x) \Leftrightarrow y = f_m(-x) \Leftrightarrow \underbrace{M'(-x;y)}_{s_\Delta(M(x;y))} \in C_m$

s_Δ étant la sym. orthog. par rapport à (Oy). Donc $s_\Delta(C_{-m}) \subset C_m$
et $s_\Delta(C_m) \subset C_{-m}$.

Dans la suite, $\boxed{m > 0}$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^m}_{\to 2^m} \cdot x^{m-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 1 \\ 2 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < m < 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f_m(x) - 1x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$

si $m > 1$, C_m admet une B.P. dans la direction de l'axe des y si $x \to +\infty$.
si $m = 1$, C_m admet une A.O. d'éq. $y = 2x$ si $x \to +\infty$.
si $0 < m < 1$, C_m admet une B.P. dans la direction de l'axe des x si $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}}\right)^m = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{+1}{-x\underbrace{\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}_{\to 2}}\right)^m$$

$$= 0$$

si $m > 0$, C_m admet une A.H. d'éq. $y = 0$ si $x \to -\infty$.

4) f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_m'(x) = m \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= m \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m \cdot f_m(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

donc f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (pour $m > 0$)

5) f_m' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_m''(x) = m \cdot f_m'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + m \cdot f_m(x) \cdot \frac{-1}{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m^2 f_m(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} + m \cdot f_m(x) \cdot \frac{-1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m \cdot f_m(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(m - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= m \cdot f_m(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{m\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$m\sqrt{1+x^2} - x = 0$
$\Leftrightarrow m\sqrt{1+x^2} = x$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ m^2(1+x^2) = x^2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (m^2-1)x^2 = -m^2 \end{cases}$ (*)

Si $m = 1$, (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$ impossible
f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
$f'' > 0$ car $f''(0) = 1$ et f'' est continue.

Si $m > 1$, (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \underbrace{\frac{-m^2}{m^2-1}}_{<0} \end{cases}$ impossible

f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
$f''(0) = m^2 > 0$ donc $f'' > 0$.

Si $0 < m < 1$, ④ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = \dfrac{-m^2}{\underbrace{m^2-1}_{>0}} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$ ③

$$f_m\left(\sqrt{\frac{m^2}{1-m^2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{m^2}{1-m^2}} + \sqrt{1+\frac{m^2}{1-m^2}}\right)^m = \left(\frac{m+1}{\sqrt{1-m^2}}\right)^m$$

$m\sqrt{1+x^2} - x < 0$

$\Leftrightarrow m\sqrt{1+x^2} < x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ m^2(1+x^2) < x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ (m^2-1)x^2 < -m^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 > \dfrac{-m^2}{m^2-1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x > \sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$

$m\sqrt{1+x^2} - x > 0$

$\Leftrightarrow x < \sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$

donc f'' s'annule et change de signe en $\sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$
et par conséquent C_m admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$.

En résumé :

Si $0 < m < 1$

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{m^2}{1-m^2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	0	↗		↗	$+\infty$
concavité		∪	P.I.	∩	

A.H. $y = 0$

B.P. dir. (Ox)

Si $m = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		$+$	
f'		$+$	
f		↗	$+\infty$

A.H. $y = 0$

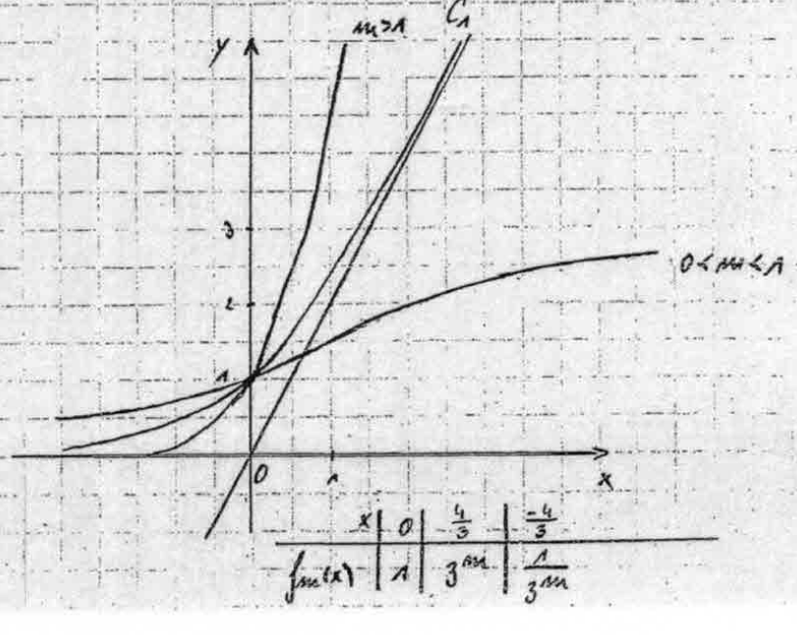
A.O. $y = 2x$

Si $m > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		$+$	
f'		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

A.H. $y = 0$

B.P. dir. (Oy)



x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$
$f_m(x)$	1	3^m	$\frac{1}{3^m}$

6) f_m est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_m admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\int_0^x f_m(t)\,dt = \int_0^x \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m dt$$

Par parties :

$u(t) = \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m \qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{m\cdot f_m(t)}{\sqrt{1+t^2}} \qquad v(t) = t$

$$= \left[t\cdot\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m\right]_0^x - \int_0^x m\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot f_m(t)\,dt$$

Par parties :

$u(t) = f_m(t) \qquad v'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$u'(t) = \dfrac{m\cdot f_m(t)}{\sqrt{1+t^2}} \qquad v(t) = \sqrt{1+t^2}$

$$= x\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m - m\left[\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m\cdot\sqrt{1+t^2}\right]_0^x + m\int_0^x m\cdot f_m(t)\,dt$$

$$= x\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m - m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m\sqrt{1+x^2} + m + m^2\int_0^x f_m(t)\,dt$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^x f_m(t)\,dt = \frac{1}{1-m^2}\cdot\left[x\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m - m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m\sqrt{1+x^2} + m\right]$

$= F_m(x)$

II 1) On a : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

D'où : $\cos^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Or : $1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Ainsi : $1 + \cos^2 2x = 2 \cdot (\cos^4 x + \sin^4 x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\, dx = \frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{(-2\sin 2x)}^{u'(x)}}{1+\underbrace{(\cos 2x)^2}_{u(x)}}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\Big[\arctan(u(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2}\Big[\arctan(-1) - \arctan 1\Big]$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2) Pour : $t = a - x \iff x = a - t$

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

$$\underbrace{\int_0^a x f(x)\, dx}_{I} = \int_a^0 -(a-t) f(a-t)\, dt = \int_0^a (a-t) f(t)\, dt$$

$$= a\int_0^a f(t)\, dt - \underbrace{\int_0^a t f(t)\, dt}_{I}$$

On en déduit que : $2I = a \cdot \int_0^a f(t)\, dt$

Par conséquent $\int_0^a x f(x)\, dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\, dx$

$$f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$ car $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$.

III 1) C est la courbe d'équation $y = 2e^{\frac{x}{4}}$

Soit $P(x;y) \in C$. La distance de P à l'origine O est :

$d(P;O) = \sqrt{x^2 + (2e^{\frac{x}{4}})^2}$.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4 \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2e^{\frac{x}{2}} = 2(x + e^{\frac{x}{2}})$.

et $f''(x) = 2 + e^{\frac{x}{2}} > 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

f' est une fonction dérivable strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f' définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et par conséquent l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution x_0. Puisque f' est str. croiss. f' change de signe en x_0.

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	↘	$f(x_0)$ MIN	↗

Donc il existe un seul point P de C qui est le plus près de l'origine.

$f'(-1) = -2 + \frac{2}{\sqrt{e}} \approx -0,79 < 0$

$f'(0) = 2 > 0$

} donc $x_0 \in [-1;0]$

2) $g(x) = -e^{\frac{x}{2}}$.

a) g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc

$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow g(0) \leq g(x) \leq g(-1)$

$g(0) = -1$; $g(-1) = \frac{-1}{\sqrt{e}} \approx -0,61$

$\Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 0$

donc $g([-1;0]) \subset [-1;0]$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{-1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ et $g''(x) = \frac{-1}{4} e^{\frac{x}{2}} < 0$

donc g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

pour tout $x \in [-1;0]$, $g'(0) \leq g'(x) \leq g'(-1)$

$g'(0) = \frac{-1}{2}$; $g'(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{e}}$

d'où $0 \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[-1;0]$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $x, x' \in [-1;0]$

$$|g(x) - g(x')| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x'|.$$

En particulier pour $x' = x_0$, $g(x_0) = x_0$:

$$|g(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|.$$

c) On pose $x = \frac{-1}{2}$ on obtient : $\left|g\left(\frac{-1}{2}\right) - x_0\right| \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left|\frac{-1}{2} - x_0\right|}_{\leq \frac{1}{2} \text{ car } x_0 \in [-1;0]}$,

$$\leq \frac{1}{4}$$

Et pour $x = g\left(\frac{-1}{2}\right)$: $\left|g\left(g\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - x_0\right| \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left|g\left(\frac{-1}{2}\right) - x\right|}_{\leq \frac{1}{4}}$.

$$\leq \frac{1}{8}$$

$g\left(g\left(\frac{-1}{2}\right)\right) \approx -0,677$.

Analyse 2007nov

I. 1) C.E. : $1+x^2 \geq 0$ tjs vrai

$\Rightarrow x + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{>0} \geq 0$ ✓ $\quad \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

$1+x^2 > 0$, $\sqrt{\ } :]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ est " " " (composée de fcts continues)

En particulier $f_m(x) \geq 0$

2) $f_{-m}(x) = \dfrac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^m}$

$f_m(-x) = (-x+\sqrt{1+x^2})^m$

$f_{-m}(x) = f_m(-x)$

$\Leftrightarrow 1 = (\sqrt{1+x^2}-x)^m (\sqrt{1+x^2}+x)^m = (1+x^2-x^2)^m = 1$ ✓

Comme $f_{-m}(x) = f_m(x)$ on obtient le graphe de $f_{-m}(x)$ à partir du graphe de $f_m(x)$ en faisant une symétrie orthogonale (axiale) d'axe (Oy).

$S_{(Oy)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (-x,y)$ $\quad \Rightarrow S_{(Oy)} \circ \mathcal{C}_m = \mathcal{C}_{-m}$:

$$S_{(Oy)}\big(\underbrace{-x, f_m(-x)}_{\mathcal{C}_m}\big) = \big(x, f_m(-x)\big) = \big(\underbrace{x, f_{-m}(x)}_{\mathcal{C}_{-m}}\big)$$

$\underline{m>0}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(x+\sqrt{1+x^2})^m}_{\downarrow -\infty \quad \downarrow +\infty} \overset{(*)}{>} 0$ $\qquad$ AH : $y=0$ si $x \to -\infty$

(*) $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(x + |x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\big(1 + \underbrace{\mathrm{sgn}(x)}_{\to -1}\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\big)$ $\quad x \to -\infty$, $\to 1$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{"-1"}{-\infty} = 0$ $\quad x - \sqrt{1+x^2} \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(x+\sqrt{1+x^2})^m}_{\to+\infty} = +\infty$ par d'AH.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(1 + \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\Big)^m = 2^m$ $\quad \frac{x}{|x|} \to \mathrm{sgn}(x) = +1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt{1+x^2})^m - 2^m x \overset{(x>0)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \big(x^m (1+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}})^m - 2^m x\big)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\Big[\underbrace{x^{m-1}}_{\substack{\to 0 \text{ si } m<1 \\ =1 \text{ si } m=1 \\ \to+\infty \text{ si } m>1}} \underbrace{\big(1+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\big)^m}_{\to 2} - 2^m\Big] = \begin{cases} \infty \text{ si } m>1 \\ -\infty \text{ si } m<1 \end{cases}$ mais d'AO, mais BP

AO $y = 2x$ $\quad$ si $m=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sqrt{1+x^2} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+\sqrt{1+x^2})$

$= \dfrac{x^2 - 1 - x^2}{-x - \sqrt{1+x^2}}$

$= 0$

analyse 2ootnov. $\mathrm{dom}\, f'_m = \mathrm{dom}\, f_m$ et $\forall x \in \mathrm{dom}\, f'_m$ on a :

4) $f'_m(x) = m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{m}{\sqrt{1+x^2}} f_m(x) \quad \overset{!}{\geq} 0$

5) $f''_m(x) = m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-3/2}\cdot 2x \cdot f_m(x) + m(1+x^2)^{-1/2} f_m(x)\cdot\frac{m}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ / $f_m(x)>0$

$m>0 \quad \Leftrightarrow m^2(1+x^2)^{-1} \geq x \quad | \cdot (1+x^2)^{3/2} > 0$

$\Leftrightarrow m\sqrt{1+x^2} \geq x \quad | (\cdot)^2$ (car $m>0$ et $\sqrt{1+x^2}>0$) si $x \leq 0$ toujours vrai

$\Leftrightarrow m^2 + m^2x^2 \geq x^2$ avec $x \geq 0$ (*)

$\Leftrightarrow (m^2-1)x^2 + m^2 \geq 0$

$\Delta = b^2-4ac = -4m^2(m^2-1) = 4m^2-4m^4 = 4m^2(1-m^2)$

$\begin{cases} <0 & \text{si } m>1 \\ =0 & \text{si } m=1 \\ >0 & \text{si } m<1 \end{cases}$

- $m>1$ $\Rightarrow$ pas de pt d'infl. pas de P.I. et $f''_m(x)\geq 0$
- $m=1$ $\Rightarrow$ écarter la racine négative (voir (*)) $\Rightarrow$ une seule racine $\Rightarrow$ un pt d'infl. $I(x_1, f_m(x_1))$ avec $x_1 = m^2(1-m^2)$

$x_1 = \frac{0-2m\sqrt{1-m^2}}{2(m^2-1)} = \frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

$x_2 = -\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$ à écarter

si $m<1$

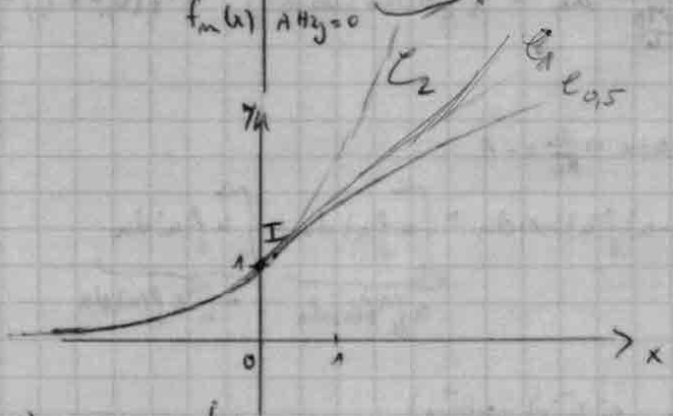
tdv :

x	$-\infty$		$-m^2(m^2-1)$		$+\infty$
$f''_m(x)$		+	0	−	
$f'_m(x)$		+		+	
$f_m(x)$		↗	I	↗	$+\infty$

AH $y=0$

si $m \geq 1$ $\quad (m^2-1) \geq 0$ si $m>1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''_m(x)$	+		+
$f'_m(x)$	+		+
$f_m(x)$	AH $y=0$ ↗		$+\infty$



x	0	1
$f_{0,5}(x)$	1	−
$f_1(x)$	1	−
$f_2(x)$	1	−

$m=0,5 \Rightarrow I_1(0,25\,(0,75)^{0,5}; f(0,25\,0,75^{0,5}))$ $\quad \geq 0,19 \quad \geq 1,13$

$m=1 \Rightarrow I_2(0,1)$

6) $F_m(x) = \int f_m(x)\,dx + k$ avec $F_m(0)=0$

$\int (x+\sqrt{1+x^2})^m\,dx =$ → tourner la page

int. p. parties:

$f_m(x)$ ↓ , 1 ↓ , $+$

$\frac{m}{\sqrt{1+x^2}} f_m(x) \Rightarrow x$

$$\Rightarrow \int f_m(x)\,dx = x\cdot f_m(x) - m\underbrace{\int \frac{f_m(x)\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}_{=:B}$$

$$B = \int \frac{\overbrace{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}^{f_m(x)}\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$f_m(x)$ ↓ , $\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ ↓ , $+$

$\frac{m}{\sqrt{1+x^2}} f_m(x) \Rightarrow \sqrt{1+x^2}$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot f_m(x) - m\int f_m(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (1\mp m^2)\int f_m(x)\,dx = x\cdot f_m(x) - m\sqrt{1+x^2}\, f_m(x) \quad \text{si } m \neq 1$$

$$\Rightarrow \int f_m(x)\,dx = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{1-m^2}\left(x - m\sqrt{1+x^2}\right) + k$$

pour $x=0$: $\frac{1}{1-m^2}(-m) + k \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow k = \frac{m}{1-m^2}$

$$\Rightarrow F_m(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{1-m^2}\left(x - m\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{m}{1-m^2}$$

II. 1) $2(\cos^4 x + \sin^4 x) \overset{?}{=} 1+\cos^2(2x) = 1+(2\cos^2 x - 1)^2 = 1+4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 x + 2\sin^4 x = 2 + 4\cos^4 x - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)^2 = 2 + 2\cos^4 x - 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2 - 4\cos^2 x + 2\cos^4 x = 2 + 2\cos^4 x - 4\cos^2 x$ ✓

$u = \cos 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 2x}\,dx = \frac{-1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{-2\sin 2x}^{u'}}{1+\underbrace{\cos^2 2x}_{u^2}}\,dx = \frac{-1}{2}\left[\arctan(\cos 2x)\right]_0^{\pi/2} = +\frac{1}{2}\left(+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \pi/4 \qquad (*)$$

2)

$u = a - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1$

$$\int_0^a x f(x)\,dx = \int_0^a x f(a-x)\,dx = \int_a^0 (a-u) f(u)(-1)\,du = \underbrace{\int_0^a a f(u)\,du}_{a\int_0^a f(x)dx} - \underbrace{\int_0^a u f(u)\,du}_{-\int_0^a x f(x)dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^a x f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$$

Soit $f(x) = \frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \overset{\uparrow}{=} f(x)$ ✓

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x\right) = \sin x\cos x$

$\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x\right)^4 + \left(\sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x\right)^4 = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx \overset{(A)}{=} \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$$

(analyse 2007 nov)

III. 1) $\text{dist}(C,0) = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{x^2 + 4e^{x/2}}$ (>0)

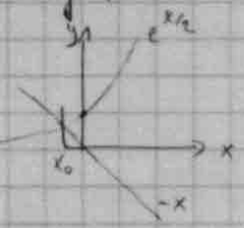
dist $(C,0)$ est minimale $\Leftrightarrow$ $x^2+4e^{x/2}$ est minimale

Trouver le minimum de la fct $x^2+4e^{x/2} = f(x)$

$f'(x) = 2x + 2e^{x/2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + e^{x/2} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x/2} = -x$



$f'(x)$ est continue
$f'(-1) = -1 + \frac{1}{e^{1/2}} < 0$
$f'(0) = 1 > 0$
$\Rightarrow$ (avec le th. des valeurs intermédiaires) $\exists x_0 \in [-1,0]$ tq. $f'(x_0) = 0$
$\Leftrightarrow x_0 = -e^{x_0/2}$

comparons les deux fcts: $\frac{d}{dx}(e^{x/2}) = \frac{1}{2}e^{x/2} > 0$ $\quad g = e^{x/2}$ strictement croissante

$\frac{d}{dx}(-x) = -1 < 0$ $\quad \Rightarrow -x$ strictement décroissante

Comme les deux fcts sont continues et $e^{x/2} < -x$ pour un x bien choisi, $e^{x/2}$ croiss., $-x$ décroiss.,

il existe un seul point x_0 tel que $e^{x_0/2} = -x_0$

si $x=0$: $e^{x/2} = 1 > 0 = -x$

si $x=-1$: $e^{x/2} = \frac{1}{e^{1/2}} < 1 = -x$

$\Rightarrow x_0 \in [0,1]$, voir argumentation ↑

2) a) $g(x) = -e^{x/2}$, $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{x/2} < 0$, g continue, $g(-1) = -e^{-1/2} = -\frac{1}{e^{1/2}} < 0$, $g(0) = -e^0 = -1$

x	-1		0
$g(x)$	$-\frac{1}{e^{1/2}}$	↘	-1

th. des val. intermédiaires $\Rightarrow$ si $x \in [-1,0] \Rightarrow g(x) \in [-1; -\frac{1}{e^{1/2}}] \subset [-1,0]$

b) $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$ (éq. de la tangente en $x = x_0$)

$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}g(x_0)(x - x_0)$ $\quad g(x_0) = -e^{x_0/2} \overset{!}{=} x_0$ (voir 1))

$g(x) - x_0 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0)$ $\quad |x_0| \le 1$

$|g(x) - x_0| = \frac{1}{2}\underbrace{|x_0|}_{\le 1}|x - x_0|$

$|g(x) - x_0| \le \frac{1}{2}|x - x_0|$

c) Soit $f = g \circ g \Rightarrow f' = g' \circ g \cdot g'$ $\quad \frac{d}{dx} g(g(x)) = g'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$g(g(x)) - \underbrace{g(g(x_0))}_{x_0} = \underbrace{g'(g(x_0))}_{x_0} \cdot g'(x_0)(x - x_0)$

$g(g(x)) - x_0 = \frac{1}{2}g(x_0) \cdot \frac{1}{2}g(x_0)(x - x_0)$ $\quad |x_0| \le 1$ et $|x_0| \le 1$

$|g(g(x)) - x_0| \le \frac{1}{4}|x - x_0|$

$\Rightarrow |g(g(-\tfrac{1}{2})) - x_0| \le \frac{1}{4}\underbrace{|-\tfrac{1}{2} - x_0|}_{\le 1/2 \text{ car } x_0 \in [-1,0]} \le \frac{1}{8}$ ✓

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mercredi, le 9 mai 2007

15H00 – 18H00

I. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, indiquer la nature de l'isométrie $f = s_2 \circ s_1$, composée des symétries par rapport aux droites données d_1 et d_2 ? Écrire l'expression analytique de f.

1) $d_1 : 3x + y = 5$ et $d_2 : 3x + 2y = -5$

2) $d_1 : x - 4y = 3$ et $d_2 : 4x + y = 1$

(6 points)

II. Soient A , B , C et D les sommets d'un carré tel que $\overline{AB} = a$.

1) Caractériser l'ensemble des points M vérifiant $\overline{MB}^2 + \overline{MD}^2 - 2\overline{MC}^2 = 2a^2$,

2) Caractériser l'ensemble des points M vérifiant $\overline{MB}^2 + \overline{MD}^2 - \overline{MC}^2 = a^2$,

(4 points)

III. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on donne un point P d'affixe réel p positif et un point R d'affixe imaginaire pur qi avec q réel positif tel que $\overline{OP} + \overline{OR} = a$ avec a réel strictement positif. On considère la carré direct PQRS.

Déterminer le lieu géométrique de chacun des points Q et S lorsque l'affixe de P décrit [0 , a].

(5 points)

IV. Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal C. On note H le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de [AB] et N le pied de la bissectrice intérieure issue de B. Démontrer que les droites AH, CM et BN sont concourantes en un point D si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

(5 points)

Q1

1) S_1 : sym. par rapp. à $d_1 \equiv 3x+y=5 \iff y = -3x+5$

S_2 : sym par rapp. à $d_2 \equiv 3x+2y=-5 \iff y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

$A = d_1 \cap d_2$: $-3x+5 = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ $\iff$ 1-2

$\iff -6x + 10 = -3x - 5$

$\iff x = 5$

$y = -15+5 = -10$

$A(5;-10)$

$\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$\vec{d_2}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

angle orienté de $\vec{d_1}$ vers $\vec{d_2}$ → calculé avec $(\vec{d_1}, \vec{d_2})$ à l'aide du produit vectoriel

$\cos(\vec{d_1}, \vec{d_2}) = \frac{1 + \frac{3}{2}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{13}{4}}}$

$= \frac{11}{2\sqrt{130}}$

$= \frac{\sqrt{130}}{11 \cdot 130}$

$(\vec{u}, \vec{v}) \sim 15,25°$

rotation de centre $A(5;-10)$ et d'angle $2(\vec{u}, \vec{v})$

expression analytique de f :

$f = s_2 \circ s_1$: $P \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow P' \in \mathbb{R}^2$

s_1 : $(x,y) \longmapsto \left(-\frac{6(3x+y-5)}{10} + x ; -\frac{2(3x+y-5)}{10} + y \right)$

s_2 : $(x,y) \longmapsto \left(-\frac{6(3x+2y+5)}{13} + x ; -\frac{4(3x+2y+5)}{13} + y \right)$

$(x'',y'') = f(x,y) \iff (x'',y'') = s_2(s_1(x,y))$

⋮

on vérifie que c'est une rotation et

que $\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{130}}{11 \cdot 130}\right)\right) = \frac{\sqrt{130}}{11 \cdot 130}$

$\sin\left(\text{——————}\right) = \sqrt{1 - \cos^2(\ldots)}$

2) s_1 : $d_1 \equiv x - 4y = 3 \iff d_1 \equiv 4y = x - 3 \iff d_1 \equiv y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

s_2 $d_2 \equiv 4x + y - 1 \iff d_2 \equiv y = -4x + 1$

$B = d_1 \cap d_2$: $-4x + 1 = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

$\iff -16x + 4 = x - 3$

$\iff 17x = 7$

$\iff x = \frac{7}{17}$

$y = -\frac{28}{17} + \frac{17}{17} = -\frac{11}{17}$

$\vec{d_1}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\vec{d_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

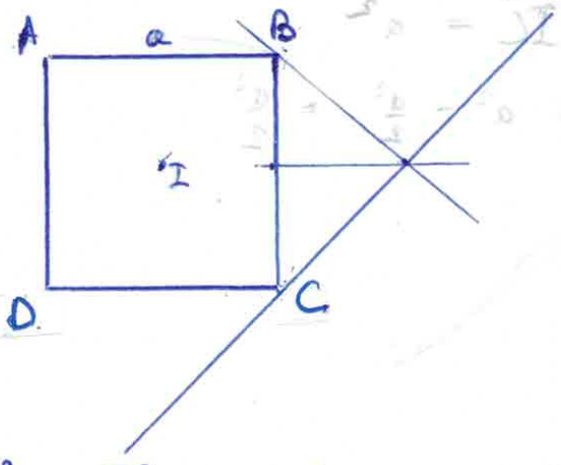
$\vec{d_1} \perp \vec{d_2}$, cqfd entre les 2 : $\frac{\pi}{2}$

f est une rotation de centre $\left(\frac{7}{17} ; -\frac{11}{17}\right)$ et d'angle π

Expression analytique : $\begin{cases} x' - \frac{7}{17} = -\left(x - \frac{7}{17}\right) \\ y' + \frac{11}{17} = -\left(y + \frac{11}{17}\right) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x' = x + \frac{14}{17} \\ y' = -y + \frac{22}{17} \end{cases}$

Q2



$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

1) $\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 - 2\overrightarrow{MC}^2 = 2a^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) +$

$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{MI}^2} + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \underline{\overrightarrow{IB}^2} + \cancel{\overrightarrow{MI}^2} + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID} + \underline{\overrightarrow{ID}^2}$

$-2(\cancel{\overrightarrow{MI}^2} + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} + \underline{\overrightarrow{IC}^2}) = 2a^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID} - 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} = 2a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID} - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} = a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}-2\overrightarrow{IC}) = a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{CI} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC} = \frac{a^2}{2}$

droite $\perp$ à (CA) passant par le point $P = proj_{(AC)}(M)$

$\Leftrightarrow \|IP\| \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow \|IP\| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2} = \|IC\|$

$\hookrightarrow P = C$

droite $\perp$ à (CA) passant par le point C

2) $\Leftrightarrow$

$$\vec{MI}^2 + \vec{IB}^2 - 2\vec{MI}.\vec{IC} = a^2$$

$$\vec{MI}.\vec{MI} - \vec{MI}.\vec{AC} = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Soit G le barycentre de $(B,1), (D,1), (C,-1)$

$$\vec{GB} + \vec{GD} - \vec{GC} = 0$$

$$\vec{MG}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GD}^2 - \vec{GC}^2 = a^2$$

$$\vec{GA}^2 + 2\vec{GA}.(\underbrace{\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC}}_{\vec{AG}}) + \underbrace{\vec{AB}^2}_{a^2} + \underbrace{\vec{AD}^2}_{a^2} - \underbrace{\vec{AC}^2}_{-2a^2}$$

$\Leftrightarrow MG^2 - GA^2 = a^2$ $\Rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \vec{MG}^2 = GA^2 + a^2$

$G = 0$

ou

$\Leftrightarrow \vec{MA}^2 = a^2$

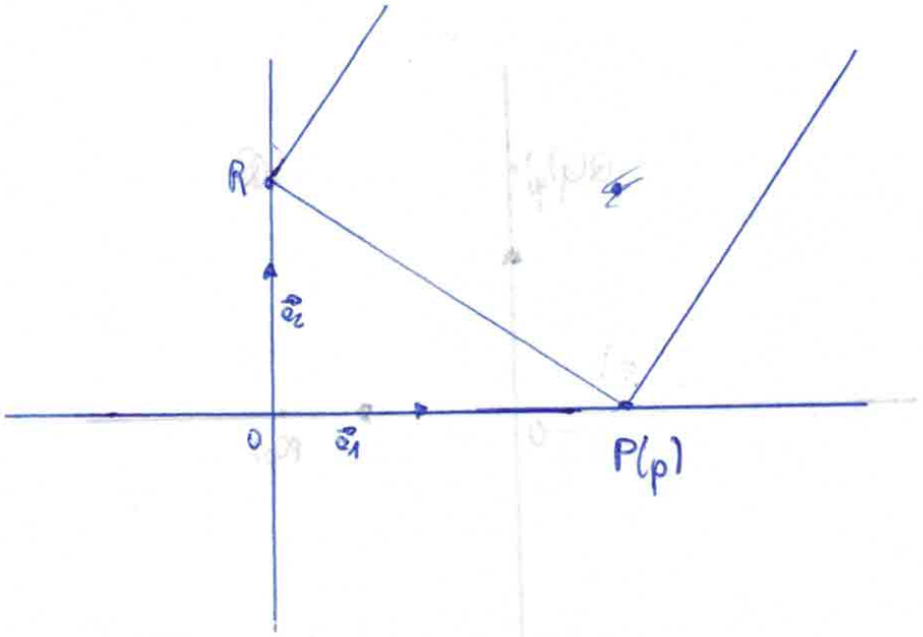
$$\vec{MA}^2 + 2\vec{MA}.\vec{AB} + a^2 + \vec{MA}^2 + 2\vec{MA}.\vec{AD} + \underbrace{\vec{AD}^2}_{a^2} - \vec{MA}^2 - 2\vec{MA}.\vec{AC} \underbrace{- \vec{AC}^2}_{-2a^2} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA}^2 + 2\vec{MA}\,(\underbrace{\vec{AB} + \vec{AD}}_{\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}} - \vec{AC}) = a^2$$

$= 0$

cercle de centre A et de rayon a $\Leftrightarrow \vec{MA}^2 = a^2$

Q3



$p \in [0;a]$

$q = a - p$

$\overline{PR} = \sqrt{(a-p)^2 + p^2}$

$= \sqrt{a^2 - 2ap + p^2 + p^2}$

$= \sqrt{a^2 - 2ap + 2p^2}$

faux

mauvais dessin

S est la rotation de R de $-\frac{\pi}{2}$ autour le centre P

$z' - p = e^{i(-\frac{\pi}{2})}(z - p)$

$\Leftrightarrow z' = -iz + ip + p$

ainsi $z_S = -i(a-p) + p(i+1)$

$= -ai + pi + pi + p$

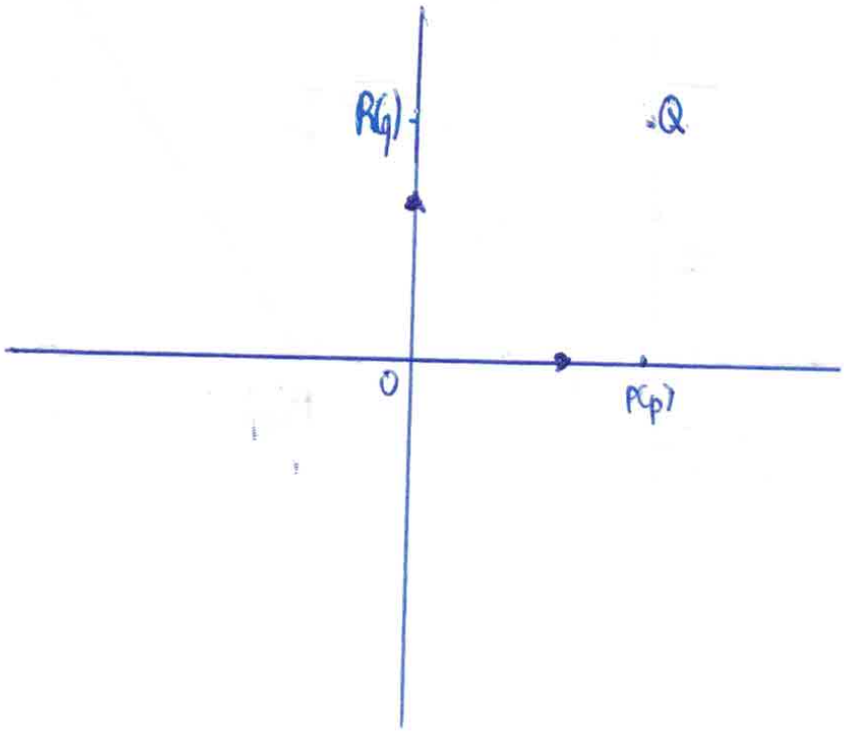
$= p + i(-a+2p)$

S(p, -a+2p)

ensemble de

S décrit la droite

$y = 2x - a$ avec $x \in [0;a]$



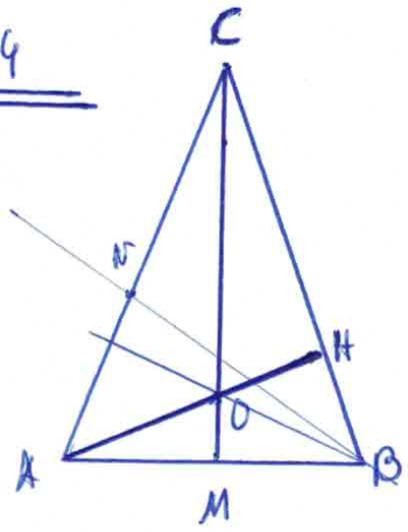
0<s quelque soit $p \in [0, a]$

$p+q = a$
et $p=q$ donc $p = \frac{a}{2}$
$q = \frac{a}{2}$

P et R ne pouvant pas bouger

donc $Q\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Q4



(AH) est la hauteur issue de A
(CM) est la hauteur issue de C } ∩ orthocentre O

Si ABC est équilatéral, alors les notions bissectrice, médiane et hauteurs coïncident. Ainsi (BN) est la hauteur issue de B et comme 3 hauteurs se coupent dans l'orthocentre, les 3 droites sont concourantes

Réciproquement supposons que $O \in (BN)$

il faut (BN) est la hauteur issue de B

alors $CNO \overset{\text{rec}}{\sim} CHO$

donc $C\hat{N}O = C\hat{H}O$ est une bissectrice

. De plus comme M = mil [AB], (CM) est une médiane

(BN) est bissectrice et hauteur, est-ce une médiane ?

(AH) est hauteur, est-ce médiane et bissectrice

oui car $O \in (AH)$

et $O \in \cap$ médianes (BN) et (CM)

$O \in \cap$ bissectrices

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 20 novembre 2007

15H00 – 18H00

I. Soit ABC un triangle.

Montrer qu'un point X satisfait

$$\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right)\cdot\overrightarrow{XC}=\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)\cdot\overrightarrow{XA}=\left(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XA}\right)\cdot\overrightarrow{XB}$$

si et seulement si X est l'orthocentre de ABC.

(4 points)

II. Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, soit **L** l'ensemble de points M(x,y) dont les coordonnées sont fournies par $x=\dfrac{1}{\cos 2t}$ et $y=\dfrac{\cos t}{\cos 2t}$.

1) Montrer que l'axe des x est un axe de symétrie de l'ensemble **L**.
2) Vérifier que tous les points de cet ensemble sont situés sur une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques (excentricité, centre, foyer(s), sommet(s), directrices, asymptotes)
3) Tracer l'ensemble **L**.

(6 points)

III. On considère un triangle ABC rectangle en A, I le milieu de [BC] et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A, passant par I. La droite AI coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points I et P.

1) Caractériser le barycentre du système $\{(A,4);(B,-1);(C,-1)\}$.
2) Déterminer deux réels b et c tels que A soit barycentre de
$$\{(P,2);(B,b);(C,c)\}.$$
3) Chercher l'ensemble des points M du plan tels que
$$\left\|2\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$$

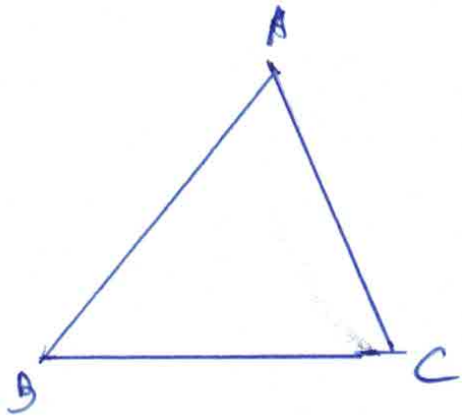
(4 points)

IV. Soit ABCD un tétraèdre.

1) Pour quelles valeurs de k existe-t-il un unique point M tel que
$$\overrightarrow{MA}+k\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ ?$$
Exprimer alors $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$
2) Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$
Montrer que f est une bijection d'un ensemble E (à choisir aussi grand que possible) sur un intervalle F à déterminer.
3) En déduire l'ensemble décrit par le point M tel que $\overrightarrow{MA}+k\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ lorsque k décrit E.
4) Soit $k\in E$ et M et N les points tels que $\overrightarrow{MA}+k\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{NB}+k\cdot\overrightarrow{ND}=\vec{0}$.
Montrer que $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont coplanaires.
5) Soit O le milieu de [MN], I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Exprimer $\overrightarrow{IO}$ en fonction de $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ et en déduire l'ensemble décrit par O lorsque k décrit E.

(6 points)

Q1



K orthocentre de ABC

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{XA} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ et} \\ \vec{XB} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} \quad \\ \quad \end{cases}$

ou $\begin{cases} \quad \\ \quad \end{cases}$

alors $(\vec{XA} + \vec{XB}) \cdot \vec{XC} = (\vec{XB} + \vec{XC}) \cdot \vec{XA} = (\vec{XC} + \vec{XA}) \cdot \vec{XB}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{XB} \cdot \vec{XC} = \vec{XB} \cdot \vec{XA}$ et $\vec{XC} \cdot \vec{XA} = \vec{XC} \cdot \vec{XB}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{XB} \cdot (\vec{XC} + \vec{AX}) = 0$ et $\vec{XC} \cdot (\vec{XA} + \vec{BX}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{XB} \cdot \vec{AC} = 0$ et $\vec{XC} \cdot \vec{BA} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{XB} \perp \vec{AC}$ et $\vec{XC} \perp \vec{BA}$

$\Leftrightarrow$ X orthocentre de ABC.

Q2

$f(t) = x = \frac{1}{\cos 2t}$ $\left(\Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$

$g(t) = y = \frac{\cos t}{\cos 2t} = \cos t \times$ $\left(\Leftrightarrow \text{———————}\right)$

$$f(\pi - t) = \frac{1}{\cos(2\pi - 2t)} = \frac{1}{\cos(-2t)} = \frac{1}{\cos(2t)} = f(t)$$

$$g(\pi - t) = \cos(\pi - t)\, f(\pi - t) = -\cos(t)\, f(t) = -g(t)$$

↳ axe des x est un axe de symétrie

(si $(f(t), g(t)) \in \mathcal{C}$, alors $(f(t), -g(t)) \in \mathcal{C}$

$$y^2 = \cos^2 t\, x^2 = \frac{(1+\cos 2t)}{2} x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cos(2t)\, x^2 \qquad \cos(2t)\, x = 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\, x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

asymptotes
↳ forcément
que on doit
trouver une hyperbole

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{2} - y^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 1$$

$\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

axe focal // axe des abscisses

Passons $\begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases}$ centre $S = (-\frac{1}{2}; 0)$

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

alors $\frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{Y^2}{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$c = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$:

Foyers $F_g(\frac{\sqrt{6}}{4}; 0)$

$F_g'(-\frac{\sqrt{6}}{4}; 0)$

Sommets $S_g(\frac{1}{2}; 0)$

$S_g'(-\frac{1}{2}; 0)$

dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$F_0(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}; 0)$

$F_0'(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}; 0)$

$S_0(0; 0)$

$S_0'(-1; 0)$

Directrices : $d_{F_g} \equiv x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$d_{F_g'} \equiv x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$d_{F_0} \equiv x = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}$

$d_{F_0'} \equiv x = -\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}$

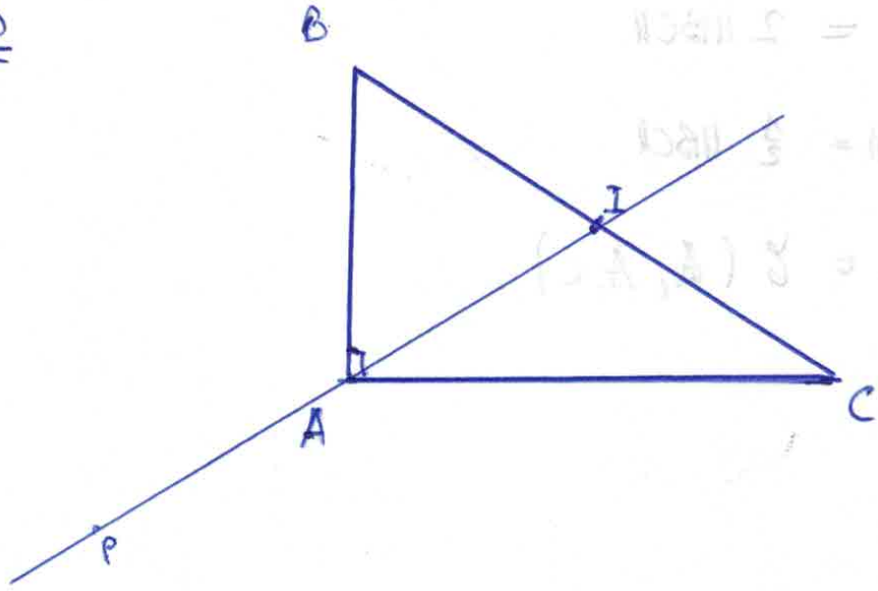
asymptotes $A_1 \equiv y = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x$

$A_2 \equiv -\frac{\sqrt{2}}{2} x$

$A_1^0 \equiv y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{1}{2})$

$A_2^0 \equiv y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{1}{2})$

Q3



$AI = AP = BI = \frac{1}{2} BC$

1) $4\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC} = 0$

$\Leftrightarrow 4\vec{GI} + 4\vec{IA} - \vec{GI} - \vec{IB} - \vec{GI} - \vec{IC} = 0$

$\Leftrightarrow 2\vec{GI} = 4\vec{AI}$

$\Leftrightarrow \vec{GI} = 2\vec{AI} = \vec{PI}$

$\Leftrightarrow G = P$

2) $2\vec{AP} + b\vec{AB} + c\vec{AC} = 0$

$b\vec{AB} + c\vec{AC} - 2\vec{PA} = 2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$

$b = c = 1$

$A =$ barycentre $\{(P;2); (B;1); (C;1)\}$

ou $(P;2)$ est barycentre $\{(A;4) \ldots\}$

donc $(A;4)$ est barycentre de $\{(P;2); (B;1); (C;1)\}$

$4\vec{PA} - \vec{PB} - \vec{PC} = 0$ ou $4\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MP}$ $\forall M$

$\Leftrightarrow 4\vec{MA} = 2\vec{MP} + \vec{MB} + \vec{MC}$ $\forall M$

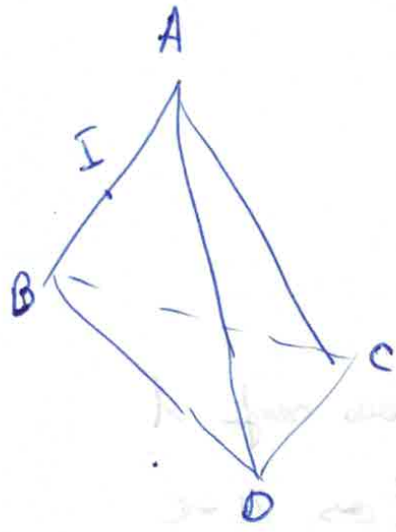
A est barycentre de

3) $\|\overrightarrow{4MA}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\|$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}\left(A, \frac{1}{2}BC\right)$

Q4



1) $\vec{MA} + k\vec{MC} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MC} + \vec{CA} + k\vec{MC} = 0$

$\Leftrightarrow (k+1)\vec{MC} = \vec{AC}$

Pour $k \neq -1$, on a $\vec{MC} = \frac{1}{k+1}\vec{AC}$ | pour k fixé, M est déterminé

Si $k \neq -1$, $\vec{MA} + k\vec{MA} + k\vec{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (k+1)\vec{MA} + k\vec{AC} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{k}{1+k}\vec{AC}$

2) $f : x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longmapsto \frac{x}{x+1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$\lim_{\substack{x \to (-1)^+ \\ (-1)^-}} = \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$

aussi $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} > 0$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f est injective

et donc $f : \underset{\text{E}}{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} \longrightarrow \underset{\text{F}}{\text{im } f = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$ est bijective

3) $E = \mathbb{R}\setminus\{-1\} \ni k$

$\vec{MA} + k\vec{MC} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM} = \dfrac{k}{k+1}\vec{AC}$

k prend toutes les valeurs sauf 1

or si $k=1$, $\vec{AM} = \vec{AC} \Leftrightarrow M = C$

ainsi comme A, M et C sont alignés

$\vec{MA} + k\vec{MC} = 0 \Leftrightarrow$ M décrit la droite (AC) sans le point C

4) $\vec{AM} = \dfrac{k}{k+1}\vec{AC}$

$\vec{BN} = \dfrac{k}{k+1}\vec{BD}$

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$

$= -\dfrac{k}{k+1}\vec{AC} + \vec{AB} + \vec{BN}$

$= -\dfrac{k}{k+1}\vec{AC} + \vec{AB} + \dfrac{k}{k+1}\vec{BD}$

$= -\dfrac{k}{k+1}\vec{AB} - \dfrac{k}{k+1}\vec{BC} + \vec{AB} + \dfrac{k}{k+1}\vec{BC} + \dfrac{k}{k+1}\vec{CD}$

$= \left(\dfrac{k+1-k}{k+1}\right)\vec{AB} + \dfrac{k}{k+1}\vec{CD}$

$= \dfrac{1}{k+1}\vec{AB} + \dfrac{k}{k+1}\vec{CD}$

5) $\vec{MN} = \frac{1}{k+1}\vec{AB} + \frac{k}{k+1}\vec{CD}$

$\vec{MO} = \frac{1}{k+1}\vec{AI} + \frac{k}{k+1}\vec{CJ}$

$\vec{IO} = \vec{IM} + \vec{MO}$

$= \vec{IA}$ +

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'algèbre et de probabilité

Vendredi, le 16 mai 2007
15h-18h

I. 35% des élèves d'un lycée pratique le cyclisme (sport A) et 25% pratiquent le tennis (sport B), alors que 15% pratiquent les deux sports A et B :

1. Un élève étant choisi au hasard, calculer la probabilité pour qu'il :
   a) pratique au moins l'un des deux sports considérés
   b) ne pratique aucun des deux sports considérés
   c) pratique le sport A et ne pratique pas le sport B
   d) pratique un et un seul des deux sports considérés
2. On interroge au hasard un élève pratiquant le sport A. Quelle est la probabilité pour qu'il pratique le sport B ?
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard et de façon indépendante n élèves de ce lycée. (On assimilera ces choix à n tirages avec remise.)
   a) Quelle est la probabilité p_n pour qu'au moins l'un des élèves choisi pratique le sport A ?
   b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0{,}9$

(4 points)

II. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme u_0 et par la condition $u_{n+1} = u_n^2 + u_n \quad (n \in \mathbb{N})$

1. Etudier le sens de variation de cette suite.
2. Démontrer que si cette suite converge, alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 0$.
3. Etablir que si $u_0 + u_0^2 \succ 0$, alors la suite diverge.
4. Démontrer par récurrence que si $u_0 + u_0^2 \prec 0$, alors pour tout entier naturel n.
   on a : $-1 \prec u_n \prec 0$.
   Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3 points)

III. Soit la transformation du plan complexe (P) définie par :

$$f(z) = \frac{z+1-2i}{z+2+i}.$$

1. Représenter dans (P) le point A d'affixe -3+i. Calculer son image A'=f(A) et représenter A' dans (P).
2. Déterminer et représenter dans (P) :
   a) l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$
   b) l'ensemble F des points M d'affixe z tels qu'un argument de f(z) soit $\frac{\pi}{2}$
3. Déterminer E∩F et vérifier le résultat de la question 1.

(4 points)

IV. Démontrer que pour tout réel x, on a:

$$\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

et

$$\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

en utilisant une méthode ***algébrique***, puis une méthode ***géométrique***.

Indication : Pour la démonstration géométrique, on pourra introduire les trois points M_1, M_2 et M_3 *du cercle trigonométrique tels que :*

$$(\vec{i};\vec{OM}) = x \qquad (\vec{i};\vec{OM_1}) = x + \frac{2\pi}{3} \qquad (\vec{i};\vec{OM_2}) = x + \frac{4\pi}{3}$$

(5 points)

V.

1. Etablir : $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cdot\cos(a-b)$

2. A partir de $\cos\frac{\pi}{6}$ trouver $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3. Résoudre l'équation trigonométrique :

$$\cos^2(x - \frac{\pi}{3}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-2-\sqrt{3}}{4}$$

(4 points)

Q1

$P(A) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} = 0,35$

$P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$

$P(A \cap B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0,15$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,35 + 0,25 - 0,15$

$= 0,45$

b) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cap B)$ $\qquad \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$= 1 - 0,45$

$= 0,55$

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,35 - 0,15 = 0,2$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

or $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$

d) $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ } comme c)

$= 0,35 + 0,25 - 2 \cdot 0,15$

$= 0,3$

2. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7}$

3. $n \geq 2$ (n tirages avec remise)

X : la v.a représentant le nombre d'élèves qui pratiquent le sport A

$p = 0,35$

$\bar{p} = 0,65$

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - C_n^0 (0,35)^0 (0,65)^{n-0} \\ &= 1 - (0,65)^n \end{aligned}$$

d) $p_n \geq 0,9 \iff (0,65)^n \leq 0,1$

$\iff n \ln 0,65 \leq \ln 0,1$

$\iff n \geq \underbrace{\frac{\ln 0,1}{\ln 0,65}}_{\simeq 5,35}$

Le plus petit entier naturel tel que $p_n \geq 0,9$ est $n = 6$.

Q2

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Supposons que $u_n \longrightarrow L$ si $n \to +\infty$

alors $u_{n+1} - u_n^2 + u_n = 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ si $n \to +\infty$

$L \quad L^2 \quad L \quad 0$

c'est-à-dire $-L^2 = 0$

$\Leftrightarrow L = 0$

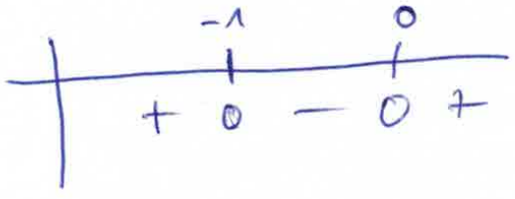
Ainsi si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la limite est nécessairement égale à 0.

1. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

3. $u_0(1+u_0) > 0$

$u_0 \neq 0$



Dans ce cas $u_1 > u_0$

et $u_2 > u_1$

Or la seule limite possible est 0,

donc si $u_0(1+u_0) > 0$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge

4. $u_0 + u_0^2 < 0 \Leftrightarrow u_0 \in]-1; 0[$

$u_1 = u_0^2 + u_0 < 0$ et $u_1 > u_0 > -1$

Supposons que $-1 < u_n < 0$

Dans ce cas $u_{n+1} = u_n^2 + u_n < 0$

u_n	-1		0
$u_n^2+u_n$	0	$-$	0

et $u_{n+1} > u_n > -1$

Ainsi pour tout n, on a $-1 < u_n < 0$.

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante (vue as) et majorée par 0 (vue dh)

elle converge. Par ex, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Q3

$\forall z \neq -2-i$, on a $f(z) = \dfrac{z+1-2i}{z+2+i}$

1. $A(-3+i)$

$$f(-3+i) = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i}$$

$$= \frac{2+4i+i-2}{1+4}$$

$$= i$$

2. a) $\forall z \neq -2-i$, $|f(z)| = 1$

$\Leftrightarrow |z+1-2i| = |z+2+i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow 2x + 1 - 4y + 4 = 4x + 4 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow -6y = 2x$

$\Leftrightarrow d: y = -\frac{1}{3}x$ $\qquad B \notin d$

E est la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x$.

b) Soit $z \neq -2-i$, alors $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re} f(z) = 0 \qquad \operatorname{Im} f(z) > 0$

$$f(z) = \frac{(x+1)+(y-2)i}{(x+2)+(y+1)i} \cdot \frac{(x+2)-i(y+1)}{(x+2)-i(y+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)^2+(y+1)^2} + i\,\frac{(x+2)(y-2)-(x+1)(y+1)}{(x+2)^2+(y+1)^2}$$

$\arg f(z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+2) + (y-2)(y+1) = 0 \\ \text{et} \\ (x+2)(y-2) - (x+1)(y+1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+3x-y=0 & (C_1) \\ y-3x-5>0 & (C_2) \end{cases}$

(C_1) $\quad (x+\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Cercle de centre $\Omega(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ privé du point $B(-2-i)$

(C_2) Demi-plan ouvert de bord $\Delta : y = 3x+5$ (ne contenant pas O)

F est le demi-cercle de centre $\Omega(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$ situé dans le demi-plan ouvert de bord $\Delta : y = 3x+5$ ne contenant pas O.

(3) $z \in E \cap F \Leftrightarrow |f(z)| = 1$ et $f(z) \in i\mathbb{R}_+$

$= A$

$\Leftrightarrow f(z) = i$

ou bien point le dessin

d'où $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -3+i$ (vérifié !!)

Q4

*) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

$= \cos x + \cos x \cos\frac{2\pi}{3} - \sin x \sin\frac{2\pi}{3} + \cos x \cos\frac{4\pi}{3} - \sin x \sin\frac{4\pi}{3}$

$= \cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$= 0$

*) $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

$= \sin x + \sin x \cos\frac{2\pi}{3} + \cos x \sin\frac{2\pi}{3} + \sin x \cos\frac{4\pi}{3} + \cos x \sin\frac{4\pi}{3}$

$= \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$= 0$

Méthode géométrique :

$OM = 1$ et $(\vec{i}, \vec{OM}) = x$ $\quad \vec{OM} = \cos x\, \vec{i} + \sin x\, \vec{j}$

$OM_1 = 1$ et $(\vec{i}, \vec{OM_1}) = x + \frac{2\pi}{3}$ $\quad \vec{OM_1} = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\vec{i} + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\vec{j}$

$OM_2 = 1$ et $(\vec{i}, \vec{OM_2}) = x + \frac{4\pi}{3}$ $\quad \vec{OM_2} = \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\vec{i} + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\vec{j}$

$\vec{OM} + \vec{OM_1} + \vec{OM_2} = \left(\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\right)\vec{i} + (\quad)\vec{j}$

O est le centre du cercle circonscrit au triangle $M M_1 M_2$

$M_1M^2 = OM^2 + OM_1^2 - 2\,OM\,OM_1 \cos\frac{2\pi}{3}$

$= 1 + 1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 3$

d'où $M_1M = \sqrt{3}$ de même $M_1M_2 = M_2M = \sqrt{3}$

(l'angle aux sommets vaut $\frac{\pi}{3}$, Δ équilatéral)

$\Rightarrow$ O est l'isobarycentre d'où $\vec{OM} + \vec{OM_1} + \vec{OM_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos - = \\ \sin - = \end{cases}$

autre méthode $\sin x = \dfrac{\vec{c} \wedge \vec{OM}}{\|\vec{c}\| \, \|\vec{OM}\|}$ ($\|\vec{c}\| = 1$, $\|\vec{OM}\| = 1$)

$$\sin x + \sin\left(x + \tfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \tfrac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \vec{c} \wedge \left(\vec{OM} + \vec{OM_1} + \vec{OM_2} \right)$$

($\vec{c} \neq \vec{0}$; $\vec{OM} + \vec{OM_1} + \vec{OM_2} = \vec{0}$)

car O centre du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral.

Q5

1) $\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b))$

$= \cos^2(a)\cos^2(b) - \sin^2(a)\sin^2(b)$

$= \cos^2(a) - \cos^2(a)\sin^2(b) - \sin^2(b) + \cos^2(a)\sin^2(b)$

$= \cos^2(a) - \sin^2(b)$

2) $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$ $\quad \frac{\pi}{12}$ app. 1er quadrant

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2}$

$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

$= \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{2\sqrt{3}+4}{8}$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{8-4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \overset{1.}{=} \cos\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$(E) \Leftrightarrow \quad \cos\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{-2-\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\cos\frac{\pi}{12}$

$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - \frac{7\pi}{12} = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{7\pi}{12} = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi ; -\frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ALGEBRE ET DE PROBABILITES

Jeudi, le 22 novembre 2007

15.00 – 18.00 heures

QUESTION I : 5 points

1) Sachant que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, vérifier que $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

2) Résoudre l'équation :

$$\sqrt{3}\sin^2 x-2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$$

3) Calculer les trois côtés d'un triangle sachant qu'ils sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le plus grand angle est le double du plus petit.

QUESTION II : 4 points

M désigne un point du plan complexe d'affixe $m=a+bi,\ (\ a\in IR, b\in IR\ )$.
On considère l'équation : $(E_m)\equiv z^3+(2-i)z^2+(m^2+1-2i)z-i(1+m^2)=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m), après avoir vérifié qu'elle admet une racine de la forme $bi, b\in IR$.

2) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $m=a+bi$ tels que l'équation (E_m) admette au moins deux racines de même module. Représenter Γ.

QUESTION III : 2 points

Trois nombres complexes non nuls z_1, z_2 et z_3 ont pour produit $3i\sqrt{3}$.

Leurs arguments respectifs φ_1, φ_2 et φ_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et leurs modules r_1, r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Sachant que $\varphi_1\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$, déterminer z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.



QUESTION IV : 5 points

Soient les suites numériques réelles $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ telles que

$$u_0 = \frac{3}{5} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{6}, \forall n \in IN$$
$$v_n = 5u_n + 3, \forall n \in IN$$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est décroissante. Est-elle convergente ?

4) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.
Déterminer les limites de S_n et de S'_n lorsque n tend vers $+\infty$.

QUESTION V : 4 points

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$X = 2n - \sqrt{1 + 8C_n^2} \qquad Y = C_n^2 - \frac{3}{n}C_n^3 - n$$

2) D'une boîte contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité pour que les numéros additionnés de ces trois boules donne un total égal à 20. Motiver !

3) Deux nombres sont choisis au hasard parmi les nombres de 1 à 9. Si la somme de ces deux nombres est paire, quelle est la probabilité que ce sont deux nombres impairs qu'on a choisi ? Motiver !

4) Cinq hommes et quatre femmes s'assoient sur un banc de neuf places numérotées de 1 à 9.

a) Combien de possibilités y a-t-il pour s'asseoir ?

b) Combien de possibilités y a-t-il si les femmes veulent occuper les places paires ?

c) Combien de possibilités y a-t-il si les femmes veulent rester ensemble ?

Q1

1) $\alpha+\beta+\gamma=\pi \iff \alpha=\pi-\beta-\gamma$

$$\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\pi-\gamma}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\right)$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}\;2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

2) $\sqrt{3}\sin^2x-2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$\iff -\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

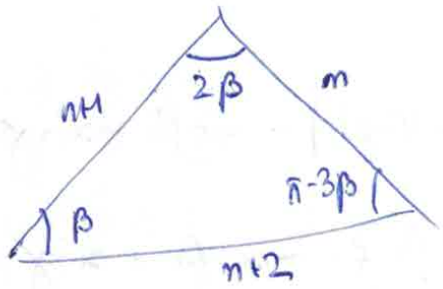
$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$\iff \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin x+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos x$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)$

$\iff \begin{cases} \frac{\pi}{6}-2x=-\frac{\pi}{6}-x+k2\pi \\ \frac{\pi}{6}-2x=\frac{\pi}{6}-x+k2\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$



Soit α le plus grand angle, $\alpha = 2\beta$ avec β le plus petit angle.

En outre $\beta + 2\beta + \gamma = 3\beta + \gamma = \pi$

$$\gamma = \pi - 3\beta$$

$$\beta ; 2\beta ; \pi - 3\beta$$

Ainsi $$\frac{n+2}{\sin 2\beta} = \frac{n}{\sin\beta}$$

$$\Leftrightarrow (n+2)\sin\beta = 2n \sin\beta\cos\beta$$

$$\Leftrightarrow \cos\beta = \frac{n+2}{2n}$$

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\frac{(n+2)}{2n}$$

$$n^3 = n(n+1)^2 + n(n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)^2 = n(n+1)^2 - (n+2)^2$$

$$\Leftrightarrow n^3 = n^3 + 2n^2 + n - n^2 - 4n - 4$$

$$\Leftrightarrow 0 = n^2 - 3n - 4$$

$$\Leftrightarrow n = 4 \text{ ou } \underbrace{n = -1}_{\text{à rejeter}}$$

$n = 4$

$n+1 = 5$

$n+2 = 6$.

Q2

$m = x + iy$

$(E_m) \equiv z^3 + (2-i)z^2 + [m^2+1-2i]z - i(1+m^2) = 0$

1) bi est solution

$\Leftrightarrow (bi)^3 + (2-i)(bi)^2 + (m^2+1-2i)(bi) - i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - (2-i)b^2 + ib(m^2+1-2i) - i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - 2b^2 + ib^2 + ib(x^2-y^2+2ixy+1-2i) - i(1+x^2-y^2+2ixy) = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - 2b^2 + ib^2 + ibx^2 - iby^2 - 2bxy + ib + 2b - i - ix^2 + iy^2 + 2xy = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2 - 2bxy + 2b - 2xy = 0 \\ -b^3 + b^2 + bx^2 - by^2 + b - 1 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2 + 2b(1-xy) + 2xy = 0 \quad (1) \\ -b^3 + b^2 + b(x^2-y^2+1) - 1 - x^2 + y^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow b^2 - b(1-xy) - xy = 0$

$S = -\frac{b}{a} = 1 - xy$

$P = \frac{c}{a} = -xy$

$b = 1$ ou $b = -xy$

ok dans (2) — impo. de (2)

$P(z)$ est divisible par i

	1	$2-i$	m^2+1-2i	$-i(1+m^2)$
i		?	$2i$	$i(m^2+1)$
	1	2	m^2+1	0

$(E_m) \equiv (z-i)(z^2+2z+m^2+1)=0$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $z^2+2z+m^2+1=0$

$\Delta = 4-4m^2-4$

$= -4m^2$

$= (2im)^2$

$z_1 = \dfrac{-2+2im}{2} = -1+im$

$z_2 = -1-im$

$|z_1| = \sqrt{(x+y)^2 + x^2}$

$|z_2| = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}$

$|z_3| = 1$

1) $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow y=0$

↳ axe réel

2) $|z_1| = |z_3| \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$

↳ cercle de centre $(0;-1)$ et de rayon 1

3) $|z_2| = |z_3| \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$ → cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1.

Q3

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tq $z_1 z_2 z_3 = 3i\sqrt{3}$

avec $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$

ainsi $r_1 r_2 r_3 e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)} = 3\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 r_2 r_3 = 3\sqrt{3} \\ \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

or $r_2 = 2r_1$ et $r_3 = 2r_2 = 4r_1$

et $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{3}$ et $\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{\pi}{3} = \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}$

ainsi $$\begin{cases} 8r_1^3 = 3\sqrt{3} \\ 3\varphi_1 + \pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi_1 = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$\varphi_1 \in [0; \frac{2\pi}{3}] \longrightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = \sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})} = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{7\pi}{6}} = -3 - \sqrt{3}i$

Q4

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$v_n = 5u_n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) $v_{n+1} = 5u_{n+1} + 3 = \frac{5}{6}u_n - \frac{15}{6} + \frac{18}{6}$

$= \frac{5}{6}u_n + \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{6}(5u_n + 3)$

$= \frac{1}{6}v_n$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

et de premier terme $v_0 = 5 \cdot u_0 + 3 = 5 \cdot \frac{3}{5} + 3 = 6$

2) $v_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$u_n = \frac{v_n - 3}{5} = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 3\right] < 0$

3) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{6} - u_n - \frac{1}{2}$

$= -\frac{5}{6}u_n - \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 3\right] - \frac{1}{2}$

$= -\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$= -\left(\frac{1}{6}\right)^n < 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{5}$, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4) $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$

$= 6 \dfrac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{6}}$

$= \frac{36}{5}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right]$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{36}{5}$

$S_n' = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{5} v_n - \frac{3}{5}$

$= \frac{36}{25}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right] - \frac{3}{5}(n+1)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n' = -\infty$

Q5

$n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$

1) $X = 2n - \sqrt{1 + 8\,C_n^2}$

$= 2n - \sqrt{1 + 8\,\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}$

$= 2n - \sqrt{1 + 4\,n(n-1)}$

$= 2n - \sqrt{(2n-1)^2}$

$= 2n - |2n-1|$

$= 1$

$Y = C_n^2 - \frac{3}{n}\,C_n^3 - n$

$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{3}{n}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - n$

$= \frac{n(n-1) - (n-1)(n-2)}{2} - \frac{2n}{2}$

$= \frac{n^2 - n - n^2 + 3n - 2 - 2n}{2}$

$= -1$

2) $10 + 9 + 1$ $\quad 9 + 8 + 2$ $\quad 8 + 7 + 5$

$8 + 2$ $\quad 7 + 4$

$7 + 3$ $\quad 6 + 5$

$6 + 4$

8 cas favorables

C_{10}^3 possibilités

Au total, la probabilité vaut $\frac{8}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$

3) $1 + 9$ $\quad 3 + 5$ $\quad 5 + 7$ $\quad 7 + 9$

$1 + 7$ $\quad 3 + 7$ $\quad 5 + 9$

$1 + 5$ $\quad 3 + 9$

$1 + 3$

10 possibilités

nbre de cas favorables

$$\underbrace{C_5^2}_{\text{somme de nbre impairs}} + \underbrace{C_4^2}_{\text{somme de nbre pairs}} = 10 + 6$$

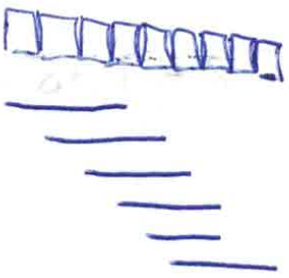
⇒ ce qui est bien de couples

probabilité : $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

4) a) $9! = 362\,880$ pass.

b) $4!\,5! = 2880$ pass.

c)



⇒ $4!\,5! = 1728$ possibilités

Epreuve d'Analyse (15-18 h, mercredi 30 avril 2008)

Question 1: (8 points)

Calculer

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x \sin^5 t\cdot\cos t\,dt\right)dx$

b) $J=\int_{\frac{7}{2}}^{5}\frac{2x-7}{x^2-2x-3}dx$

c) $\lim_{\lambda\to+\infty} K(\lambda)$ avec $K(\lambda)=\int_2^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx$, et donner une interprétation géométrique du nombre trouvé (on considère $\lambda > 2$)

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Question 2 : (10 points)

Soit $\mathcal{C}_\lambda$ le graphe de la fonction

f_λ (λ réel strictement positif) telle que $\begin{cases} f_\lambda(x)=x^\lambda \ln x, \text{ si } x>0 \text{ et} \\ f_\lambda(0)=0 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_λ en $x=0$.
2) Dresser le tableau de variation de f_λ .
3) Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_\lambda$.
4) Montrer que chaque courbe $\mathcal{C}_\lambda$ admet la même tangente en $x=1$.
5) a) Montrer que chaque courbe $\mathcal{C}_\lambda$ admet un point I_λ à tangente horizontale et d'abscisse strictement supérieur à 0.
   b) Soit l'ensemble de ces points I_λ lorsque λ décrit l'ensemble des réels strictement positifs. Caractériser cet ensemble par une équation cartésienne.

Question 3 : (2 points)

Dans un repère orthonormé on considère les courbes des fonctions f et g telles que $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^n$ $(n\geq 1)$. Considérons les points I(1 ;0), J(0 ;1) et K(1 ;1). Les courbes des fonctions f et g partagent le carré IOJK en 3 parties. Déterminer n pour que ces 3 parties aient la même aire.

Q1

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, dt \right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sin^6 t}{6} \right]_0^x dx$

$= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 x \, dx$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)^3$ ($1-\cos^2 2x$; $\cos^2 2x \cos 2x$)

$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx$

$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 3\cos 2x + \frac{3}{2}(1+\cos 2x) - \cos 2x + \cos 2x \sin^2 2x \right) dx$ ($-4+\frac{3}{2} =$)

$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\cos 2x + \sin^2 2x \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{48} \left[\frac{5}{2}x - \frac{5}{4}\sin 2x + \frac{\sin^3 2x}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{48} \cdot \left[\frac{5}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} - 0 + -0 \right]$

$= \frac{5\pi}{384} + \frac{1}{48} \cdot \left(-\frac{15+2}{12} \right)$ (encore quelque part ?)

b) $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$

$\frac{2x-7}{(x-3)(x+1)} = \frac{a}{(x-3)} + \frac{b}{(x+1)}$

$\Leftrightarrow \quad 2x-7 = a(x+1) + b(x-3)$

$\begin{cases} a+b=2 \\ a-3b=-7 \end{cases}$ $\qquad 4b = 9 \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$

$a = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

$$I = \int_{\frac{7}{2}}^{5} \frac{2x-7}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{4}\int_{\frac{7}{2}}^{5} \frac{1}{(x-3)}\,dx + \frac{9}{4}\int_{\frac{7}{2}}^{5} \frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln|x-3|\right]_{\frac{7}{2}}^{5} + \frac{9}{4}\left[\ln|x+1|\right]_{\frac{7}{2}}^{5}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\ln 2 - \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \frac{9}{4}\left(\ln 6 - \ln\tfrac{9}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{9}{4}\left(\ln(2) + \ln(3) - 2\ln(3) + \ln(2)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{9}{2}\ln(2) - \frac{9}{4}\ln(3)$$

$$= 4\ln(2) - \frac{9}{4}\ln(3)$$

c) $K(b) = \int_2^b (x+1)e^{-x}\,dx$

$(x+1)e^{-x} > 0$ ($x+1 > 3$ sur $[2;+\infty[$, $e^{-x} > 0$)

avec $b \geq 2$

$x+1$	e^{-x}
1	$-e^{-x}$

$$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_2^b + \int_2^b e^{-x}$$

$$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_2^b - \left[e^{-x}\right]_2^b$$

$$= -(b+1)e^{-b} + 3e^{-3} - e^{-b} + e^{-2}$$

$$= -e^{-b}(b+2) + 4e^{-2}$$

$\lim_{b\to+\infty} -e^{-b}(b+2) = 0$ (par l'Hospital), donc $\lim_{b\to+\infty} K(b) = 4e^{-2}$

Interprétation géométrique : Aire délimitée par la courbe $(x+1)e^{-x}$, l'axe des abscisses et la droite $x=2$.

d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\arctan(t) \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 1$$

Q2

Soit $\lambda > 0$.

posons $f_\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\text{dom } f_\lambda = [0; +\infty[$

1) f_λ est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0} f_\lambda(x) = \lim_{x \to 0^+} x^\lambda \ln x$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\lambda}}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\lambda x^{-\lambda-1}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-\lambda x^{-\lambda}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-\lambda} x^\lambda$$

$$= 0$$

Ainsi $\lim_{x \to 0} f_\lambda(x) = 0 = f_\lambda(0)$

il s'ensuit que f_λ est continue en 0.

$\text{dom}_c\ f_\lambda = [0; +\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1)$$

si $\alpha \neq 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\alpha) x^{-\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha-1}}{(1-\alpha)}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \in]0;1[\\ 0 & \text{si } \alpha \in]1;+\infty[\end{cases}$$

si $\alpha = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_{\alpha=1}(x) - f_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$

$= -\infty$

demi-tangente verticale ↑

si $\alpha \in]0;1]$, $\mathrm{dom}\, f' =]0;+\infty[$ (pas dérivable en 0)

si $\alpha \in]1;+\infty[$, $\mathrm{dom}\, f' = [0;+\infty[$ (dérivable en 0)

2) Fixons $\alpha > 0$.
Soit $x \in \mathrm{dom}\, f'_\alpha$

$$f'_\alpha(x) \geq 0 \iff \underbrace{x^{\alpha-1}}_{>0} (\alpha \ln x - 1) \geq 0$$

$$\iff \alpha \ln x - 1 \geq 0$$

$$\iff \ln x \geq \frac{1}{\alpha}$$

$$\iff x \geq e^{\frac{1}{\alpha}}$$

si $\delta \in]0;1]$

x	0		$e^{-\frac{1}{\delta}}$		$+\infty$
$f'_\delta(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_\delta(x)$	0	↘	min	↗	$+\infty$

$$f\left(e^{-\frac{1}{\delta}}\right) = e^{-1}\left(-\frac{1}{\delta}\right) = -\frac{1}{\delta e}$$

si $\delta \in]1;+\infty[$

x	0		$e^{-\frac{1}{\delta}}$		$+\infty$
$f'_\delta(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_\delta(x)$	0	↘	min	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^\delta \ln x = +\infty$ ($x^\delta \to +\infty$, $\ln x \to +\infty$)

3) Soit $\delta_2 > \delta_1 > 0$

alors pour $x \in]0;+\infty[$

$$x^{\delta_2} \ln x \geq x^{\delta_1} \ln x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^{\delta_2} - x^{\delta_1}) \ln x}_{\text{car}} \geq 0$$

	0		1		
$x^{\delta_2} - x^{\delta_1}$	0	$-$	0	$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
car	‖	$+$	0	$+$	

ainsi pour $\delta_2 > \delta_1$, on a

- $f_{\delta_2}(1) = f_{\delta_1}(1) = f_{\delta_2}(0) = f_{\delta_1}(0) = 0$
- $f_{\delta_2}(x) > f_{\delta_1}(x)$ pour $x \in]0;1[\cup]1;$

4) tangente en $(1;0)$ à $\mathcal{C}_\lambda$

$$T \equiv y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= 1^{\lambda-1}(\lambda \cdot \ln 1 + 1)(x-1) + 0$$
$$= 1 \cdot (0+1)(x-1)$$
$$= x-1$$

T est indép. de λ, donc $\mathcal{C}_\lambda$ admet la même tangente $\forall \lambda > 0$ en $x=1$.

5) a) On cherche $x \in]0;+\infty[$ tq $f'_\lambda(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^{\lambda-1}}_{\neq 0}(\lambda \ln x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$I_\lambda \left(e^{-\frac{1}{\lambda}} ; -\frac{1}{\lambda e} \right)$$

b) $\begin{cases} x = e^{-\frac{1}{\lambda}} > 0 \text{ et } < 1 \\ y = -\frac{1}{\lambda e} < 0 \end{cases}$ $\quad 0 < e^{-\frac{1}{\lambda}} < 1$
$\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} < 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} > 0$

(1) : $\ln x = -\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{\ln x}$

éq. cart. de l'ensemble des points de $\mathcal{C}_\lambda$ à tangente horizontale et d'abscisse strictement positive

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{-\frac{e}{\ln x}} = \frac{1}{e}\ln x \\ \text{avec } x \in]0;1[\end{cases}$$

Q3

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $\mathrm{dom} f = [0; +\infty[$ $\quad$ $\forall x \in \mathrm{dom} f$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

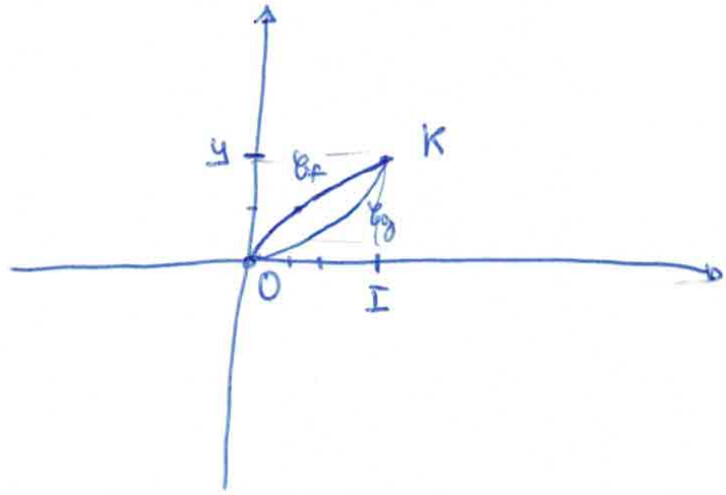
$g(x) = x^n$, $n \geq 1$ $\quad$ $\mathrm{dom} g = \mathbb{R}$

$I(1;0)$

$J(0;1)$

$K(1;1) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$

$O(0;0)$



Soit $x \in \mathrm{dom} f$

$g(x) \leq f(x)$

$\Leftrightarrow x^n \leq x^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ supposons $x \neq 0$, alors

$x^{n-\frac{1}{2}} \leq 1$ ↳ vrai pour $x \in [0;1]$ et $n \geq 1$

$$A_1 = \int_0^1 1 - \sqrt{x} \, dx$$

$$= \left[x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - 0 + 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow n = 2$$

Dans ce cas $A_2 = \underbrace{1}_{\text{aire du carré}} - (A_1 + A_3) = \frac{1}{3}$ □

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Mardi, le 11 novembre 2008

15h-18h

I. 1) Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \log_x(x+1) \ \ si \ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudiez f (domaine de définition, continuité, limites, asymptotes éventuelles, position de C_f par rapport à ses asymptotes éventuelles, dérivabilité à droite en 0, sens de variation, courbe représentative C_f dans un repère orthonormé).

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \log_{x+1}(x)$.

Etudiez g (domaine de définition, continuité, limites, asymptotes éventuelles, position de C_g par rapport à ses asymptotes éventuelles, sens de variation, courbe représentative C_g dans le même repère orthonormé).

3) Résolvez <u>algébriquement</u> dans IR l'inéquation,

$$\log_x(x+1) \geq \log_{x+1}(x).$$

<u>9 points</u>

II. Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = x^2 + 2m\ln(x) + m$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan d'unité 3 cm.

1) Déterminez suivant les valeurs du paramètre réel m, les extrema éventuels de f_m.

2) Déterminez l'ensemble des points communs à toutes les courbes C_m $(m \in \text{IR})$.

3) Soit C_1 la courbe représentative de f_1 dans un repère orthonormé d'unité 3 cm.

Calculez en cm^2, l'aire du domaine délimité par C_1, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \alpha$ $(0 < \alpha < e^{-1})$ et la droite d'équation $x = e^{-1}$.

4) Démontrez que f_1 définit une bijection de $]0;+\infty[$ sur un ensemble J à préciser.

Démontrez que l'application réciproque de f_1 est dérivable sur J.

Calculez $f_1(1)$ et $\left(f_1^{-1}\right)'(2)$.

5) Démontrez que pour tout réel $x \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right]$, $4 \le \dfrac{f_1(x)-f_1\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} \le 5$.

Déduisez-en un encadrement de $f_1(x)$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$ par deux fonctions affines.

Déduisez-en un encadrement à 0,01 près de l'unique racine de $f_1(x)$.

8 points

III. On considère $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t \, dt$ $(n \in \mathbb{N} - \{0\})$.

1) Calculez A_1 et A_2.

2) Trouvez une relation de récurrence entre A_n et A_{n-2} (pour $n \ge 2$).

Déduisez-en A_3 et A_6.

3 points

Q1

1) Posons $f(x) = \begin{cases} \log_x(x+1) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ C.E. $x+1>0$ et $x \neq 1$, $x>0$

dom $f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

continuité

f est continue sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

cont. en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log_x(x+1)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$$

$$= 0$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$,

donc il s'ensuit que f est continue en 0.

dom$_c$ $f = [0;1[\cup]1;+\infty[$

limites et asymptotes éventuelle

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} - 1$ A.H. d'éq $y=1$ (en $+\infty$, i.e. à droite)

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas, mais f admet une asymptote verticale d'éq. A.V. $x=1$

position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $y=1$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$; $\ln x \,(x+1) - 1$

$= \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\ln(x)} > 0$.

$x+1 = x$ ↯

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$	-1	$-$	‖	$+$	
pos. relative	~~A.H~~ $\mathcal{C}_f$			$\mathcal{C}_f$ / A.H.	

dérivabilité à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} \to 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x \ln(x)} \to 0^+$$

$$\overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\ln(x)+1}$$

$$= 0$$

⇒ dérivable à droite en 0

$\text{dom } f' = \text{dom } f$

$\forall x \in \text{dom } f'$, $f'(x) = \dfrac{\frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}}{\ln^2 x} = \underbrace{\dfrac{x \ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}}_{>0 \text{ sur dom } f'}$

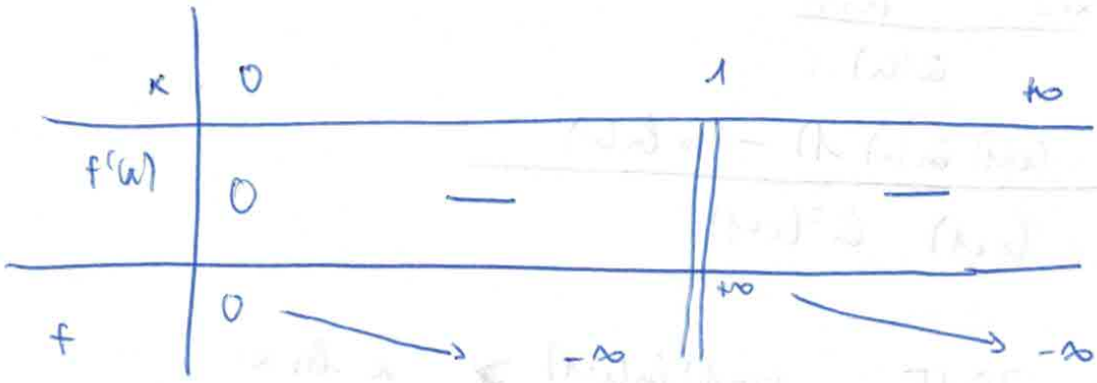
si $x \in]0;1[$ $\quad x \ln x < 0$

$(x+1)\ln(x+1) > 0$ ⇒ $f'(x) < 0$

si $x \in]1;+\infty[$ $\quad \underset{>0}{x} < \underset{>0}{(x+1)}$

$\underset{>0}{\ln x} < \underset{>0}{\ln(x+1)}$

$x \ln x < \ln(x+1)(x+1)$ $\quad f'(x) < 0$



2) $g(x) = \log_{x+1}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$

C.E. $x+1 > 0 \iff x > -1$

$x+1 \neq 1 \iff x \neq 0$

$x > 0$

$\text{dom } g =]0; +\infty[$

g est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

$\text{dom}_c\, g =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = -\infty$ A.V. d'éq $x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ A.H. $\mathcal{C}_g$ d'éq $y = 1$ (à droite)

position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à $h : y = 1$:

$\forall x \in \text{dom } g$,

$\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} - 1 = 0$

$\iff \dfrac{\ln(x) - \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = 0$ ↯

$x < x+1$

$\Rightarrow \ln(x) < \ln(x+1)$

Ainsi $\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)} < 1$ sur $]0;+\infty[$

h est au dessus de $\mathcal{C}_g$

$\forall x \in D_{g'}$

$$g'(x) = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x)}{(x+1)}}{\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

sur $]0;1]$: $(x+1)\ln(x+1) \geq x\ln x$ ($x>0$, $\ln x \leq 0$, $(x+1)\ln(x+1) > 0$)

sur $[1;+\infty[$: $(x+1) > x$ ($x+1>0$, $x>0$) $\searrow \ln \nearrow$

$\ln(x+1) > \ln x$ ($\ln(x+1)>0$, $\ln x > 0$)

$\Leftrightarrow (x+1)\ln(x+1) > x\ln(x)$

ainsi $g'(x) > 0$ sur $D_{g'} = D_g$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

$g(1) = 0$

3) $(I) \Leftrightarrow \log_x(x+1) \geq \log_{x+1}(x)$

domaine d'étude $E =]0;1[\cup]1;+\infty[$

$$(I) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \geq \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln^2(x+1) - \ln^2(x)}{\ln(x)\ln(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[\ln(x+1) - \ln(x)]\,[\ln(x+1) + \ln(x)]}{\ln(x)\ln(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x^2+x)}{\ln(x)\ln(x+1)} \geq 0$$

(*)

- $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \neq 0$
- $\ln(x^2+x) = 0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou ~~$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$~~ ∉ domaine

$\frac{x+1}{x} > 1$

$\Leftrightarrow x+1 > x$

$\Leftrightarrow 1 > 0$

	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$	‖	+		+		+	
$\ln(x^2+x)$	‖	−	0	+		+	
$\ln(x)\ln(x+1)$	‖	−		−	0	+	
(*)	‖	+	0	−	‖	+	

$$S =]0; \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}] \cup]1; +\infty[$$

Q2

Soit $m \in \mathbb{R}$

et considérons $f_m(x) = x^2 + 2m \ln(x) + m$

1) Si $m = 0$, $f_0(x) = x^2$ dom $f_0 = \mathbb{R}$

$(0;0)$ est un minimum de f_0

Si $m \neq 0$, dom $f_m =]0; +\infty[$

Supposons $m \neq 0$,

dom f'_m = dom f_m = $]0; +\infty[$

$\forall x \in$ dom f'_m, on a

$f'_m(x) = 2x + \frac{2m}{x} =$

$f'_m(x) = 0 \iff \frac{2(x^2+m)}{x} = 0$

si $m > 0$, $2(x^2+m) > 0$ → pas d'extrema

$f'_m(x) > 0$ sur dom f'_m

si $m < 0$ $x^2 + m = 0 \iff x = \sqrt{-m}$ ou $x = -\sqrt{-m}$ à rejeter

x	0		$\sqrt{-m}$	
$f'_m(x)$	‖	$-$	0	$+$
$f_m(x)$	‖ $+\infty$	↘	min	↗

si $m > 0$, $\lim_{x \to 0^+} f_m(x) = -\infty$

si $m < 0$, $\lim_{x \to 0^+} f_m(x) = +\infty$

$\forall m$ $\lim_{x \to +\infty} x^2 + 2m \ln(x) + m$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 + 2m \frac{\ln(x)}{x^2} + m\right)$ ($\frac{\ln(x)}{x^2} \to 1$)

$= +\infty$

$(\sqrt{-m}; -2m \ln(\sqrt{-m}))$

$(\sqrt{-m}; m \ln(-m))$

$\frac{df}{\partial m} = 0$ ou $f_m(x) = f_{m'}(x)$ $\forall x \in \text{dom } f_m \cap \text{dom } f_{m'}$

ou $M(x;y) \in \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{C}_{f_m}$

$\Leftrightarrow y = x^2 + 2m \ln(x) + m \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y - x^2 = 2m \ln(x) + m = m(2\ln(x) + 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 2\ln(x) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{e} \\ x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

Le point commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \frac{1}{e}\right)$

3) $f_1(x) = x^2 + 2\ln(x) + 1 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

x	0		$+\infty$
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

$f_1(e^{-1}) = e^{-2} - 1 < 0$

comme f_1 est strictement croissante

on a que $f_1 < 0$ sur $]0; e^{-1}[\subset]\alpha, e^{-1}[$

$A = -\int_{\alpha}^{e^{-1}} f_1(x) \qquad (1 \text{ u.a.} \hat{=} 3^2 \text{ cm}^2)$

$= -\int_{\alpha}^{e^{-1}} x^2 + 2\ln(x) + 1$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + 2x\ln x - 2x + x\right]_{\alpha}^{e^{-1}}$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + 2x\ln x - x\right]_{\alpha}^{e^{-1}}$

$= -\left(\frac{1}{3e^3} - \frac{2}{e} - \frac{1}{e} - \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha\ln\alpha + \alpha\right)$ u.a

$$= -\frac{1}{3e^3} + \frac{3}{e} + \frac{\alpha^3}{3} + 2\alpha\ln\alpha - \alpha \quad u.a$$

$$= -\frac{3}{e^3} + \frac{27}{e} + 3\alpha^3 + 18\alpha\ln\alpha - 9\alpha \quad cm^2$$

4) Comme $f_1' > 0$ et f_1 est continue sur $]0;+\infty[$

f_1' est injective sur $]0;+\infty[$.

$f_1(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Ainsi f_1 est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $Y = \mathbb{R}$

vu que $f_1' \neq 0$, et f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$,

on peut déduire que (f_1^{-1}) est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(1) = 1 + 2\cdot 0 + 1 = 2$$

Ainsi $(f_1^{-1})'(2) = \dfrac{1}{f_1'(1)} = \dfrac{1}{2\cdot 1 + \frac{2}{1}} = \dfrac{1}{4}$

5) f_1 est continue sur $]0;+\infty[\supset [\frac{1}{2};1]$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f_1'(x) = 2x + \dfrac{2}{x}$

$f_1'(\frac{1}{2}) = 1 + 4 = 5$

$f_1'(1) = 2 + 2 = 4$

ainsi $\forall x \in [\frac{1}{2};1]$

$f'(x)$ ↘

$\forall x \in]0;+\infty[$ $f_1''(x) = 2 - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^2-2}{x^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f_1''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
	‖	↘		↗	

Il s'ensuit que

$$4 \leq f_1'(x) \leq 5 \quad \text{sur } \left[\tfrac{1}{2}; 1\right]$$

ainsi par l'inégalité des accroissements finis

$$4 \leq \frac{f_1(x) - f_1\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \leq 5 \qquad \forall x \in \left]\tfrac{1}{2}; 1\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - 2 + f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq f_1(x) \leq 5x - \tfrac{5}{2} + f_1\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

avec $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} - 2\ln(2)$

encadrement de $f_1(x)$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\underbrace{4x - \tfrac{3}{4} - 2\ln(2)}_{g(x)} \leq f_1(x) \leq \underbrace{5x - \tfrac{5}{4} - 2\ln(2)}_{h(x)}$$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0{,}534$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0{,}596$

si $f_1(\alpha) = 0$, alors $0{,}534 \leq \alpha \leq 0{,}596$

Q3

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t \, dt$$

1) $$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt$$

t	$\cos t$
1	$\sin t$

$$= -[t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt$$

t^2	$\cos t$
$2t$	$\sin t$

$$= [t^2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int 2t \sin t \, dt$$

t	$\sin t$
1	$-\cos t$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 2\left([-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t \, dt$$

$$= [t^n \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \sin t \, dt$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left([-t^{n-1}\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-2} \cos t \, dt\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\left(0 + (n-1)A_{n-2}\right)$$

ainsi $A_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2\, A_1$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

$= \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6$

$A_6 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 - 6 \cdot 5\, A_4$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^6 - 6 \cdot 5 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 4 \cdot 3 \cdot A_2 \right)$

$= \frac{\pi^6}{64} - 30\,\frac{\pi^4}{16} + 30 \cdot 12 \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$

$= \frac{\pi^6}{64} - \frac{15}{8}\pi^4 + 90\pi^2 - 720$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

lundi, le 21 avril 2008

15H00 – 18H00

I. Soit ABC un triangle du plan.

Soit G le barycentre de $\{(A,3);(B,1);(C,1)\}$, P le barycentre de $\{(A,3);(C,1)\}$ et S le barycentre de $\{(A,3);(B,1)\}$

1) Montrer que les droites BP et CS sont sécantes.
2) Soit I le milieu de [BC]. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
3) On suppose que B et C sont fixes et que le point A décrit le cercle de diamètre [BC]. Chercher alors le lieu décrit par le point G.

(4 points)

II. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace on considère la famille de plans d'équations

$\pi_r \equiv r^2x+(-r^2+2r+1)y-(2r+1)z-1=0$, où r est un paramètre réel.

1) Démontrer que ces plans sont tous parallèles à une même droite d contenant l'origine et donner un système d'équations cartésiennes de d.
2) Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de l'origine sur les plans π_r.

(6 points)

III. Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD. Soit r la rotation de centre D et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Le point M est l'image du point B par la rotation r.

ADE et CDF sont des triangles équilatéraux directs.

Démontrer que

1) Les points A, C et M sont alignés.
2) Les points E, F et B sont alignés.

(4 points)

IV. Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC. Soient I le milieu de [AB] et J le milieu de [OI].

Les droites OA et OC recoupent $\mathcal{C}$ respectivement en D et en E.

1) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E.
   a) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$.
   c) En déduire que les droites OB et DJ se coupent en G.
2) À tout point M on fait correspondre le point M' = f(M) défini par $4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}$.
   a) Montrer que f est une homothétie. Préciser son centre et son rapport.
   b) Quelles sont les images par f des points B et D ?

(6 points)

Ex 1

ABC un triangle

1) G est le barycentre de $\{(S,4);(C,1)\}$, donc $G \in (SC)$

G est le barycentre de $\{(B,1);(P,4)\}$, donc $G \in (BP)$

Ainsi (BP) et (CS) sont sécantes en G.

2) I l'isobarycentre de $\{(B,1);(C,1)\}$

Ainsi G est le barycentre de $\{(A,3);(I,2)\}$

Il s'ensuit que A, G et I sont alignés

3) $3\vec{GA} + 2\vec{GI} = 0$ par 2)

$\Leftrightarrow 3\vec{GI} + 3\vec{IA} + 2\vec{GI} = 0$

$\Leftrightarrow 5\vec{GI} = 3\vec{AI}$

$\Leftrightarrow \vec{GI} = \frac{3}{5}\vec{AI}$

A décrit le cercle de centre I et de diamètre BC

donc G décrit le cercle de centre I et de diamètre $\frac{3}{5}$ BC.

Q2

R.O.N. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\pi_r \equiv r^2 x + (-r^2+2r+1)y - (2r+1)z - 1 = 0 \qquad r \in \mathbb{R}$$

1) $\vec{n}_{\pi_r} \left(r^2 , -r^2+2r+1 , -(2r+1) \right)$

$\vec{d}\ (1;1;1)$ convient car dans ce cas $\vec{n}_{\pi_r} \cdot \vec{d} = 0$

comme vect. directeur de d

En effet

$\vec{n}_{\pi_r} \cdot \vec{d} = 0 \iff r^2 x + (-r^2+2r+1) y - (2r+1) z = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

$\iff r^2 (x-y) + 2r(y-z) + (y-z) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

$\iff x_a = y_a$ et $y_a = z_a$

d passe par l'origine

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

éq. cart $\begin{cases} \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} \\ \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$

2) M projeté orthogonale de l'origine sur les plans π_r.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OM} \perp \vec{d}) & \overrightarrow{OM} = k\,\vec{n_r} \quad \text{pour } k \in \mathbb{R} \quad (\text{à déterminer}) \\ M \in \pi_r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k r^2 \\ y = k(-r^2+2r+1) \\ z = -k(2r+1) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow k\left(r^2 r^2 + (-r^2+2r+1)^2 + (2r+1)^2\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left(r^4 + r^4 - 2r^2(2r+1) + (2r+1)^2 + 4r^2 + 4r + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left(2r^4 - 4r^3 - 2r^2 + 8r^2 + 8r + 2\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k\left(r^4 - 2r^3 + 3r^2 + 4r + 1\right) = 1$$

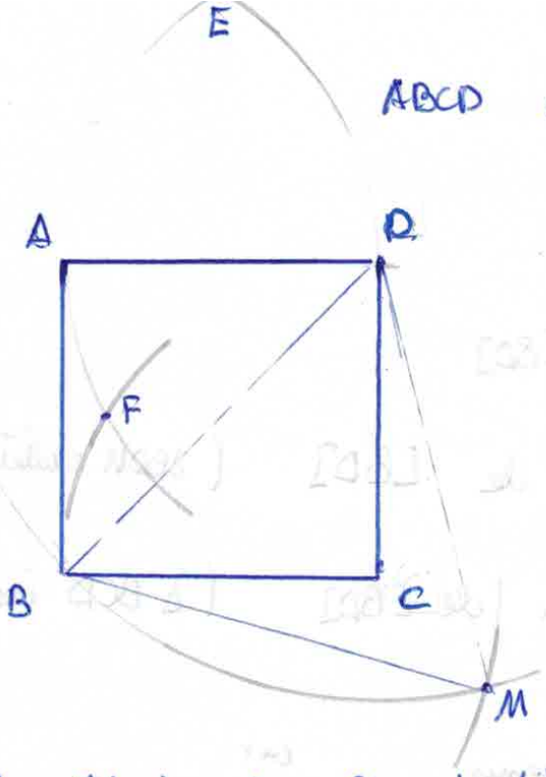
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2\underbrace{(r^4 - 2r^3 + 3r^2 + 4r + 1)}_{\neq 0}}$$

$\equiv$ somme de carrés non tous nuls !

$$M\left(\frac{r^2}{2(r^4-2r^3+3r^2+4r+1)} ; \frac{-r^2+2r+1}{2(r^4-2r^3+3r^2+4r+1)} ; -\frac{2r+1}{2(r^4-2r^3+3r^2+4r+1)}\right)$$

QB

ABCD carré direct : $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$



r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$r(B) = M$

$(\vec{AD}, \vec{AE}) = \frac{\pi}{3}$ E l'image de A par la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$r^{-1}(A) = E \Leftrightarrow r(E) = A$

$(\vec{CD}, \vec{CF}) = \frac{\pi}{3}$ $r(F) = C$

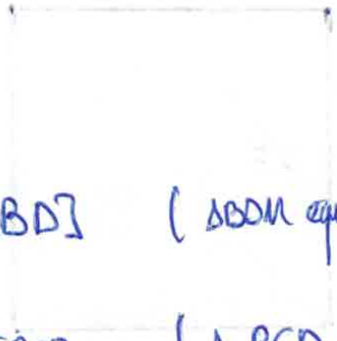
2) Une rotation conserve l'alignement

M : A, C et M sont alignés $\Leftrightarrow$ E, F, B le sont

$r(E)$ $r(F)$ $r(B)$

1) $AC = BD$

$BD = DM = BM$



Soit I le milieu de [BD]

$\begin{cases} (MI) \text{ est la médiatrice de } [BD] & (\Delta BDM \text{ équilatéral en } M) \\ \text{Or } (CI) \text{ est la médiatrice de } [BD] & (\Delta BCD \text{ isocèle en } C) \end{cases}$

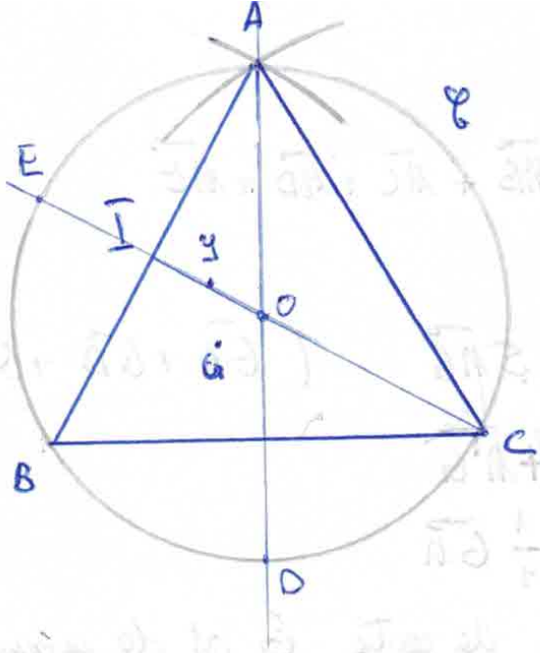
↪ C, I et M sont alignés

ABCD est un carré,

d'où I = mil [AC] ; A, C et I sont alignés

or et donc A, C et M sont alignés.

Q4



ABC direct

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$

1) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} + \vec{GE} = 0$

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$

a) Relation de Chasles (avec O) et alors $\vec{OE} + \vec{OC} = 0$ $\vec{OA} + \vec{OD} = 0$

$5\vec{GO} + \vec{OB} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{OG} = \frac{1}{5}\vec{OB}$

b) Relation de Chasles (avec O) et $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$

$5\vec{GO} + \vec{OD} + \underbrace{\vec{OE}}_{4\vec{OJ}} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \vec{OG} = \frac{1}{5}\vec{OD} + \frac{4}{5}\vec{OJ}$

c) $\vec{OG} = \frac{1}{5}\vec{OB} \Rightarrow G \in (OB)$

$\vec{OG} = \frac{1}{5}\vec{OD} + \frac{4}{5}\vec{OJ} \Rightarrow G \in (DJ)$ $\Big\}$ $(OB) \cap (DJ) = G$

ou

$5\vec{OG} = \vec{OD} + 4\vec{OJ} = \vec{OG} + \vec{GD} + 4\vec{OG} + 4\vec{GJ}$

$\Leftrightarrow \vec{DG} = 4\vec{GJ}$

2) $M' = f(M)$

$$4\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME}$$

a) $4\vec{MG} + 4\vec{GM'} = 5\vec{MG}$ $\quad (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} + \vec{GE} = \vec{0})$

$\Leftrightarrow \quad \vec{MG} = -4\vec{M'G}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{GM'} = -\frac{1}{4}\vec{GM}$

Homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{4}$

b) • $\vec{Gf(B)} = -\frac{1}{4}\vec{GB}$

$= -\vec{OG}$

$= \vec{GO}$

le dernier sommet O

$f(B) = O$

I : $5\vec{OG} = \vec{OB}$

$\Leftrightarrow 4\vec{OG} = \vec{OB} + \vec{GO}$

$= \vec{GB}$

• $\vec{Gf(D)} = -\frac{1}{4}\vec{GD}$

$= \vec{GJ}$

le dernier sommet J

$f(D) = J$

I : $4\vec{JG} = \vec{GD}$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 18 novembre 2008

15H00 – 18H00

I. Soient A, B, C et D 4 points de l'espace non coplanaires. Soit G le barycentre de (A,1), (B,2) et (C,3).

1) Sur une figure, représenter A, B et C ainsi que la position de G.
2) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que
$$\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$$
3) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que
$$\overline{MA}^2+2\overline{MB}^2-3\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+2\overline{GB}^2-3\overline{GC}^2$$
4) Déterminer l'ensemble (E_3) des points M tels que
$$\overline{MA}^2+2\overline{MB}^2-3\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+2\overline{GB}^2-3\overline{GC}^2-6$$

(5 points)

II. On considère dans le plan un triangle AFB rectangle en A et on note θ la mesure en radians de l'angle en B avec $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Soit M un point quelconque de plan. On trace par M les parallèles aux droites AF et BF qui rencontrent la droite AB respectivement en H et en M'. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\overline{MM'}=\overline{MF}$.

1) Montrer que M appartient à Γ ssi $\dfrac{\overline{MF}}{\overline{MH}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$.
En déduire que (Γ) est une conique dont on déterminera la nature.
2) Dans cette question on prend $\overline{AF}=6$ et $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. Construire le triangle ABF, puis les sommets, les foyers et le centre de la conique (Γ). Construire ensuite (Γ).

(6 points)

III. Soit ABC un triangle non aplati dans le plan. Soient x, y et z 3 réels et soient M, P et S les points définis par : $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BS}=z\overrightarrow{BC}$.

1) Exprimer z en fonction de x et de y si les points M, P et S sont alignés.
2) Exprimer x et y en fonction de z pour que le point S soit le milieu du segment [MP].

(4 points)

IV. Dans le plan soient 2 points distincts A et B et soit une droite d distincte de la droite (AB).

On note s_A la symétrie centrale de centre A,
s_B la symétrie centrale de centre B,
s la symétrie orthogonale par rapport à la droite d.

Démontrer : $s_A \circ s = s \circ s_B$ <=> d est la médiatrice du segment [AB]

(5 points)

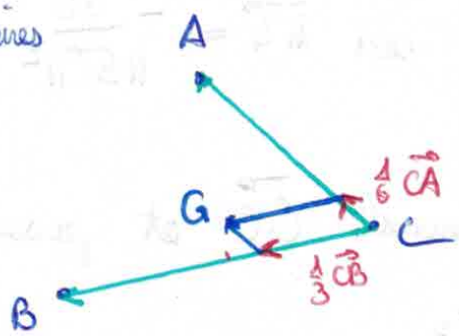
Q1

G barycentre de $\{(A;1), (B;2), (C;3)\}$

$$1\vec{GA} + 2\vec{GB} + 3\vec{GC} = 0$$

1)

3 points sont toujours coplanaires



ou encore

$$1\vec{CA} + 2\vec{CB} = 6\vec{CG}$$

$$\Leftrightarrow \vec{CG} = \frac{1}{6}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB}$$

2) $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = 6\vec{MG}$ $\forall M$

$(E_1) \Leftrightarrow 6\vec{MG}\cdot\vec{MD} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MG}\cdot\vec{MD} = 0$

$\Leftrightarrow$ M à la sphère de diamètre [GD]

3) $\vec{MA}\cdot\vec{MA} + 2\vec{MB}\cdot\vec{MB} - 3\vec{MC}\cdot\vec{MC} = \vec{GA}\cdot\vec{GA} + 2\vec{GB}\cdot\vec{GB} - 3\vec{GC}\cdot\vec{GC}$

$\Leftrightarrow \cancel{MG^2} + 2\vec{MG}\cdot\vec{GA} + \cancel{GA^2} + 2(\cancel{MG^2} + 2\vec{MG}\cdot\vec{GB} + \cancel{GB^2}) - 3\cancel{MG^2} + 2\vec{MG}\cdot\vec{GC} + G$

$= \cancel{GA^2} + 2\cancel{GB^2} - 3GC^2$

$\Leftrightarrow 2\vec{MG}\cdot(\underbrace{\vec{GA} + 2\vec{GB}}_{-3\vec{GC}} - 3\vec{GC}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{MG}\cdot\vec{GC} = 0$

$\Leftrightarrow$ M appartient au plan de vecteur normal $\vec{GC}$ passant par le point G

4) $(E_2) \overset{3)}{\Leftrightarrow} 2\vec{MG}\cdot(-3\vec{GC}) = -6$

$\Leftrightarrow \vec{MG}\cdot\vec{GC} = 1$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| \cdot \|\overrightarrow{GC}\| \cdot \cos \widehat{MGC} = 1$

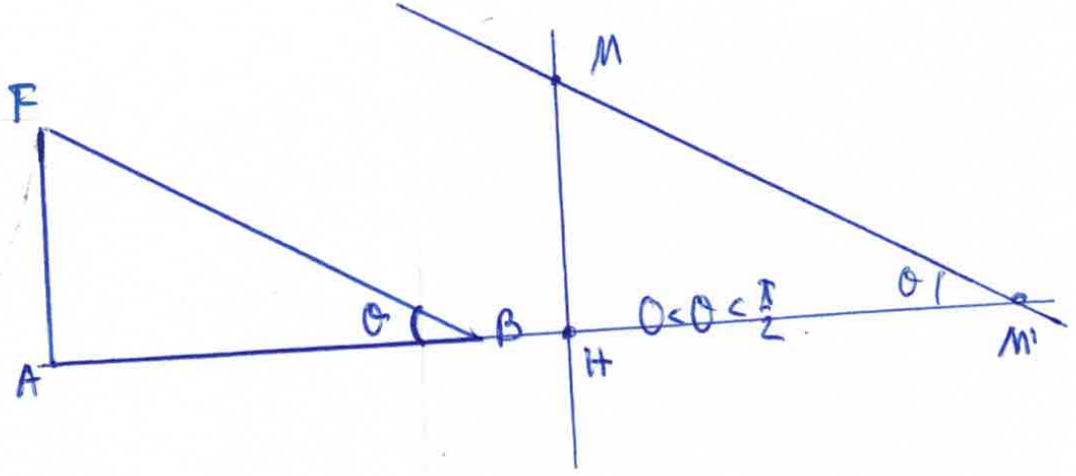
Soit M' le projeté orthogonal de M sur (GC)

$(E_3) \Leftrightarrow \overrightarrow{M'G} \cdot \overrightarrow{GC} = 1$ avec $\|\overrightarrow{M'G}\| = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{GC}\|}$

car $\overrightarrow{M'G} = -\dfrac{\overrightarrow{GC}}{\|\overrightarrow{GC}\|^2}$

$(E_3) \Leftrightarrow$ M appartient au plan de vecteur normal $\overrightarrow{GC}$ et passant par P tq $\overrightarrow{PG} = -\dfrac{\overrightarrow{GC}}{\|\overrightarrow{GC}\|^2}$

Q2



1)

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overline{MM'} = \overline{MF}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{MF}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{MH}}$ ou $\frac{\overline{MH}}{\overline{MM'}} = \sin\theta$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{MF}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{MM'}\sin\theta}$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{MF}}{\overline{MH}} = \frac{\Delta}{\sin\theta}$

ainsi $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overline{MF} = \underbrace{\frac{\Delta}{\sin\theta}}_{>1} \cdot \overline{MH}$ dist$(M,(AB))$

$\Leftrightarrow$ M à l'hyperbole d'excentricité $\frac{\Delta}{\sin\theta} > 1$ de foyer F et de directrice (AB).

2) $\frac{\Delta}{\sin\theta} = (\sin\frac{\pi}{6})^{-1} = 2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = 2a$

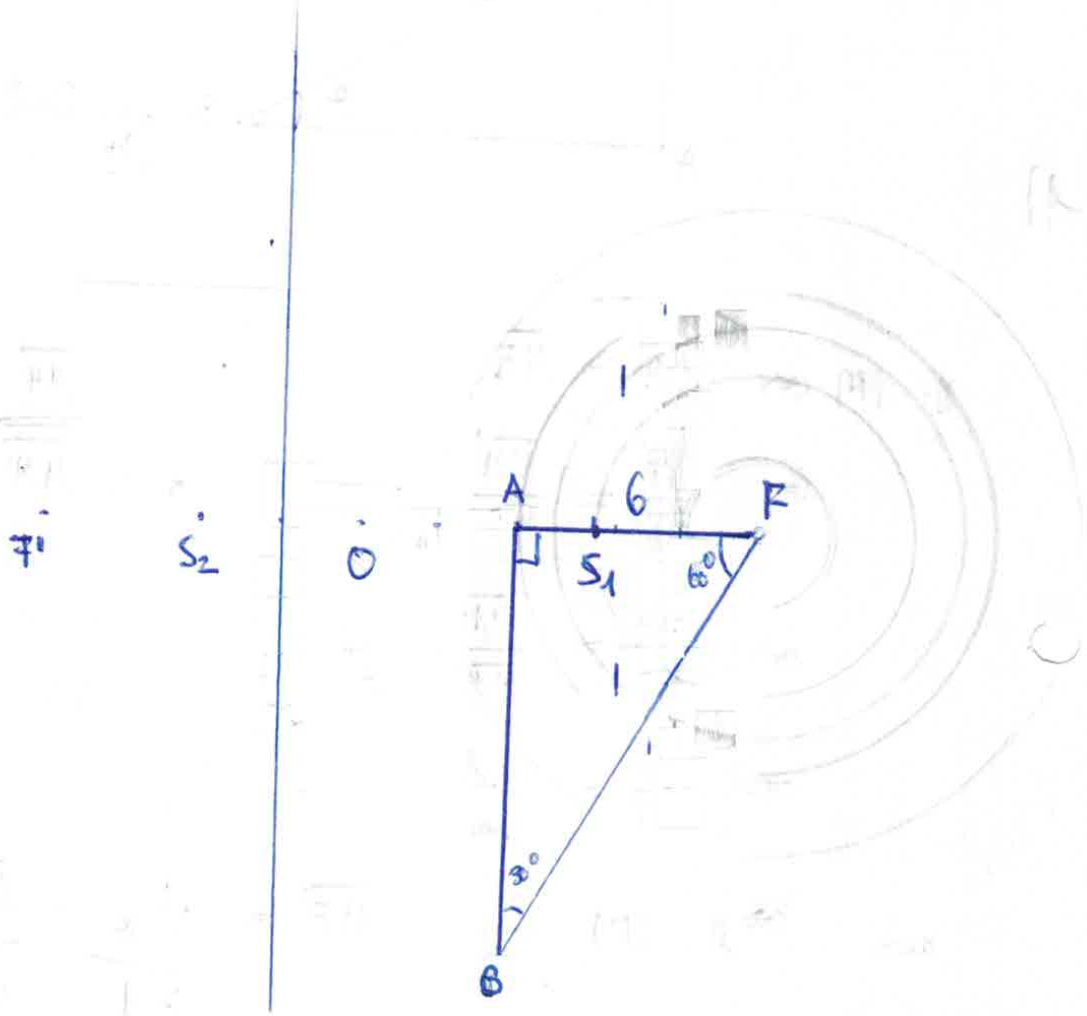
$S_1 \in [AF]$, car (AB) est une directrice et F un foyer

Si $M = S_1$, $H = A$, ainsi $\overline{S_1F} = 2\overline{S_1A}$

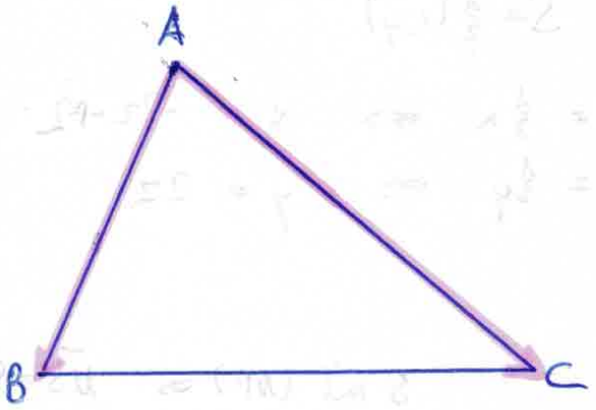
$6 = \overline{AF} = \overline{AS_1} + \overline{S_1F} \Leftrightarrow 3\overline{AS_1} = 6 \Leftrightarrow \overline{AS_1}$

$\overline{S_2F} = 2\overline{S_2A}$

$\overline{S_2S_1} = 2a$ $\quad \overline{F'F} = 2c = 4a$ $\quad \overline{F'F} - \overline{S_2S_1} = 2\overline{S_1F} = 2\cdot 4 = 8$ (6-2)


F1
S2
O
A
6
F
S1
60°
1
1
30°
B

Q3



$\vec{AM} = x\,\vec{AB}$

$\vec{AP} = y\,\vec{AC}$ $\quad x,y,z \in \mathbb{R}$

$\vec{BS} = z\,\vec{BC}$

M, P, S sont alignés ssi $\vec{MP} = k\vec{MS}$

Choisissons le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

$\vec{AM} = x\,\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M(x;0)$

$\vec{AP} = y\,\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P(0;y)$

$\vec{BS} = z\,\vec{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_S - 1 \\ y_S \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S\begin{pmatrix} -z+1 \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{MP} = k\vec{MS} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -z+1-x \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = \frac{x}{x+z-1}$

$-x = -kz + k - kx$

$kz = y$

Si $x+z=1$? $\Leftrightarrow x=0$ et $z=1$, y qcq

et si $x=y$?

↳ $(PM) \parallel (BC)$

donc $xz = y(x+z-1)$

$\Leftrightarrow 2(x-y) = xy - y$

$\Leftrightarrow z = \frac{xy-y}{x-y}$.

2) $S = \text{mil}[MP] \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}(x;y)$

$-2+1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = -2z+2$

$z = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow y = 2z$

$S = \text{mil}[MP] \Leftrightarrow \vec{MS} = \vec{SP} = \vec{SM} + \vec{MP}$

$\Leftrightarrow 2\vec{MS} = \vec{MP}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2-1} = 2$ et $y = 2z$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x - 2x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = 2 - 2z \end{cases}$

M, P, S alignés

$\Leftrightarrow \vec{MP} = k\vec{MS}$

$\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AP} = -x\vec{AB} + y\vec{AC}$

$\vec{MS} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BS}$

$= -x\vec{AB} + \vec{AB} + 2\vec{BC}$

$= (1-x)\vec{AB} + 2\cdot(\vec{BA} + \vec{AC})$

$= (1-x-2)\vec{AB} + 2\vec{AC}$

$\vec{MP} = k\vec{MS} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = k(1-x-2) \\ y = kz \end{cases}$

$x+2-1 \neq 0$

si $x+2-1 = 0$ alors $-x = 0$

$\vec{MS} = z\vec{AC}$ et $\vec{MP} = y\vec{AC}$

car $(MS) \parallel (AC) \parallel (MP)$

$z = 1$

$M = A$

$S = C$

2) $x = y$ $\vec{MP} = -x\vec{AB} + x\vec{AC} \Rightarrow x\vec{BC} = \vec{MP}$

$\Rightarrow (MP) \parallel (BC)$ ou $(MP) \parallel (MS)$

Q4

Soit xOy un Repère orthonormé de l'espace et $d = Oy$

$$S_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (-(x-x_A)+x_A ; -(y-y_A)+y_A)$$
$$= (2x_A - x ; 2y_A - y)$$

$$S_B : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (2x_B - x ; 2y_B - y)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (-x, y)$$

Ainsi $\forall M(x,y) \in xOy$

$$S_A \circ S(x,y) = S \circ S_B (x,y)$$
$$\Leftrightarrow S_A(-x,y) = S(2x_B - x, 2y_B - y)$$
$$\Leftrightarrow (2x_A + x ; 2y_A - y) = (x - 2x_B ; 2y_B - y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_A + x = x - 2x_B \\ 2y_A - y = 2y_B - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $d = (Oy)$ est la médiatrice de $[A,B]$

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'algèbre et de probabilité

Mardi, le 6 mai 2008
15h-18h

I. Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) comprend cinq questions supposées indépendantes. Chacune des questions est associée à quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.
Un candidat doit répondre à chaque question en indiquant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon elle est incorrecte. Le candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

1. Calcule la probabilité des événements suivants :

   a) A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions. »
   b) B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq. »

2. On attribue la note 4 à chaque réponse correcte et la note -1 à toute réponse incorrecte.

   Calculer la probabilité de l'événement C :

   « Le candidat a obtenu une note au moins égale à 10 pour l'ensemble de cinq questions. »

(3 points)

II. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1. On pose : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ $n \succ 0$.

   a) Montrer que la suite v_n converge.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif, on a : $v_n \succ \frac{1}{2}$

   c) Déterminer le plus petit entier naturel N tel que, $n \geq N$ alors $v_n \prec \frac{3}{4}$

   d) En déduire que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} \prec \frac{3}{4} u_n$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 5$, on pose : $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n$.

   a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \cdot u_5$

   b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, un majorant de S_n est $M = 4 \cdot u_5$.

3. Etudier le sens de variation de la suite $((S_n)_{n\geq 5}$ et la convergence de cette suite.

(5 points)

III. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit la transformation du plan complexe (P) qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'=f(z) tel que :

$$f(z) = i\cdot\frac{z-3i}{z+1}.$$

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1$, $z_B = 3i$, $z_C = 2-i$. Montrer qu'il existe un unique point D tel que f(D)=C.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Etablir que pour tout point M distinct de A et de B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \text{ et } \left(\vec{u}, \vec{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\vec{MA}, \vec{MB}\right) \pmod{2\pi}$$

4. Déterminer les ensembles de points suivants :

a) L'ensemble E des points M tels que l'image M' est située sur le cercle de centre O et de rayon 1.
b) L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' est réelle.

(4 points)

IV.

1. Soit ABC un triangle. On note a=BC, b=AC et c=AB.

a) Démontrer que : $a = b\cdot\cos\hat{C} + c\cdot\cos\hat{B}$
(Indication : Introduire H, le pied de la hauteur issue de A et discuter selon la position de H par rapport à B et C.
b) Etablir que :

$$a+b+c=(b+c)\cdot\cos\hat{A} + (c+a)\cdot\cos\hat{B} + (a+b)\cdot\cos\hat{C}$$

2. Soit ABCD un quadrilatère convexe inscriptible (*inscriptible* signifie que les quatre sommets sont situés sur un même cercle). Les angles opposés sont alors supplémentaires.

On note: a=AB, b=BC, c=CD, d=DA, u=DB et v=AC.

a) Calculer u^2 en fonction de a, d et $\cos\hat{A}$, puis de b, c et $\cos\hat{C}$ et enfin de b, c et $\cos\hat{A}$.
b) En déduire une expression de $\cos\hat{A}$ en fonction de a, b, c et d.
c) Donner une expression de u^2 , puis de v^2 en fonction de a, b, c et d.
d) Etablir que : $\frac{u}{v} = \frac{ab+cd}{ad+bc}$ et $u\cdot v = ac+bd$

(2+3 = 5 points)

V.

1. Etablir les valeurs remarquables de : $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. Résoudre l'équation $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$

(3 points)

Q1

cinq questions indép.

↳ 4 réponses proposées dont une seule est correcte

Les 4 affirmations sont équiprobables : $p = \mathbb{P}(\text{succès}) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(\text{échec}) = \frac{3}{4}$

1. a) $\mathbb{P}(A) = p = \frac{1}{4}$

b) Soit X la var. aléatoire représentant le nombre de réponses correctes lors des 5 questions ; X suit une loi Binomiale à 5 épreuves avec une proba. de succès $p = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(X \geq 2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=0) \\
&= 1 - C_5^1 \left(\tfrac{1}{4}\right)^1 \left(\tfrac{3}{4}\right)^4 - C_5^0 \left(\tfrac{1}{4}\right)^0 \left(\tfrac{3}{4}\right)^5 \\
&= \frac{47}{128}
\end{aligned}$$

2. On doit trouver x, le nombre de questions correctes pour que la note soit supérieure ou égale à 10.

$$x \cdot 4 + (5-x) \cdot (-1) \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x \geq 15$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x \geq 3}$$

Au moins 3 réponses correctes

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(X \geq 3) \\
&= \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5) \\
&= C_5^3 \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 \left(\tfrac{3}{4}\right)^1 + C_5^5 \left(\tfrac{1}{4}\right)^5 \left(\tfrac{3}{4}\right)^0
\end{aligned}$$

$= \frac{53}{512}$

Q2

$u_n = \frac{n^2}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. a) $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad \forall n > 0$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$, donc la suite converge

b) Soit $n > 0$, alors

$v_n = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{>1} > \frac{1}{2}$

c) Soit $n > 0$, $v_n < \frac{3}{4} \iff (n+1)^2 < \frac{3}{2} n^2$

$\iff n^2 + 2n + 1 < \frac{3}{2} n^2$

$\iff \frac{1}{2} n^2 - 2n - 1 > 0$

$\Delta = 4 + 2 = 6 \qquad n_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{1} = 2+\sqrt{6}$

$n_2 = 2 - \sqrt{6} < 0$

$\iff n > 2 + \sqrt{6} \simeq 4{,}5$

Ainsi pour $N = 5$, on a que $\forall n \geq N$, $v_n < \frac{3}{4}$.

d) Soit $n \geq N$, alors $u_{n+1} = v_n u_n < \frac{3}{4} u_n$

2. $S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$

a) $u_n < \frac{3}{4} u_{n-1}$ pour $n \geq 5$

$< \frac{3}{4}\frac{3}{4} u_{n-2}$

$\vdots$

$< \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$

Si $n = 5$ $\quad u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5$

Ainsi au total

$u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ (on aurait pu le prouver par récurrence)

b) $S_n = \sum_{i=5}^{n} u_i \leq \sum_{i=5}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-5} \left(\frac{3}{4}\right)^{i}} u_5$

$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-4}}{1-\frac{3}{4}} u_5$

$\leq \frac{1}{1-\frac{3}{4}} u_5$

$= \underline{4 u_5}$

3. Soit $n \geq 5$

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} > 0$

$(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et vu 2. b) aussi majorée.

Donc $(S_n)_{n \geq 5}$ converge.

Ex3

$f: z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\} \longmapsto f(z) = i\dfrac{z-3i}{z+1}$

1. $z_A = -1$, $z_B = 3i$, $z_C = 2-i$

On cherche $M(z) \neq A(-1)$, tel que

$$f(z) = z_C = 2-i$$

$$\Leftrightarrow i\frac{z-3i}{z+1} = 2-i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+1} = -2i-1$$

$$\Leftrightarrow z-3i = -(2i+1)(z+1)$$

$$\Leftrightarrow z + (1+2i)z = 3i - 2i - 1$$

$$\Leftrightarrow z(2+2i) = i-1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i}$$

$$= \frac{-2+2i+2i+2}{8}$$

$$= \frac{4}{8}i$$

Donc l'antécédent est l'affixe de $D\left(\frac{1}{2}i\right)$.

2. $|z_A - z_B| = |-1-3i| = \sqrt{10}$ $\quad |z_B - z_C| = |4i-2| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|z_A - z_C| = |-2+i| = \sqrt{10}$

or $20 = 10 + 10$

ainsi ABC est un triangle rectangle (par la réciproque du Th de Thales) en A

3. $|f(z)| = \underbrace{|i|}_{=1} \dfrac{|z-3i|}{|z+1|} \iff OM' = \dfrac{BM}{AM}$

$\arg \dfrac{z'}{1} = \arg z' = \arg(f(z)) = \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z-3i}{z+1}\right) \quad [2\pi]$

$\arg \dfrac{z'}{1}$ = $(\vec{u}, \vec{OM'})$

$= \dfrac{\pi}{2} + (\vec{MA}, \vec{MB}) \quad [2\pi]$

4. a) $|f(z)| = 1 \iff |z-3i| = |z+1|$

$\iff \sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\iff x^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + y^2$

$\iff \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6y + 9 = \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2}$

$\iff y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3} \neq A$

droite

$OM' = 1 \iff BM = AM$

$\iff M$ est milieu $[AB]$

E

b) $\arg z' = 0 \ [\pi] \iff (\vec{MA}, \vec{MB}) = -\dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$

avec $M' \neq O$

$\iff M \neq B$ si

$\iff (\vec{MA}, \vec{MB}) = \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$

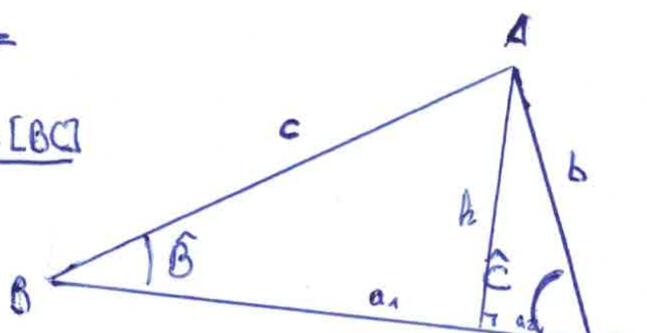
$\iff M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

si $M' = O$, alors $\arg z' = 0$ et $M = B$

F = cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

Q4

$H \in [BC]$

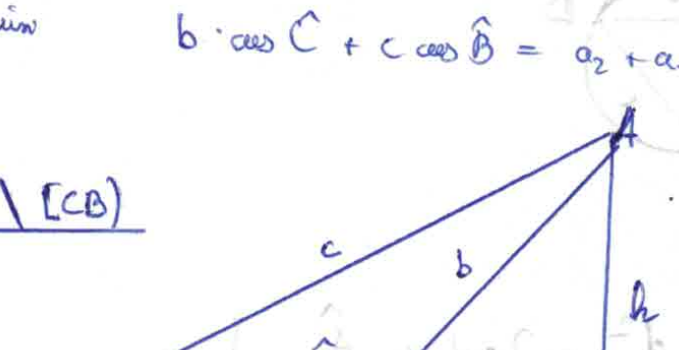


$$b \cdot \cos \hat{C} = a_2$$

$$c \cdot \cos \hat{B} = a_1$$

ainsi $\quad b \cdot \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = a_2 + a_1 = a$

$H \in (BC) \setminus [CB)$

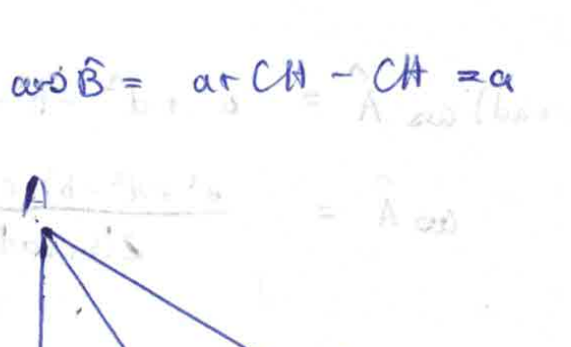


$$c \cos \hat{B} = a + CH$$

$$b \cos \hat{C} = -b \cos(\pi - \hat{C}) = -CH$$

$$b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B} = a + CH - CH = a$$

$H \in (BC) \setminus [BC]$



$$c \cos \hat{B} = -c \cos(\pi - \hat{B}) = -BH$$

$$b \cos \hat{C} = a + BH$$

$b \cos \hat{C} + b \cos \hat{C} = a + BH - BH$

$= a$

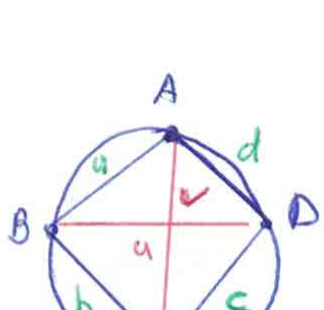
b) de même on peut prouver que

$$b = c \cdot \cos\hat{A} + a \cdot \cos\hat{C}$$

et $c = a \cdot \cos\hat{B} + b \cos\hat{A}$

d'où $a+b+c = (b+c)\cos\hat{A} + (a+c)\cos\hat{B} + (b+a)\cos\hat{C}$

2.



a) $u^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\hat{A}$
$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{C}$ | Al Kashi

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \hat{A})$

$= b^2 + c^2 + 2bc\cos\hat{A}$

b) $2(bc+ad)\cos\hat{A} = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$

$\Leftrightarrow \cos\hat{A} = \dfrac{a^2+d^2-b^2+c^2}{2(bc+ad)}$

c) $u^2 = a^2 + d^2 - 2ad \dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}$

$= \dfrac{a^2(bc+ad) + d^2(bc+ad) - a^3d - ad^3 + adb^2 + adc^2}{bc+ad}$

$= \dfrac{a^2bc + a^3d + d^2bc + ad^3 - a^3d - ad^3 + adb^2 + adc^2}{bc+ad}$

$$= \frac{a^2bc + d^2bc + adb^2 + adc^2}{bc+ad}$$

$$= \frac{ab(ac+bd) + dc(db+ac)}{bc+ad}$$

$$= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}$$

De même $v^2 = \frac{(da+bc)(db+ac)}{ab+dc}$

d'où $\frac{u^2}{v^2} = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ab+dc)}{(da+bc)(db+ac)(bc+ad)}$

$$= \frac{(ab+cd)^2}{(ad+bc)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{v} = \frac{(ab+cd)}{(ad+bc)}$$

$$u^2 - v^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)(ac+bd)}{(ad+bc)(ab+dc)}$$

$$= (ac+bd)^2$$

$$\Leftrightarrow u - v = ac+bd$$

Ex 5

1. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. $\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$

Concours de recrutement

20 novembre 2008
15h00 à 18h00

EPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS

Partie 1 : Dénombrement et probabilités (4 points)

1) *Famille nombreuse*
Une famille a 8 enfants. On suppose que la distribution des sexes est équiprobable. Calculer le nombre moyen de garçons de cette famille. Quelle est la probabilité pour que cette famille ait un nombre de garçons égal à ce nombre moyen ?

2) *La fête*
   a) A la fin d'un dîner, chaque convive serre la main de chacun des autres convives. Au total, 28 poignées de main sont ainsi échangées. Combien de convives ont participé au dîner ?
   b) Lors d'une seconde fête, on ne compte que des couples mariés. Bien entendu, les conjoints ne se serrent pas la main. On compte ce soir au total 40 poignées. Calculer le nombre de couples.

3) *Les pièces de monnaie*
Une boîte contient 3 pièces de monnaie : une des pièces est bien équilibrée, une autre est marquée avec 2 faces (pas de pile), et la troisième est truquée pour que la probabilité de donner face soit égale à $\frac{1}{3}$. On choisit une des pièces au hasard et on la lance.
   a) Calculer la probabilité pour que l'on obtienne face.
   b) On a trouvé pile. Quelle est la probabilité pour que la pièce choisie soit la pièce truquée ?

Partie 2 : Nombres complexes (6 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 + 5iz^3 - z^2 - 5i = 0$. Donner la forme algébrique des solutions.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \left[2 + i\left(m - \sqrt{3}\right)\right]z + 1 + m\sqrt{3} + i\left(m - \sqrt{3}\right) = 0$, m étant un paramètre réel.

   a) Résoudre cette équation.
   b) On désigne dans le plan de Gauss par M' et M'' les points dont les affixes z' et z'' sont les solutions de l'équation ci-dessus. Déterminer m pour que le triangle M'OM'' soit un triangle rectangle.

3) Dans le champ des nombres complexes, on considère la fonction f définie par $f(z) = \frac{iz - 1}{z + 3i}$.
Déterminer et représenter dans un même plan de Gauss les ensembles

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \quad f(z) \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } F = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \arg f(z) = \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Partie 3 : Suites (6 points)

1) On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ si } n>1 \end{cases}$

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite (donner une valeur approchée à 10^{-4} près)
b) Montrer, en raisonnant par récurrence, que cette suite est majorée par le nombre 2.
c) Montrer que la suite est convergente.
d) Montrer que $2-u_{n+1} < \dfrac{2-u_n}{2}$ et en déduire que la suite converge vers 2.

2) Démontrer les formules suivantes : $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n\bullet(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n\bullet(n+1)\bullet(2n+1)}{6}$.

En déduire la valeur de la somme $mn+(m-1)\bullet(n-1)+(m-2)\bullet(n-2)+\ldots+1\bullet(n-m+1)$, où m et n sont deux entiers naturels non nuls, avec $m < n$. Vérifier le résultat avec $m = 7$ et $n = 10$.

Partie 4 : Trigonométrie (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $1+\sin x+\sin 2x+\sin 3x \geq \cos x-\cos 2x+\cos 3x$

Q1

1) famille de 8 enfants

La distribution des sexes équiprobable

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de garçons.

X suit une loi de Bernoulli à 8 épreuves avec une probabilité de succès égale à $\frac{1}{2}$.

$$E[X] = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$P(X=4) = C_8^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$$

2) a) Supposons qu'il y a n personnes.

La 1ère personne serre $n-1$ mains, il reste $n-1$ personnes

La 2e personne serre $n-2$ mains

⋮

La dernière personne ne serre pas de mains

Or $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = 28$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0$

$\Delta = 1 + 224 = 225$

$n_1 = \frac{1+15}{2} = 8$

$n_2 = -7$ à exclure

Il y avait donc 8 personnes

b) Soit n le nombre de couples, il y a $2n$ personnes et $2n$ mains à serrer

Le 1er couple serre $4(n-1)$ mains

Le 2e couple serre $4(n-2)$ mains

Le $n-1$e couple serre 4 mains.

Le ne couple ne serre pas de mains.

par couple 4 mains à serrer

Ainsi $\sum_{i=0}^{n-1} 4i = 4\,\frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1) = 40$

$\Leftrightarrow \quad n^2 - n - 20 = 0$

$\Delta = 1 + 80 = 81$

$n_1 = \frac{1+9}{2} = 5$

$n_2 = \frac{1-9}{2} = -4$ à exclure

5 couples !

3) a) $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(P_1 \cap F) + \mathbb{P}(P_2 \cap F) + \mathbb{P}(P_3 \cap F)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{11}{18}$

b) $\mathbb{P}(P_3 \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P_3 \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(P_3 \cap P)}{1 - \mathbb{P}(P)}$

$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{7}{18}}$

$= \frac{4}{7}$

Q2

$z^5 + 5iz^3 - z^2 - 5i = 0$

$\Leftrightarrow \quad z^2(z^3 - 1) + 5i(z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (z^2 + 5i)(z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{z^2 = -5i}_{(*1)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{z^3 = 1}_{(**)}$

$(*1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -5i \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy < 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \qquad 2x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$(*1) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}$

$(**) \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = e^{i0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 + \frac{2k\pi}{3} \ [2\pi] \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = e^{i0} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$= 1 \qquad = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left\{ \quad \right\}$

2) $z^2 - [2 + i(m-\sqrt{3})]z + 1 + m\sqrt{3} + i(m-\sqrt{3}) = 0$, $m \in \mathbb{R}$

a) $\Delta = [2 + i(m-\sqrt{3})]^2 - 4(1 + m\sqrt{3} + im - i\sqrt{3})$

$= 4 + i4(m-\sqrt{3}) - (m-\sqrt{3})^2 - 4i(m-\sqrt{3}) - 4 - 4m\sqrt{3}$

$= 4 - m^2 + 2\sqrt{3}m - 3 - 4 - 4m\sqrt{3}$

$= -m^2 - 2\sqrt{3}m - 3$

$= -(m + \sqrt{3})^2 \leq 0$

$z_1 = \dfrac{2 + i(m-\sqrt{3}) + i(m+\sqrt{3})}{2} = 1 + im$

$z_2 = \dfrac{2 + i(m-\sqrt{3}) - i(m+\sqrt{3})}{2} = 1 - i\sqrt{3}$

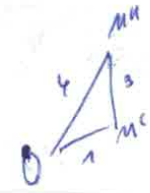
b) $M'(z_1)$ $M''(z_2)$

$O(0)$

$|z_1|^2 = 1 + m^2$

$|z_2|^2 = 4$

$|z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{3} + m)^2 = 3 + 2\sqrt{3}m + m^2$



si $m = 0$, $|z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_1 - z_2|^2$

c'est-à-dire $M'OM''$ est rectangle en M'

$3 + 2\sqrt{3}m + m^2 \geq 1 + m^2 \iff 2\sqrt{3}m \geq -2$

$\iff m \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$4 \geq 1 + m^2 \iff m \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

$3 + 2\sqrt{3}m + m^2 \geq 4$ ...

$\iff m^2 + 2\sqrt{3}m - 1 \geq 0$ $\Delta = 12 + 4 = 16$ $m_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} + 4}{2} = 2 - \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad m \in]-\infty, -2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; +\infty[$

$-2-\sqrt{3} \quad -\sqrt{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \sqrt{3} \quad 2+\sqrt{3}$

Si $m \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

$3+2\sqrt{3}m+m^2 \leq 4$

$1+m^2 \leq 4$

$4 = 4 + 2\sqrt{3}m + 2m^2$

$\Leftrightarrow \quad m(m+2\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = -\sqrt{3} \qquad (z_1 = z_2)$

Nan

Si $m \in]-\infty; -\sqrt{3}]$, alors

$1+m^2 = 4 + 3 + 2\sqrt{3}m + m^2$

$\Leftrightarrow \quad -6 = 2\sqrt{3}m$

$\Leftrightarrow \quad m = \frac{-6}{2\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ NON

Si $m \in [\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}]$

$1+m^2 \geq 4$

$3+2\sqrt{3}m+m^2 \leq 4$

et $3+2\sqrt{3}m+m^2 \geq 1+m^2$

$3+2\sqrt{3}m+m^2 \geq 1+m^2+4$

$\Leftrightarrow \quad -2+2\sqrt{3}m = 0$

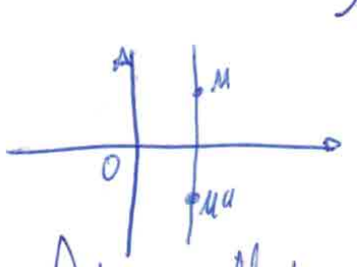
$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Si $m \in [2+\sqrt{3}; +\infty[$

$3 + 2\sqrt{3}m + m^2 \geq 4$

$1 + m^2 \geq 4$

$3 + 2\sqrt{3}m + m^2 \geq 1 + m^2$



Autre méthode on devine et on détermine à l'aide de la figure

M'OM' rectangle en O (plus facile)

$\Leftrightarrow (m+\sqrt{3})^2 = 1+m^2 + 1+3$

$\Leftrightarrow \dots \quad m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Si $m=0$, M'OM' rectangle en M'

ou $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $\forall z \neq -3i, \quad f(z) = \frac{iz-1}{z+3i} = \frac{(-y-1)+ix}{x+i(y+3)} \cdot \frac{x-i(y+3)}{x-i(y+3)}$

$= \frac{-xy - x + ix^2 - i(-y-1)(y+3) + x(y+3)}{x^2 + (y+3)^2}$

$\forall z \neq -3i, \quad f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (y+1)(y+3) + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 + x^2 = 1$

$\Leftrightarrow (y+2)^2 + x^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ Cercle de centre $(0,-2)$ et de rayon 1 privé des point $(0,-3)$

$\forall z \neq -3i, \quad f(z) \in i\mathbb{R}_- \Leftrightarrow -xy - x + x(y+3) = 0$

et $x^2 + (y+2) < 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad$ et $\quad x^2 + (y+2)^2 < 1$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad$ et $\quad -3 < y < -1$



demi-cercle privé

Q3

1) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} & > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} & > 0 \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

a) $u_1 = \sqrt{2}$

$u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$u_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$u_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

$u_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

b) $u_1 = \sqrt{2} < 2$

Supposons que $u_n < 2$ et montrons que $u_{n+1} < 2$

$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \overset{\text{hyp}}{<} \sqrt{2+2} = 2$

Donc par induction, c'est vrai $\forall n$

c)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2+u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n^2}+1} > \sqrt{\frac{2}{2}+1} = \sqrt{2} > 1$$

$u_{n+1} > u_n \quad \forall n$

$(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée, donc convergente.

d) $2 - u_{n+1} < \frac{2-u_n}{2} \iff 4 - 2u_{n+1} < 2 - u_n$

$\iff 2 - 2u_{n+1} < -u_n$

$\iff 2 + u_n < 2u_{n+1}$

$\iff 2 + u_n < 2\sqrt{2+u_n}$

$\iff (2+u_n)^2 < 4(2+u_n)$

$\iff 4 + 4u_n + u_n^2 < 4u_n + 8$

$\iff u_n^2 < 4$ vrai car $u_n < 2$ (b)

Limite recherchée

$L = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2+u_n}$

$= \sqrt{2+L}$

$\iff L = 2$ ou $L = -1$ à rejeter car $u_n > 0 \ \forall n$

$0 < 2 - u_{n+1} < \frac{2-u_n}{2} < \frac{1}{2}\frac{2-u_{n-1}}{2} < \dots < \frac{2-\sqrt{2}}{2^n} \iff \frac{2-\sqrt{2}}{2^n} \longrightarrow 0$ si $n \to +\infty$

2) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \dots + n$

$S_n = n + \dots + 1$

donc $2S_n = n(n+1)$

cad. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

par induction $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 13n + 6}{6}$$

	2	5	13	6
-1		-2	-7	-6
	2	7	6	0

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$2n^2 + 7n + 6 = 0$

$\Delta = 49 - 48$

$= 1$

$n_1 = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}$

$n_2 = -2$

$$= \frac{(n+1)\,2(n+2)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$mn + \underbrace{(m-1)\cdot(n-1)}_{mn-m-n+1} + \underbrace{(m-2)(n-2)}_{mn-2m-2n+4} + \dots + 2\cdot(n-m+2) + 1\,(n-m+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (m-k)(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} mn - m\sum_{k=0}^{m-1} k - n\sum_{k=0}^{m-1} k + \sum_{k=0}^{m-1} k^2$$

$$= m^2 n - (m+n)\frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m-1)\,m\,(2m-1)}{6}$$

pour $m=7$, $n=10$ $\quad 490 - 42\cdot\frac{7\cdot 6}{2} + \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13$

$$= 224$$

$$\Big] =$$

$$7\cdot 10 + 6\cdot 9 + 5\cdot 8 + 4\cdot 7 + 3\cdot 6 + 2\cdot 5 + 1\cdot 4 = 224$$

Q4

(I) $\Leftrightarrow \underbrace{\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) - \cos(x) + \cos(2x) - \cos(3x)}_{f(x)} + 1 \geq 0$

période : $\text{ppcm}\left(2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$(I) \Leftrightarrow \sin(2x) + 2\sin(2x)\cos(x) - 2\cos(2x)\cos(x) + 2\cos^2(x) \geq 0$

($\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$)

$\Leftrightarrow 2\cos(x)\left[\sin(x) + \sin(2x) - \cos(2x) + \cos(x)\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos(x)\left[2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos(x)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] \geq 0$

Sur $[0; 2\pi]$

1) $\cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$

2) $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} \in [k2\pi, \pi + k2\pi]$

$\Leftrightarrow x \in \left[k\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}\right]$

$x \in [0; 2\pi]$

$\Leftrightarrow x \in [0; \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}; 2\pi]$

3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + k2\pi$ ou $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\pi + k2\pi$ $\overset{x \in [0;2\pi]}{\Leftrightarrow}$ $x = \pi$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0
$\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0		$-$	0

Donc $[0;2\pi]$: $S_{[0;2\pi]} = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2k\pi ; \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right] \right)$$

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Mardi, le 21 avril 2009

15h-18h

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)$.

a) Déterminez l'ensemble de définition de f et étudiez la continuité de f. Déterminez les asymptotes éventuelles au graphe de f.

b) Étudiez la dérivabilité de f et calculez et simplifiez $f'(x)$.

c) Utilisez les résultats précédents pour exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(x)$ en distinguant deux intervalles.

d) Démontrez que la restriction g de f à $I =]-\infty;1]$ définit une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

e) Déterminez $g^{-1}(x)$.

f) Calculez le nombre dérivé de g^{-1} en 0 : - d'abord en utilisant $g^{-1}(x)$,

- puis sans utiliser $g^{-1}(x)$. **8 points**

II. Soit la fonction $f_{a,b}$ définie par $f_{a,b}(x) = e^{ax} - e^{bx}$ et soit $C_{a,b}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, a et b étant des paramètres réels tels que $0 < a < b$.

1) Étudiez $f_{a,b}$ (domaine de définition, continuité, limites, asymptotes et branches paraboliques éventuelles, sens de variation et extrema éventuels, concavité et points d'inflexion éventuels, courbe représentative $C_{a,b}$. Prenez $a = 1$ et $b = 4$ pour le graphique.)

2) Calculez en fonction des réels a, b et λ ($0 < a < b$ et $\lambda > 0$) l'aire S du domaine délimité par $C_{a,b}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -\lambda$. Calculez la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$. **6 points**

III. On considère $A_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et $A_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

1) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Indication : Déterminez un encadrement de $\sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [0;1]$.

2) Calculez A_0 et A_1.

3) Calculez A_n en fonction de A_{n-2} pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$. **6 points**

Q 1

Posons $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)$

a) C.E. : $2(x^2+1) > 0$ toujours vrai

$\Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \leq 1$

ssi $\quad -\sqrt{2(x^2+1)} \leq x+1 \leq \sqrt{2(x^2+1)}$

ssi $\quad (x+1)^2 \leq 2(x^2+1)$

ssi $\quad x^2+2x+1 \leq 2x^2+2$

ssi $\quad 0 \leq x^2-2x+1 = (x-1)^2$ toujours vrai

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

f est continue sur son domaine de définition, $\text{dom}_c f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)$ (x resp (-x) en évidence) $= \arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \pm\frac{\pi}{4}$

A.H (en $+\infty$, à droite) : $h_1 \equiv y = \frac{\pi}{4}$

A.H (en $-\infty$, à gauche) : $h_2 \equiv y = -\frac{\pi}{4}$

b) La fonction arcsin : $x \longmapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$

Or $\quad -1 < \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right) < 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 < (x-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 1$

Dérivabilité en 1

calculons d'abord $f'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\left(\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}}} \cdot \frac{\sqrt{2(x^2+1)} - (x+1)\frac{1}{2\sqrt{2(x^2+1)}}\,4x}{2(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2(x^2+1)-(x+1)^2}{2(x^2+1)}}} \cdot \frac{2(x^2+1)-(x+1)2x}{2(x^2+1)\sqrt{2(x^2+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{2x^2+2-x^2-2x-1}} \cdot \frac{2x^2+2-2x^2-2x}{2(x^2+1)\sqrt{2(x^2+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{(x-1)^2}} \cdot \frac{(1-x)}{(x^2+1)\sqrt{2(x^2+1)}}$$

$$= \frac{(1-x)}{|x-1|\,(x^2+1)}$$

$$= -\frac{\operatorname{sign}(x-1)}{(x^2+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2} \end{array}\right] \neq$$

f n'est pas dérivable en 1, mais à gauche de 1 et à droite de 1

↳ deux demi-tangentes verticales

$(1, f(1))$ est un point anguleux

c) Soit $x \in I_1 =]1; +\infty[$ qui est un ouvert connexe

$\forall x \in I_1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2+1} = -\arctan'(x)$

Sur le thm de l'ouvert connexe $f(x) = -\arctan(x) + k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = k_1$

on a $f(x) = -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4}$ sur I_1

Pour $x \in I_2 =]-\infty ; 1[$ qui est aussi un ouvert connexe on a

$\forall x \in I_2, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \arctan'(x)$

Par le Thm de l'ouvert connexe

$f(x) = \arctan(x) + k_2 \quad k_2 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

on a donc $\forall x \in I_2, \quad f(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$ sur I_2

en 1 : $f(1) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \to 1^+} \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$

$= \lim_{x \to 1^-} -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4}$

ainsi $f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \frac{\pi}{4} & \text{si } x \leq 1 \\ -\arctan(x) + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) Posons $g = f|_I$ avec $I =]-\infty ; 1]$

sur cet intervalle, on a $\forall x \in I \quad g(x) = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$

on a $g(]-\infty ; 1]) =]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}] = J$

g est continue sur I

et $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ (g strictement croissante)

} g est injective sur I

Il s'ensuite que

$$g : I \longrightarrow \operatorname{im} g =: J$$

est une bijection (la surjectivité est obtenue par construction).

e) Soit $y \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ et $x \in]-\infty; 1]$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \arctan(x) + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y - \frac{\pi}{4}}_{\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]} = \arctan(x)$$

(*) $\Leftrightarrow \tan\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = x$

(*) $\tan$ est une bijection entre $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$

ainsi $g^{-1}(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

f) $\forall x \in]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\; > 0$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

d'où $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 2$

Ensuite notons que

$$\forall x \in]-\infty; 1[: \underbrace{(g^{-1} \circ g)'(x)}_{\| \; (\mathrm{id})'(x) \; \| \; 1} = (g^{-1})'(g(x)) \cdot g'(x)$$

d'où $(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

ainsi $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(-1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Q2

Posons $f_{a,b}(x) = e^{ax} - e^{bx}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 < a < b$

1) $\text{dom } f_{a,b} = \mathbb{R}$

$f_{a,b}$ est continue sur son domaine de définition, donc $\mathcal{C}_{f_{a,b}} = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{ax} - e^{bx} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{ax}}_{\to +\infty} \left(1 - \underbrace{e^{(b-a)x}}_{\to 0}\right) = -\infty$$

$f_{a,b}$ admet une A.H (en $-\infty$, i.e. à gauche) : $\mathcal{H}_1 \equiv y = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{a e^{ax} - b e^{bx}}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^{ax}(a - b e^{(b-a)x}) = -\infty$$

$\mathcal{C}_{f_{a,b}}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $(+\infty$, à droite)

$\text{dom } f'_{a,b} = \text{dom } f_{a,b}$

$\forall x \in \text{dom } f'_{a,b}$, on a $f'(x) = a e^{ax} - b e^{bx}$

$$f'_{ab}(x) \geq 0 \iff e^{ax}(a - b e^{(b-a)x}) \geq 0$$

$$\iff a - b e^{(b-a)x} \geq 0$$

$$\iff \frac{a}{b} \geq e^{(b-a)x}$$

$$\iff \ln\left(\frac{a}{b}\right) \geq (b-a)x$$

$$\iff x \leq \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{b-a} \quad \begin{matrix} <0 \\ >0 \\ <0 \end{matrix}$$

x	$-\infty$		$\frac{\ln(\frac{a}{b})}{b-a}$		$+\infty$
$f'_{ab}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{ab}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$

$$f_{ab}\left(\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{b-a}\right) = e^{\frac{a}{b-a}\ln\left(\frac{a}{b}\right)} - e^{\frac{b}{b-a}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b-a}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b-a}} > 0 \quad \text{car } \frac{a}{b} < 1 \quad (a<b)$$

$\text{dom } f''_{ab} = \text{dom } f'_{ab}$

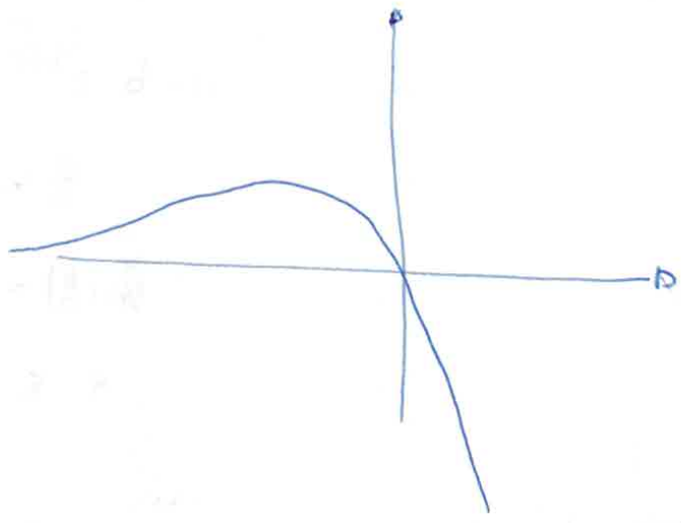
$\forall x \in \text{dom } f'_{ab}$: $f''_{ab}(x) = a^2 e^{ax} - b^2 e^{ax}$

$f''_{ab}(x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)}{b^2-a^2} = \underbrace{\frac{2\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{b^2-a^2}}_{<0} \quad \underbrace{b^2-a^2 > 0}_{<0}$$

	$-\infty$		$\frac{2\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{b^2-a^2}$		$+\infty$
$f''_{ab}(x)$		$+$	0	$-$	
concavité de f_{ab}		⌣	P.I.	⌢	

$$f_{a,b}\left(\frac{2\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{b^2-a^2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2a}{b^2-a^2}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2b}{b^2-a^2}} > 0$$



2) $\lambda > 0$, $x = -\lambda < 0$

$f_{ab}(x) \geq 0 \iff e^{ax} \geq e^{bx}$

$\iff ax \geq bx$

$\iff (a-b)x \geq 0$

$\iff x \leq 0$

ainsi on doit calculer

$$A(\lambda) := \int_{-\lambda}^{0} e^{ax} - e^{bx} \, dx$$

$$= \left[\frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{bx}}{b} \right]_{-\lambda}^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{e^{-a\lambda}}{a} + \frac{e^{-b\lambda}}{b} \right)$$

$$= \frac{1 - e^{-a\lambda}}{a} + \frac{e^{-b\lambda} - 1}{b} \quad \text{u.a.}$$

$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \; (>0)$ u.a.

Q3

1) $\forall x \in [0;1] \quad 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$

posons $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [0;1]$

$f_n(x) \geq 0$

donc $A_n(x) \geq 0$

de même $f_n(x) \leq x^n$

d'où $A_n \leq \int_0^1 x^n \, dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

$A_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ } posons $x = \cos t \quad dx = (-\sin t)\, dt$

on $t = \arccos x$

$t = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$

$t = 0$ si $x = 1$

$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t \sqrt{1-\cos^2 t} \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \underbrace{|\sin t|}_{\geq 0 \text{ sur } [0;\frac{\pi}{2}]} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t \, dt$

$= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right)$

$= \frac{\pi}{4}$

$A_1 = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \sqrt{1-x^2} = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \, (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$

$= \left[0 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \frac{1}{3} \right.$

3) $A_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}$

x^{n-1}	$x\sqrt{1-x^2}$
$(n-1)\,x^{n-2}$	$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$A_n = \underbrace{\left[-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)\,x^{n-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,x^{n-2}\,dx$$

$$-\frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{n-1}{3}\left(A_{n-2} - A_n\right)$$

ainsi $A_n\left(1+\frac{n-1}{3}\right) = \frac{n-1}{3}A_{n-2}$

$$\Leftrightarrow \quad A_n\left(\frac{2+n}{3}\right) = \frac{n-1}{3}A_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_n = \frac{n-1}{n+2}A_{n-2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}.$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ANALYSE

Mardi, le 10 novembre 2009
15h00 à 18h00

QUESTION I : 4 points

Soit la fonction f définie par $f(x) = ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$.

1) Déterminer $domf$, $dom_c f$, $domf'$ et ensuite calculer $f'(x)$.

2) Calculer $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(\tan x)\, dx$. not yet $\ln 3^{1/4} - \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$

$= -0.0574$

QUESTION II : 4 points

Résoudre l'inéquation suivante : $\log_a x > \log_{a^3}(3x-2)$, a paramètre réel. $S =]\frac{2}{3}; +\infty[$ si $a \in]1; +\infty[$

$S = \emptyset$ si $a \in]0; 1[$

QUESTION III : 12 points

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = e^x - m(x+1)$, $m \in \mathbb{R}_0$ et on désigne par C_m sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Faire l'étude de f_m. (domaines de définition et de continuité, limites, asymptote Δ, position de C_m par rapport à Δ, sens de variation, concavité, tableau des variations) 5,5
Tracer C_1 la représentation graphique de f_1.

2) a) Soit $M(\alpha, \beta) \in C_m$. Etablir une équation cartésienne de T, tangente à C_m au point M. 6,5
Etudier la position de C_m par rapport à T. (On pourra utiliser le signe de la fonction f_1)

b) Considérer ensuite le point K de C_m d'abscisse $\alpha - 1$ et le point H de Δ d'abscisse α.
Déterminer la coordonnée du point N, point d'intersection de T et de Δ.

c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par les segments $[MH]$, $[HN]$, $[NK]$ et par l'arc de courbe KM.
Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine limité par les segments $[MN]$, $[NK]$ et par l'arc de courbe KM.
Vérifier que ces deux aires sont indépendantes de m.

Q1

Posons $f(x) = \ln\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right|$

1) C.E. · $\dfrac{1+\sin x}{\cos x} \neq 0 \iff 1+\sin x \neq 0$

$\iff \sin x \neq -1$

$\iff \sin x \neq \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\iff x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ et $x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$

(la même classe modulo 2π)

· $\cos x \neq 0 \iff \cos x \neq \cos\frac{\pi}{2}$

$\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{-\tfrac{\pi}{2}+k2\pi ; \tfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$$

De plus, $f(x+k2\pi) = f(x)$, ceci f est périodique de période 2π

On peut étudier f sur $]-\pi ; \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right\}$.

f est continue sur son domaine de définition en tant que composée de fonctions continues ; $\text{dom}_c f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi+k2\pi ; \pi+k2\pi[\setminus \{-\frac{\pi}{2}+k2\pi ; \frac{\pi}{2}+k2\pi\}$

En outre $\text{dom } f' = \text{dom } f$, (f ne peut pas être dérivable en un point où ce n'est pas défini)

et $\forall x \in \text{dom } f'$,

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} \cdot \frac{(\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot (1+\sin x)}{(1+\sin x)\cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

2) $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ \ln(\tan x)\, dx$

$\ln(\tan x)$	$\cos x$
$\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$	$\sin x$
$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$	

(sign rule: $\frac{\text{diff}}{\text{sign}}$ = sign rule)

$$= \left[\ln(\tan x)\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx$$

$$= \left[0 - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx$$

part 1)

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\tfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\tfrac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\tfrac{2\sqrt{2}+2}{2}\right) + \ln(\sqrt{3})$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}\ln(3) - \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$= \tfrac{3}{2}\ln(\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}+1)$$

Q2

$(I) \Leftrightarrow \log_a x > \log_{a^3}(3x-2)$

Condition d'existence pour a : $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$

pour x : $x > 0$

$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$

Domaine d'étude : $E =]\frac{2}{3};+\infty[$

Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ fixé.

$\forall x \in]\frac{2}{3};+\infty[$, on a

$$(I) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln a} > \frac{\ln(3x-2)}{3\ln(a)} \Leftrightarrow \frac{\ln(x^3)}{\ln(a)} > \frac{\ln(3x-2)}{\ln(a)}$$

si $a \in]0;1[$ $(I) \Leftrightarrow \ln(x^3) < \ln(3x-2)$

$\Leftrightarrow x^3 < 3x-2$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 < 0$

$P(x)$ $\quad P(-1) = 0$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$P(x) = (x-1)(x^2+x-2)$

	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+1$		−		−	0	+	
x^2-x-2		+	0	−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	0	+	

$\Delta = 1+8 = 9$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

si $a \in]0;1[$; $(I) \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 < 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[$

$S_{]0;1[} = \emptyset$

si $a \in]1;+\infty[$ $(I) \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow x \in]-2;1[\cup]1;+\infty[$

$S_{]1;+\infty[} =]\frac{2}{3};1[\cup]1;+\infty[$

si $a \in]0;1[$, S admet aucune sol. $\emptyset$

si $a \in]1;+\infty[$ S admet comme solution $]\frac{2}{3};1[\cup]1;+\infty[$

Q3

posons $f_m(x) = e^x - m(x+1)$, avec $m \in \mathbb{R}^*$

1) C.E. ✓

dom $f_m = \mathbb{R}$

$\forall m \in \mathbb{R}^*$, f_m est continue sur son domaine de définition, donc $\mathcal{C}_{f_m}$ = dom f_m

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x - m(x+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m < 0 \\ +\infty & \text{si } m > 0 \end{cases} = +\infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - m\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - m(x+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 0 \\ -\infty & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to +\infty} - m \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} = +\infty$$

B.P. OY

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to 0} - m \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} = -m$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) + mx = \lim_{x \to -\infty} e^x - m = -m$$

Résumé

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 0 \\ -\infty & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

f_m admet une B.P. de direction OY (en $+\infty$)
f_m admet une asymptote oblique d'éq. $\Delta : y = -mx - m$ (en $-\infty$)

$\forall x \in \text{dom } f_m$, considérons

$$f_m(x) - (-mx - m) = e^x - mx - m + mx + m = e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f_m(x) > -mx - m$$

$\mathcal{C}_m$ est toujours au dessus de Δ !

$\text{dom } f'_m = \text{dom } f_m$

$\forall x \in \text{dom } f'_m$, on a $\quad f'_m(x) = e^x - m$

$$f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq m$$

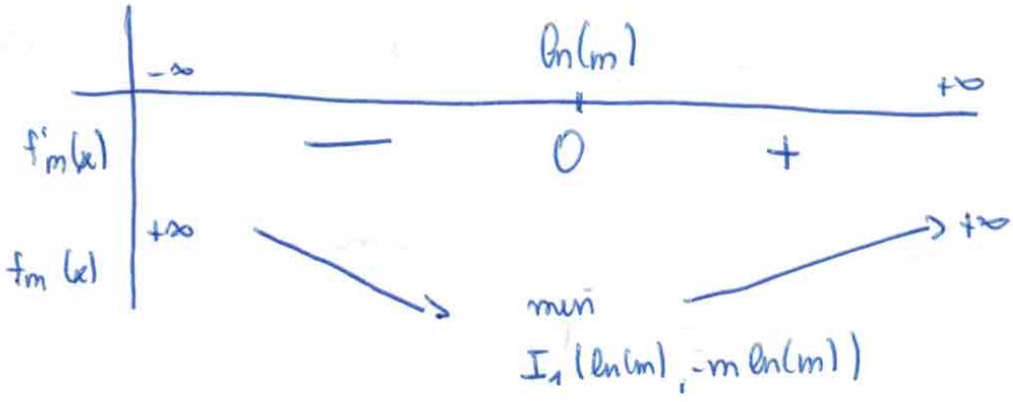
si $m > 0$

$f'_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(m)$

si $m < 0$

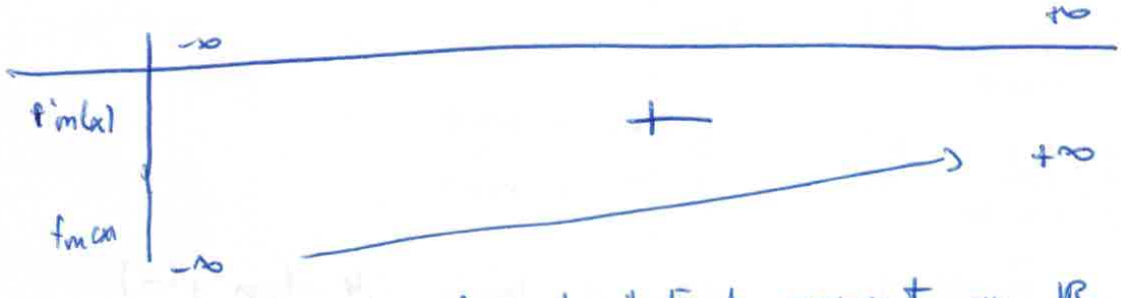
$f'_m(x) \geq 0$ est toujours vrai

si $m > 0$



f_m est strictement décroissant sur $]-\infty ; \ln(m)[$ et strictement croissant sur $]\ln(m) ; +\infty[$

si $m < 0$



f_m est strictement croissant sur $\mathbb{R}$

" $f_m(x) - T \geq 0$ "

$\Leftrightarrow \quad e^x - e^\alpha x - (1-\alpha) e^\alpha \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{x-\alpha} - (x-\alpha) - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad f_1(x-\alpha) \geq 0$

toujours vrai mais en $(0;0)$

Si $x > \alpha$ alors $\mathcal{C}_m$ est au dessus de T

et si $x < \alpha$ alors $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de T

($x = \alpha$, $\mathcal{C}_m$ et T coïncident ce qui est clair !)

b) . $f_m(\alpha-1) = e^{\alpha-1} - m(\alpha-1+1) = e^{\alpha-1} - m\alpha$

. $-m\alpha - m$

$K(\alpha-1,\ e^{\alpha-1} - m\alpha)$

$H(\alpha,\ -m\alpha - m)$ $\quad e^\alpha - m\alpha - m \geq -m\alpha - m$

M est au-dessus de H

$T \cap \Delta$: ~~$-m\alpha - m$~~ $= e^\alpha x + (1-\alpha) e^\alpha - m\alpha - m$

$\Leftrightarrow \quad x = \alpha - 1$

$T \cap \Delta = N(\alpha-1,\ -m(\alpha-1) - m)$

$= N(\alpha-1,\ -m\alpha)$

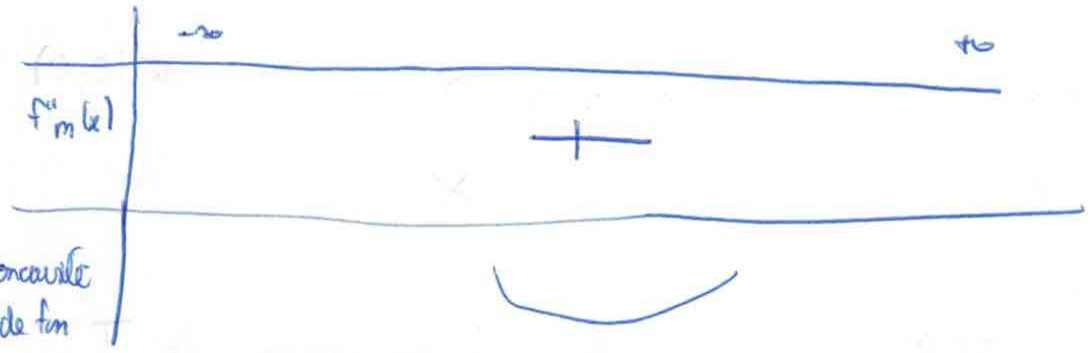
$e^{\alpha-1} - m\alpha \geq -m\alpha$ donc K au dessus de N

$\Leftrightarrow e^{\alpha-1} \geq 0$ ok

$\mathrm{dom}\, f''_m = \mathrm{dom}\, f'_m$

$\forall x \in \mathrm{dom}\, f''_m$, on a

$$f''_m(x) = e^x > 0$$



2) a) Soit $M(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_m$

$$\Leftrightarrow \beta = e^\alpha - m(\alpha+1) = f_m(\alpha)$$

Tangente au point M:

$$y = f'_m(\alpha)(x-\alpha) + f_m(\alpha)$$
$$= (e^\alpha - m)(x-\alpha) + e^\alpha - m\alpha - m$$
$$= (e^\alpha - m)x - \alpha e^\alpha + m\alpha + e^\alpha - m\alpha - m$$
$$= (e^\alpha - m)x + (1-\alpha)e^\alpha - m$$
$$= e^\alpha x + (1-\alpha)e^\alpha - mx - m$$

$$f_m(x) - \left(e^\alpha x + (1-\alpha)e^\alpha - m\alpha - m\right)$$
$$= e^x - e^\alpha x - (1-\alpha)e^\alpha$$

$f_1(x) = e^x - x - 1$
≥ 0
si $x \geq 0$

c) segment $[MH]$: éq. $x = \alpha$ pour droite (MH)

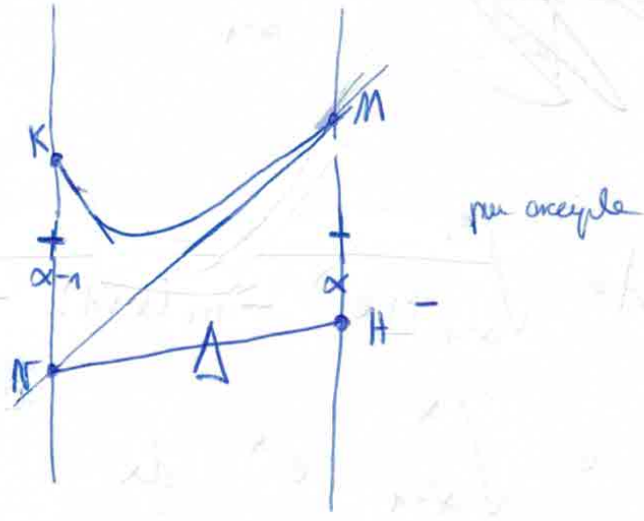
segment $[HN]$: Δ

segment $[NK]$: éq. $x = \alpha - 1$ pour droite (NK)

segment $[MN]$: T

sur $[\alpha-1, \alpha]$ $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de Δ

sur $[\alpha-1; \alpha]$, $\mathcal{C}_m$ est au dessus de T



pas exigée

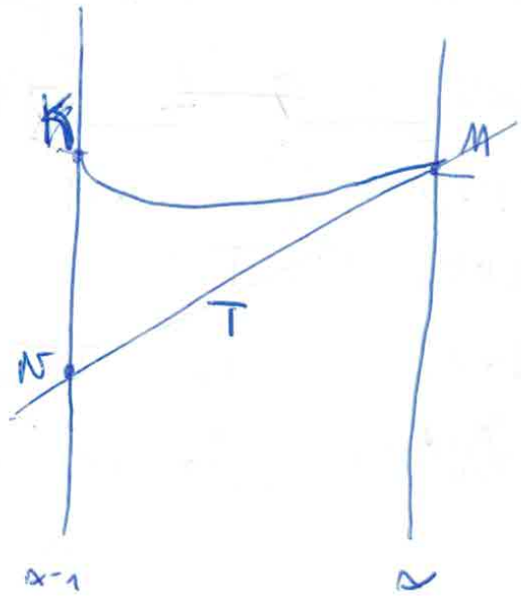
$$A = \int_{\alpha-1}^{\alpha} e^x - m(x+1) - e^{\alpha} x - (1-\alpha)e^{\alpha} + mx + m$$

$$= \int_{\alpha-1}^{\alpha} e^x - e^{\alpha} x - (1-\alpha)e^{\alpha} \, dx$$

$$= e^x \Big]_{\alpha-1}^{\alpha} - \frac{e^{\alpha}}{2} x^2 \Big]_{\alpha-1}^{\alpha} - (1-\alpha)e^{\alpha} x \Big]_{\alpha-1}^{\alpha}$$

$$= e^{\alpha} - e^{\alpha-1} - \frac{e^{\alpha}}{2}\left(\alpha^2 - (\alpha-1)^2\right) - (1-\alpha)e^{\alpha}(\alpha - \alpha + 1)$$

$$= -e^{\alpha-1} + \alpha e^{\alpha} - (2\alpha+1)\frac{e^{\alpha}}{2} \quad \text{u.a.}$$



T est au-dessus de $\mathcal{C}_m$

$$A = \int_{x-1}^{x} e^x - m(x+1) - (-mx - x)\, dx$$

$$= \int_{x-1}^{x} e^x \, dx$$

$$= e^x - e^{x-1}$$

$$= e^x \left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ u.a.}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

jeudi, le 23 avril 2009

15H00 – 18H00

I. On considère un triangle ABC. Par B on mène une droite d variable qui coupe la droite (AC) en D.

Déterminer le lieu géométrique décrit par le centre de gravité du triangle ABD lorsque D parcourt la droite (AC).

(4 points)

II. On considère le point $M\left(6;\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ situé sur l'hyperbole de foyers F(– 5 ; 0) et F'(5 ; 0).

1) Chercher l'équation cartésienne réduite de l'hyperbole.

2) Montrer que la tangente à l'hyperbole au point M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

(6 points)

III. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Δ_1 est la droite passant par A(0,0,1) et de vecteur directeur $\vec{u_1}=\vec{i}+\vec{j}$

Δ_2 est la droite passant par B(0,0,– 1) et de vecteur directeur $\vec{u_2}=\vec{i}-\vec{j}$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble (E) des points M(x,y,z) de l'espace équidistants des deux droites Δ_1 et Δ_2.

1) Vérifier que Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales et non coplanaires.
2) Démontrer que le point O est un point de (E).
3) Déterminer une représentation paramétrique de Δ_1 et de Δ_2.
4) M(x,y,z) étant un point quelconque, on note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur Δ_1 et Δ_2.
   a) Calculer MH^2 et MK^2 en fonction de x, y et z.
   b) Démontrer que M $\in$ (E) <=> $xy+\frac{1}{2}z=0$
5) En utilisant la dernière égalité :
   a) Démontrer que les intersections de (E) avec des plans orthogonaux à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.
   b) Quelle est la nature des intersections de (E) avec des plans orthogonaux à l'axe $\left(O;\vec{i}\right)$?

(6 points)

IV. Soient A, B, C et D 4 points de l'espace, distincts 2 à 2 et tels que les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point I.

1) Soit M un point quelconque de l'espace.

Montrer que si M n'appartient pas au plan (ABC), alors $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\neq\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$

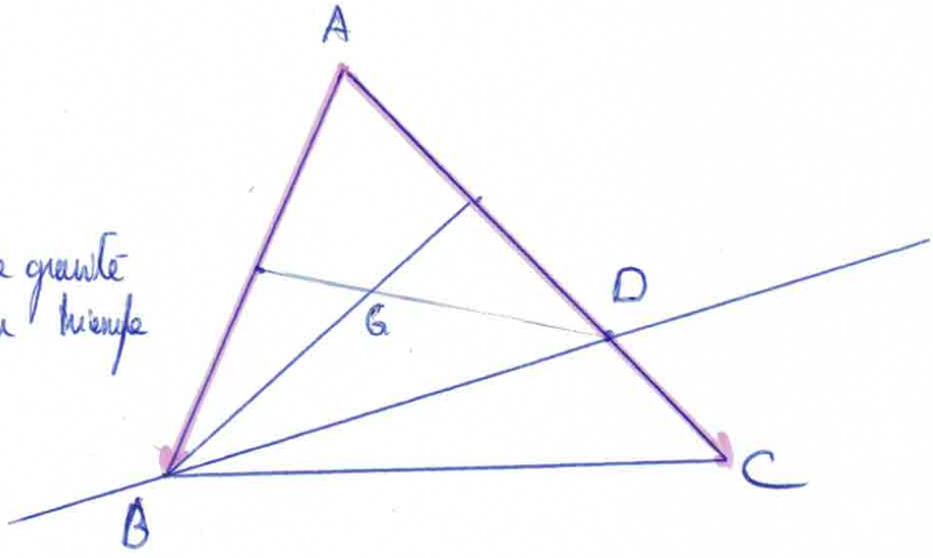
2) Cherchons maintenant l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que

$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$ (*)

   a) Que peut-on déduire de la question 1. de cet exercice ?
   b) Démontrer que l'égalité (*) est équivalente à : $\overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)=\vec{0}$
   c) En déduire la nature de (E).

(4 points)

Q1



G centre de gravité (vectorielle) du triangle ABD

Considérons le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $C(0;1)$ et $D(0;\delta)$ avec $\delta \in \mathbb{R}$

~~Equation de la droite~~

on a $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BB'}$ avec B' - mil $[AD]$, $B'\left(0; \frac{\delta}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G - 1 \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\delta}{2} - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{\delta}{3} \end{cases}$$

Droite parallèle à (AC) passant par le point $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Q2

Soit (H), l'hyperbole de foyers $F(-5;0)$ et $F'(5;0)$.

axe focale de (H), l'axe des abscisses

on a $c=5$, avec $c^2 = a^2+b^2$

H a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a>0$, $b>0$

$M(6;\frac{3\sqrt{5}}{2})$

$M \in H \Leftrightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{45}{4b^2} = 1$

$\Leftrightarrow 4\cdot 36 b^2 - 45 a^2 = 4a^2b^2$

$\Leftrightarrow 144b^2 - 45a^2 - 4a^2b^2 = 0$ (*)

De plus $a^2+b^2=25 \Leftrightarrow b^2 = 25-a^2$ (**)

(**) dans (*) $144(25-a^2) - 45a^2 - 4a^2(25-a^2) = 0$

$\Leftrightarrow 3600 - 144a^2 - 45a^2 - 100a^2 + 4a^4 = 0$

$\Leftrightarrow 3600 - 289a^2 + 4a^4 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = 16$ ou $a^2 = \frac{225}{4}$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ à rejeter

$b^2 = 9$ $b^2 = -\frac{125}{4}$

Autre méthode :

$|MF - MF'| = 2a \quad \forall M \in H$

Prenons $M(6;\frac{3\sqrt{5}}{2})$, alors $MF = \sqrt{11^2 + (\frac{3\sqrt{5}}{2})^2} = \sqrt{121 + \frac{45}{4}} = \frac{23}{2}$

$MF' = \sqrt{1^2 + (\frac{3\sqrt{5}}{2})^2} = \frac{7}{2}$

$|\frac{23}{2} - \frac{7}{2}| = 2a \Leftrightarrow \frac{16}{2} = 2a$

$\Leftrightarrow a = 4$

$b = \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{9} = 3$

$$H: \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2 - 16y^2 = 144$$

2) éq. de la tangente en point M:

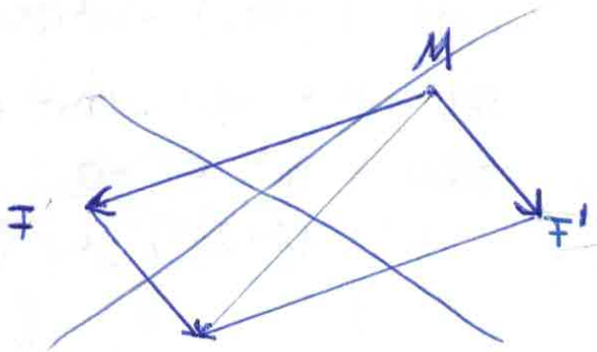
$$T: \quad 9x \cdot 6 - 16y \frac{3\sqrt{5}}{2} = 144$$

$$\Leftrightarrow \quad 54x - 144 = 24\sqrt{5}\, y$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{54}{24\sqrt{5}} x - \frac{144}{24\sqrt{5}}$$

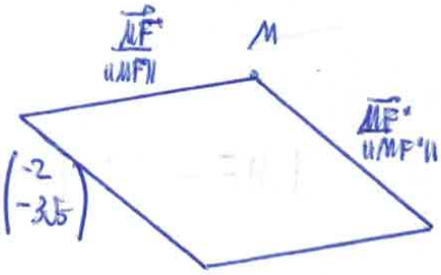
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{9\sqrt{5}}{20} x - \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

vecteur directeur de la tangente $(1; \frac{9\sqrt{5}}{20})$ $(20; 9\sqrt{5})$



Construisons le losange

$$\frac{\overrightarrow{MF}}{\|MF\|} = \frac{2}{23} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -22 \\ -3\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|MF'\|} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ -3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



vecteur directeur de la bissectrice de $\widehat{FMF'}$:

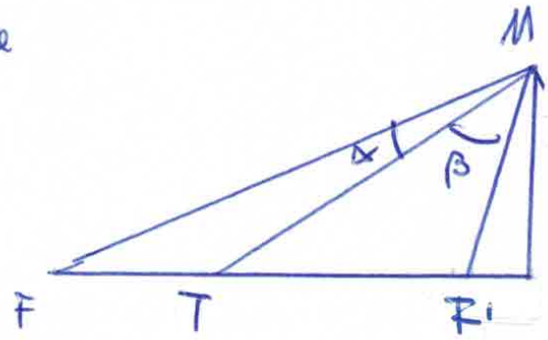
$$\frac{\overrightarrow{MF}}{\|MF\|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|MF'\|} = \begin{pmatrix} -\frac{22}{23} \\ -\frac{3\sqrt{5}}{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{3\sqrt{5}}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{200}{161} \\ -\frac{90\sqrt{5}}{161} \end{pmatrix}$$

Ainsi comme la bissectrice et la tangente ont le même vecteur directeur et passent par M,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-90\sqrt{5}}{161} \cdot \frac{-161}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

autre méthode : calculer les angles avec des produits scalaires

autre méthode



à prouver $\alpha = \beta$

pente de $FM : \frac{3\sqrt{5}}{22}$, car $\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} -11 \\ -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\sqrt{5}}{22} \end{pmatrix}$

pente de $FM' : \frac{3\sqrt{5}}{2}$ $\overrightarrow{F'M} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \;//\; \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

pente de la tangente : $\frac{9\sqrt{5}}{20}$

$\hat{F}' = \arctan\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ $\hat{F} = \arctan\left(\frac{3\sqrt{5}}{22}\right)$ $\hat{T} = \arctan\left(\frac{9\sqrt{5}}{20}\right)$

$$\alpha = 180 - \hat{F} - (180^\circ - \hat{T})$$
$$= \hat{T} - \hat{F}$$
$$= \arctan\left(\frac{9\sqrt{5}}{20}\right) - \arctan\left(\frac{3\sqrt{5}}{22}\right)$$

$$\beta = 180^\circ - \hat{T} - (180^\circ - \hat{F}')$$
$$= \arctan\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{9\sqrt{5}}{20}\right)$$

$$\alpha - \beta \overset{\text{Cassio}}{=} 0 \iff \alpha = \beta$$

Q3

Δ_1 passant par $A(0,0,1)$ et de vect. dir $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Δ_2 ~~——~~ $B(0,0,-1)$ ~~——~~ $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

(E), l'ensemble des points $M(x,y,z)$ équidistants de Δ_1 et Δ_2

1) $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0 \Rightarrow$ orthogonal

non coplanaires $\Leftrightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ car orthogonal

$$\Delta_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Delta_2 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$$

ensemble

2) $d(O,\Delta_1) = \dfrac{\|\vec{OA} \wedge \vec{u_1}\|}{\|\vec{u_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\|$ $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\|$

$= 1$

$d(O,\Delta_2) = \dfrac{\|\vec{OB} \wedge \vec{u_2}\|}{\|\vec{u_2}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\|$ $\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\|$

$= 1$

$d(O,\Delta_1) = d(O,\Delta_2) \Leftrightarrow O \in (E)$

3)

éq. para de Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Delta_2 \equiv \begin{cases} x = k_2 \\ y = -k_2 \\ z = -1 \end{cases}$$

4) . H projeté orthogonal de M sur Δ_1

K projeté orthogonal de M sur Δ_2

a) $MH^2 = \text{dist}(M, \Delta_1)^2 = \dfrac{\| \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u_1} \|^2}{\|\vec{u_1}\|^2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \quad \begin{pmatrix} -x & -y & 1-z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} z-1 \\ 1-z \\ y-x \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= (z-1)^2 + \frac{1}{2}(x-y)^2$$

$$MK^2 = \text{dist}(M, \Delta_2)^2 = \dfrac{\| \overrightarrow{MB} \wedge \vec{u_2} \|^2}{\|\vec{u_2}\|^2} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -1-z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \quad \begin{pmatrix} -x & -y & -1-z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1-z \\ 1+z \\ x+y \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= (z+1)^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2$$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow MH^2 = MK^2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2$

$$= z^2 + 2z + 1 + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

$$\Leftrightarrow -4z - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z + xy = 0$$

5) a) Plan orthogonal à (AB) :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{\perp(AB)} \equiv \underbrace{z + d = 0}_{\text{cst}} \quad \text{pour } d \in \mathbb{R}$$

dans ce cas, si on remplace ces dans la dernière cyclade

on a : $-2d + xy = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{y = 2d \cdot \frac{1}{x}}_{\text{équation d'une hyperbole}}$$

$S = \{ (x, 2d\frac{1}{x}; -d) \}$

Si $d=0$, càd π_{ccm} et le plan (d'éq. $z=0$)
$\hookrightarrow xOy$

alors $xy=0 \Leftrightarrow x=0$ ($z=0$) ou $y=0$ ($z=0$)

↳ l'axe des ordonnées ↳ l'axe des abscisses

$$S = Ox \cup Oy$$

b) Plan orthogonal à l'axe $(O,\vec{\imath})$

$$\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_{\perp(O,\vec{\imath})} \equiv \underbrace{x + d = 0}_{\text{cst}} \quad \text{pour } d \in \mathbb{R}$$

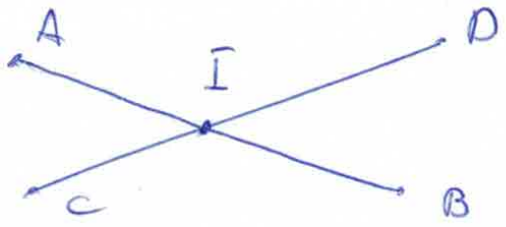
cst dans la dernière cyclade : $2z - dy = 0$

$$z = \frac{d}{2} y$$

$$\begin{cases} x = -d \\ y = t \\ z = \frac{d}{2} t \end{cases}$$

il s'agit de la droite
de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{d}{2} \end{pmatrix}$
passant par le point $\begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Q4



A, B, C, D 4 points de l'espace

Hyp. (AB) et (CD) sont sécants en un point I

il est clair que $D \in (ABC)$

1) Supposons que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ est un vecteur normal au plan (ABM)

$\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$ est un vecteur normal au plan (CDM)

Or $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$, donc (ABM) // (CDM)

Donc, (ABM) = (CDM), car $M \in (ABM) \cap (CDM)$

En particulier $M \in (ABC) = (BCD)$

2) a) $M \in (ABC)$ (contraposée logique)

b) $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$

car $I \in (AB)$

$\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} = 0$

$\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{ID} = 0$ car $I \in (C$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \wedge (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \wedge (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI} \wedge (\underbrace{\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IC}}_{\overrightarrow{CD}})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = 0$

c) $\overrightarrow{MI} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

jeudi, le 12 novembre 2009

15H00 – 18H00

I. Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B.

1) On considère la transformation $T = R_B \circ R_A^{-1}$
   a) Construire le point C image du point A par T.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
   c) En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA.

2) On suppose que le point M décrit le cercle Γ de diamètre [AB].
   a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 décrit par le point M_2 quand M décrit Γ.
   b) Soient ω_1 et ω_2 les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   c) Déterminer l'ensemble décrit par le point I, milieu de $[M_1M_2]$ lorsque M décrit Γ.

(4 points)

II. Soit ABCD un tétraèdre de l'espace tel que $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$

1) Montrer que le tétraèdre est orthocentrique (c'est-à-dire que deux arêtes opposées sont toujours orthogonales)

2) Soient I, J, K, L, M et N les milieux des arêtes [AB], [BC], [CD], [AD], [AC] et [BD].
   Démontrer :
   Les segments joignants les milieux de deux arêtes opposées ont même longueur

3) Démontrer :
   Un tétraèdre est orthocentrique <=> $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{DB}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2$

(4 points)

III. Soit ABC un triangle non aplati quelconque.
Soient I le milieu de [BC], H le barycentre des points pondérés (A,1), (B,–1) et (C,–1) et G l'isobarycentre de A, B et C.

1) Démontrer que les points G, H et I sont alignés et que ABHC est un parallélogramme.

2) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que
$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

(5 points)

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

jeudi, le 12 novembre 2009

15H00 – 18H00

IV. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans le plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Soit A(a, b, c) un point fixe de l'espace n'appartenant pas au plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit C(n, p, 0) un point quelconque de $\mathcal{C}$ et soit $\mathcal{P}_C$ le plan passant par C et perpendiculaire à la droite (AC).

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_C$.

2) Démontrer que tous les plans $\mathcal{P}_C$ ont un point commun I lorsque C décrit $\mathcal{C}$.

(4 points)

V. On considère un cercle $\mathcal{C}$ et un point D extérieur au cercle.

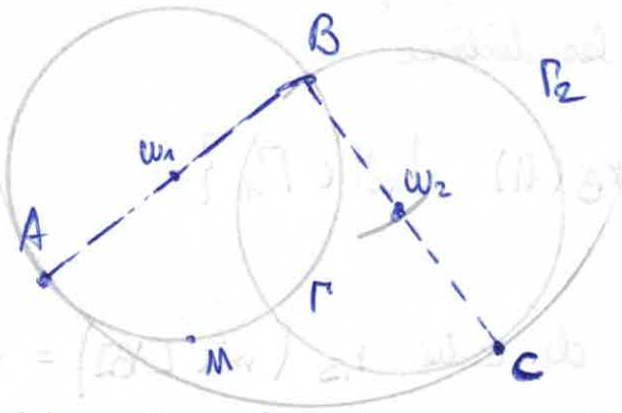
Par D on trace une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B et une tangente au cercle dont on note E le point de contact.

On construit un point G sur AB tel que $\overline{DG} = \overline{DE}$ et tel que G soit intérieur au cercle $\mathcal{C}$.

Montrer que la droite EG est bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$.

(3 points)

Q1



R_A rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

R_B rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) $T = R_B \circ R_A^{-1}$

a) $C = T(A) = R_B \circ R_A^{-1}(A) = R_B(A)$

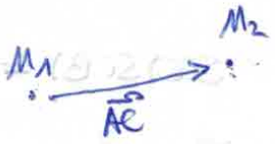
A est l'unique point fixe de R_A

b) R_A^{-1} : rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre A

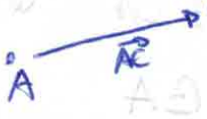
$T = R_B \circ R_A^{-1}$ est une translation.

comme $T(A) = C$ T est la Translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

c) $M_2 = R_B(M) = R_B(R_A^{-1}(M_1)) = T(M_1)$



$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AC}$



M_1M_2CA est un $\#$

2) — M décrit le cercle Γ de diamètre $[AB]$

a) une notation convenue les distances

$$\Gamma_2 = \{ M_2 = r_B(M) \mid M \in \Gamma \}.$$

Γ_2 est le cercle de centre $r_B(\text{mil } [AB]) = \text{mil } [r_B(A), r_B(B)]$
$= \text{mil } [C\ A]$

ou de diamètre $[r_B(A), r_B(B)] = [CB]$

b) $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{Bw_1}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{Bw_2}{BC} \xrightarrow{CAC} \Delta Bw_1w_2 \sim \Delta BAC$$

Ainsi $\dfrac{w_1w_2}{AC} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{w_1w_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $I = \text{mil } [M_1M_2] = \text{mil } [r_A(M), r_B(M)]$

$\overrightarrow{M_2I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

I est l'image de M_2 par la homothétie S de rapport $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{w_2w_1}$

M_2 décrit le cercle Γ_2 et donc I décrit le cercle

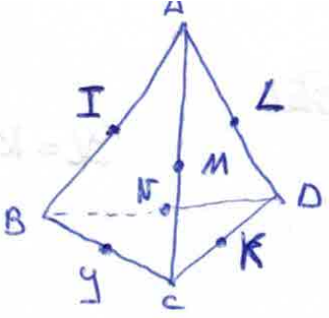
de diamètre $[S(C), S(B)]$ $\quad S(C)S(B) = CB$

S envoie w_2 sur w_1, donc I décrit le cercle de centre

w_1 et de diamètre de longueur $BC = BA$

Ainsi I décrit le cercle Γ.

Q2



1) $\vec{DA}\cdot\vec{DB} = \vec{DB}\cdot\vec{DC} = \vec{DC}\cdot\vec{DA}$

$\vec{BC}\cdot\vec{DA} = (\vec{BD}+\vec{DC})\cdot\vec{DA}$

$= \vec{BD}\cdot\vec{DA} + \vec{DC}\cdot\vec{DA}$

$= -\vec{DB}\cdot\vec{DA} + \vec{DA}\cdot\vec{DB}$

$= 0$

$\vec{AB}\cdot\vec{DC}$

$= \vec{AD}\cdot\vec{DC} + \vec{DB}\cdot\vec{DC}$

$= -\vec{DA}\cdot\vec{DC} + \text{——}$

$= -\vec{DB}\cdot\vec{DC} + \text{——}$

$= 0$

$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = \vec{AD}\cdot\vec{BD} + \vec{DC}\cdot\vec{BD}$

$= \vec{DA}\cdot\vec{DB} - \vec{DC}\cdot\vec{DB}$

$= \vec{DB}\cdot\vec{DC} - \vec{DC}\cdot\vec{DB}$

$= 0$

2) $JL = KI = NM$

$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{KL}$ et $\vec{IL} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \vec{JK}$

$IL = JK$

$IJ = KL$

$IJKL$ est un rectangle

$\Rightarrow$ diagonales de même longueurs

$\Leftrightarrow JL = KI$

$\vec{JI}\cdot\vec{IL} = \frac{1}{2}\vec{AC}\cdot\frac{1}{2}\vec{BD}$

$= 0$

$\vec{KM} = \frac{1}{2}\vec{DA} = \vec{NI}$ $\quad KM = NI$

$\vec{KN} = \frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{MI}$ $\quad KN = MI$

et $\vec{KM}\cdot\vec{KN} = \frac{1}{2}\vec{DA}\cdot\frac{1}{2}\vec{CB}$

$= 0$

$KMIN$ est un rectangle

$\Rightarrow$ diagonales de même longueur

$\Rightarrow MN = IK$

Au total

$$\Omega L = KI = MN$$

3) Si ABCD orthocentrique,

alors $(\vec{AB}-\vec{CD})^2 = \vec{AB}^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{CD}^2$

$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = 0$

$=$

$(\vec{AC}+\vec{CB}-\vec{CD})^2$

$=$

$(\vec{AC}+\vec{DB})^2 = \vec{AC}^2 + 2\vec{AC}\cdot\vec{DB} + \vec{DB}^2$

$\vec{AC}\cdot\vec{DB} = 0$

$(\vec{AC}-\vec{DB})^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AC}\cdot\vec{DB} + \vec{DB}^2$

$=$

$(\vec{AD}+\vec{DC}-\vec{DB})^2$

$=$

$(\vec{AD}+\vec{BC}) = \vec{AD}^2 + 2\vec{AD}\cdot\vec{BC} + \vec{BC}^2$

$\vec{AD}\cdot\vec{BC} = 0$

Au total $\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{DB}^2 = \vec{AD}^2 + \vec{BC}^2$

$\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{DB}^2$

$\Leftrightarrow (\vec{AB}^2 - \vec{AC}^2) + (\vec{CD}^2 - \vec{DB}^2) = 0 \Leftrightarrow (\vec{AB}-\vec{AC})\cdot(\vec{AB}+\vec{AC}) + (\vec{CD}-\vec{DB})\cdot(\vec{CD}+\vec{DB})$

$=$

0

$\Leftrightarrow \vec{CB}\cdot(\vec{AB}+\vec{AC}) + (\vec{CD}-\vec{DB})\cdot\vec{CB} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{CB}\cdot(\vec{AB}+\vec{BD}) + \vec{CB}\cdot(\vec{AC}+\vec{CD}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\vec{CB}\cdot\vec{AD} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{CB}\cdot\vec{AD} = 0$

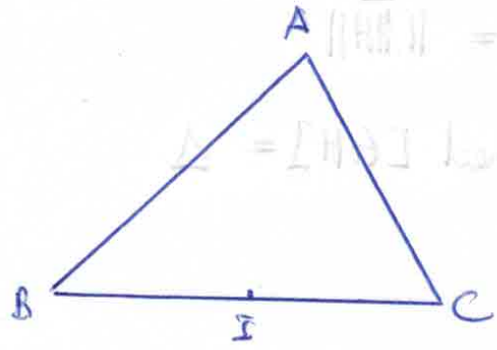
$\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AD}^2 + \vec{BC}^2 \Rightarrow \vec{DB}\cdot\vec{AC} = 0$

$\vec{DC}\cdot\vec{AB} = 0$

$\vec{AC}^2 + \vec{DB}^2 = \vec{AD}^2 + \vec{BC}^2$

Q3

ABC triangle non aplati $\Leftrightarrow$ A, B et C ne sont pas alignés



H barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,-1)$

G isobarycentre de A, B et C.

H barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,-1)$

$\Leftrightarrow$ H barycentre de $(A,1)$, $(I,-2)$

$H \in (AI)$

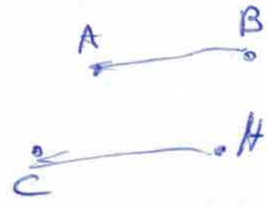
G isobarycentre de A, B et C

$G \in (AI)$ ((AI) est une médiane)

donc G, H et I sont alignés

$\vec{HA} - \vec{HB} - \vec{HC} = 0 \Leftrightarrow \vec{BA} - \vec{HC} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{HC}$ ABHC est un #



2) $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3\|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$ ↓ la barycentre de...

$\Leftrightarrow \|3\vec{MG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}_{\vec{0}}\| = 3\|-\vec{MH}\|$

$\Leftrightarrow \|\vec{MG}\| = \|\vec{MH}\|$

$\Leftrightarrow M \in \text{méd}[GH] = \Delta$

Q4

Repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$A(a,b,c) \notin (O,\vec{i},\vec{j}) \Leftrightarrow c \neq 0$

$C(n,p,0) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow n^2+p^2=1$

$\mathcal{P}_C$ plan passant par C et $\perp (AC)$

1) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} n-a \\ p-b \\ c \end{pmatrix}$

$$\mathcal{P}_C \equiv (n-a)x + (p-b)y + cz + X = 0$$

$$C \in \mathcal{P}_C \Leftrightarrow (n-a)n + (p-b)p + c\cdot 0 = -X$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n^2+p^2}_{1} - an - bp = -X$$

$$\Leftrightarrow X = an + bp - 1$$

$$\mathcal{P}_C \equiv \begin{cases} (n-a)x + (p-b)y + cz + (an+bp-1) = 0 \\ n^2+p^2=1 \end{cases}$$

2) $\frac{\partial}{\partial n}$: $x + a = 0 \Rightarrow x = -a$

$\frac{\partial}{\partial p}$: $y + b = 0 \Rightarrow y = -b$

$(-a, -b, z) \in P_c \Rightarrow a^2 + b^2 + cz = 1$

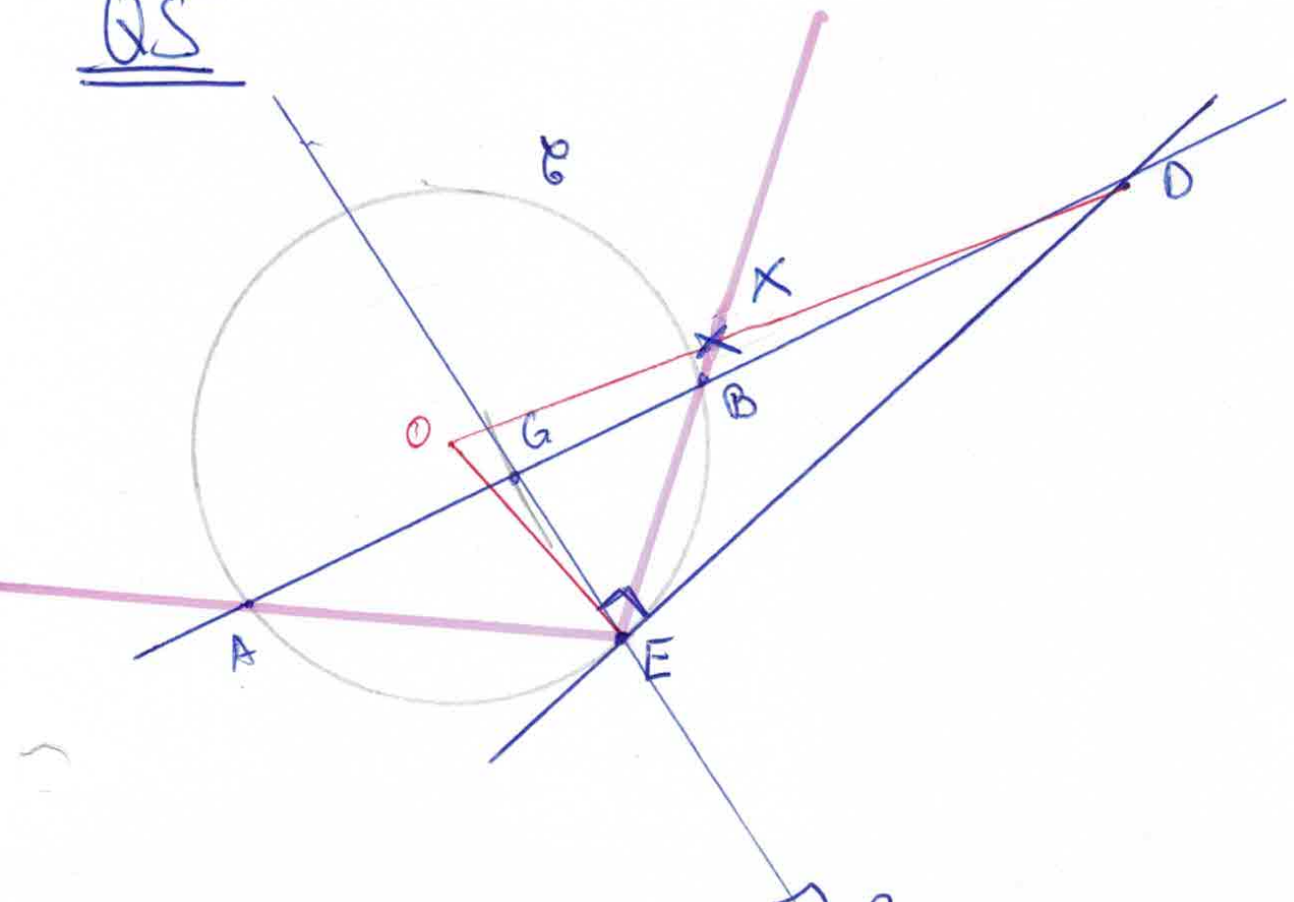
$\Leftrightarrow z = \frac{1 - a^2 - b^2}{c}$

($c \neq 0$ par hyp)

Le point $\left(-a, -b, \frac{1-a^2-b^2}{c}\right) \in P_c$

quelque soient n et p

Q5



(EG) bissectrice de $\widehat{AEB}$?

$$\widehat{EAB} = \frac{1}{2}\widehat{EOB}$$

$\widehat{EAB}$

$$\widehat{AEG} = 180 - \widehat{AGE} - \widehat{EAG}$$

$$= 180 - \widehat{AGE} - \frac{1}{2}\widehat{EOB}$$

$$= \widehat{DGE} - \frac{1}{2}\widehat{EOB}$$ } DGE isocèle en D

$$= \widehat{DEG} - \frac{1}{2}\widehat{EOB}$$

On va prouver que $\frac{1}{2}\widehat{EOB} = \widehat{DEB}$

$$\widehat{DEB} = \widehat{DEX} = 90 - \widehat{XEO}$$ (DE) tangente à C en E

$$= 90 - \widehat{BEO}$$

$$= 90 - \frac{1}{2}(180° - \widehat{EBO})$$ car OBE isocèle en O

$$= \frac{1}{2}\widehat{EBO}$$

D'où $\widehat{AEG} = \widehat{DEG} - \widehat{DEB} = \widehat{BEG}$ (EG) bissectrice de $\widehat{AEB}$

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'algèbre et de probabilité

Lundi, le 27 avril 2009
15h-18h

I. Un élève se rend à son lycée distant de 3km. Il fait le trajet à bicyclette à une vitesse constante de 30km/h. Sur le parcours, il rencontre 5 feux de signalisation non synchronisés.

Pour chaque feu rencontré, la probabilité qu'il soit vert est $\frac{2}{3}$ et la probabilité qu'il soit rouge est $\frac{1}{3}$.

Un feu vert ne ralentit pas l'élève, alors qu'un feu rouge lui fait perdre une minute.

1. Soit T la variable aléatoire « temps en minutes » mis par l'élève pour se rendre à son lycée. Déterminer la loi de probabilité de T.
2. L'élève part 7 minutes avant le début des cours. Quelle est la probabilité d'arriver en retard ?
3. Calculer l'espérance mathématique de T. Quelle est la durée moyenne du parcours sur un grand nombre de trajets ? Déterminer la vitesse moyenne en km/h.

(4 points)

II. Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par:

$$3u_{n+1} + 2u_n = 6$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de u_0.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_n = u_n - \frac{6}{5}$ est une suite géométrique. Calculer sa raison.
3. On donne ici $u_0 = 1$. Calculer v_n et u_n en fonction de n, puis étudier la convergence des deux suites.
4. Calculer la somme : $\sum_{i=0}^{20} v_i$ et en déduire la somme $\sum_{i=0}^{20} u_i$.

(4 points)

III. Résoudre dans C l'équation:

1. $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0$ où α est un réel donné appartenant à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$
2. Soient z_1 et z_2 les deux solutions. Donner suivant les valeurs de α le module et un argument de z_1 et z_2.

(3 points)

IV. Soit la transformation du plan complexe (P) qui a tout point M d'affixe z $(z \neq 2i)$ associe le point M' d'affixe z'=f(z) tel que :

$$f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. Montrer que tout point M sauf un point B que l'on précisera, admet un antécédent unique par f.
2. Déterminer l'ensemble E des points m images de z tels que f(z) soit réel.
3. Déterminer l'ensemble F des points m images de z tels que l'argument de f(z) soit égal à $\frac{\pi}{2}$.
4. Représenter les ensembles E et F sur la même figure.

(4 points)

V.

1. Calculer, pour tout réel x, sin3x en fonction de sinx.
2. Démontrer que : $4 \cdot \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x \quad (x \in \mathbb{R})$
3. Résoudre l'équation : $\sin 3x + 4\sin^2 x - \sin x = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$ Représenter graphiquement les solutions trouvées sur une figure.

(5 points)

Q1

Lycée : distant de 3 km

vitesse constante : 30 $\frac{km}{h}$

5 feux non synchronisés (indép.) 1 feu rouge fait perdre 1 élève 1 minute

V : feu vert $p = P(V) = \frac{2}{3}$

$\bar{V}$: feu rouge $q = P(\bar{V}) = 1-p = \frac{1}{3}$

1. T : « temps en minutes mis par l'élève pour se rendre au son lycée »

Sans feu rouge $T = \frac{3\ km}{30\ \frac{km}{h}} = \frac{1}{10}\ h = 6\ min$

Valeurs possibles pour T : $\Omega = \{6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

$T = 6 + X$ avec X suit une loi binomiale à 5 épreuves avec une probabilité de succès : $q = \frac{1}{3}$ (T augmente si feu rouge)

$P(T=6) = P(X=0) = C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0$

$P(T=11) = C_5^0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^5$

2. L'élève arrive en retard s'il met 8 minutes ou plus.

$$\begin{aligned} P(T \geq 8) &= 1 - P(T<8) \\ &= 1 - P(T=7) - P(T=6) \\ &= 1 - C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 - C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= \frac{131}{243} \\ &\approx 0{,}54 \end{aligned}$$

3. $E[T] = 6 + \overline{5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} = 6 + \frac{5}{3}\ \text{min} = \frac{23}{3}\ \text{min} = \frac{23}{180}\ \text{h}$

$$v_{\text{mey}} = \frac{3\ \text{km}}{\frac{23}{180}\ \text{h}} \approx 23{,}48\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Q2

$3u_{n+1} + 2u_n - 6$ Une IM

1. $3u_1 + 2u_0 = 6 \Leftrightarrow u_1 = 2 - \frac{2}{3}u_0$

$3u_2 + 2u_1 = 6 \Leftrightarrow 3u_2 + 4 - \frac{4}{3}u_0 = 6 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}u_0$

$3u_3 + 2u_2 = 6 \Leftrightarrow 3u_3 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9}u_0 = 6 \Leftrightarrow u_3 = \frac{14}{9} - \frac{8}{27}u_0$

$3u_4 + 2u_3 = 6 \Leftrightarrow 3u_4 + \frac{28}{9} - \frac{16}{27}u_0 = 6 \Leftrightarrow u_4 = \frac{26}{27} + \frac{16}{81}u_0$

2. $v_n = u_n - \frac{6}{5}$ Une SV

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{6}{5} = 2 - \frac{2}{3}u_n - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{3}u_n$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)\left(u_n - \frac{6}{5}\right)$

$= \left(-\frac{2}{3}\right)v_n$

v_n est suite géométrique de raison $\left(-\frac{2}{3}\right)$ et de premier Terme

$v_0 = u_0 - \frac{6}{5}$

déf. explicite $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n v_0$

3. $u_0 = 1$, $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(1 - \frac{6}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

$u_n = v_n + \frac{6}{5}$

$= \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{6}{5}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 + \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

4 $\sum_{i=0}^{20} v_i = v_0 \dfrac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{21}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{21}\right) = -\frac{3}{25}\left(1 - \frac{2^{21}}{3^{21}}\right)$

$\sum_{i=0}^{20} u_i = 21\cdot\frac{6}{5} - \frac{3}{25}\left(1 - \frac{2^{21}}{3^{21}}\right)$

Q3

1. $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0$ $\quad A \in]0;\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi[$

ie. $\cos\alpha \in]-1;0[\cup]0;1[$

$$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2\alpha} < 0$$

$$= \frac{4(\cos^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha}$$

$$= -\frac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= 4i^2\tan^2\alpha$$

$$= (2i\tan\alpha)^2$$

$$z_1 = \frac{2 + i\,2\tan\alpha}{2} = 1 + i\tan\alpha$$

$$z_2 = 1 - i\tan\alpha$$

$$S = \{z_1; z_2\}$$

2. $|z_1| = |\overline{z_1}| = |z_2| = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$

$$= \frac{1}{|\cos\alpha|}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\cos\alpha} & \text{si } \alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[\\ -\frac{1}{\cos\alpha} & \text{si } \alpha \in]\frac{\pi}{2};\pi[\end{cases}$$

Si $\alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[$

$$z_1 = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\arg z_1 = \alpha \ [2\pi]$$

$$z_2 = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$$

$$\arg z_2 = -\alpha \ [2\pi] \quad (\text{donc car } z_2 = \overline{z_1})$$

Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

$$z_1 = -\frac{\Delta}{\cos\alpha}\left(-\cos\alpha - i\sin\alpha\right)$$

$$= -\frac{\Delta}{\cos\alpha}\left(\cos(\pi-\alpha) - i\sin(\pi-\alpha)\right)$$

$$= -\frac{\Delta}{\cos\alpha}\left(\cos(\alpha-\pi) + i\sin(\alpha-\pi)\right)$$

$\arg z_1 = \alpha - \pi$ (2π)

$\left(\arg z_2 = \arg \overline{z_1} = \pi - \alpha\right)$

$$z_2 = -\frac{\Delta}{\cos\alpha}\left(-\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

$$= -\frac{\Delta}{\cos\alpha}\left(\cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)\right)$$

$\arg z_2 = \pi - \alpha$.

Q4

$\forall M(z) \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 2i$,

$$f : z \longmapsto f(z) = \frac{z+1}{z-2i}$$

1. Soit $M(z)$ tel que $z' = \frac{z+1}{z-2i}$ ($M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par f)

alors $z' = \frac{z+1}{z-2i} \iff z'z - 2iz' = z+1$

$$\iff (z'-1)z = 2iz' + 1$$

$$\iff z = \frac{1+2iz'}{z'-1} \quad \forall z' \neq 1$$

Ainsi $\forall z \neq 1$ on a que $f\left(\frac{1+2iz}{z-1}\right) = z$.

donc tout point $M(z)$, à l'exception de $B(1)$, admet un unique antécédent d'affixe $\frac{1+2iz}{z-1}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ avec x la partie réelle de z et y la partie imaginaire.

$$f(z) = \frac{x+iy+1}{x+iy-2i} = \frac{(x+1)+iy}{x+i(y-2)} \cdot \frac{x-i(y-2)}{x-i(y-2)} = \frac{x(x+1) - i(x+1)(y-2) + ixy + y(y-2)}{x^2 + (y-2)^2}$$

$$= \frac{x(x+1)+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} + i\,\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, $f(z) \in \mathbb{R} \iff x(x+1) + y(y-2) = 0$

$$\iff x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$$

$$\iff (x,y) \in \mathcal{C}\left(\left(-\tfrac{1}{2}; 1\right), \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \setminus A(2i)$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, $f(z) \in \mathbb{R} \iff d : y = 2x+2 \iff (x,y)$ appartient à la droite d privée du point $A(2i)$

3. $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}$

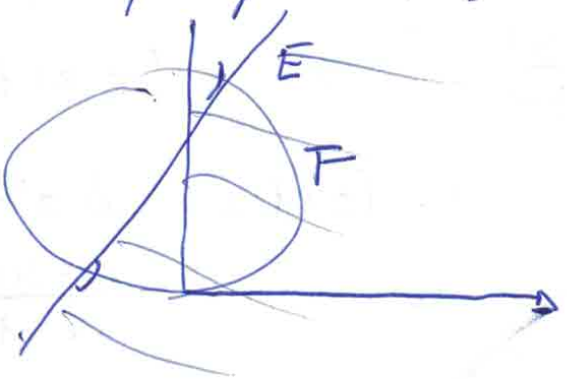
$\Leftrightarrow$ $f(z) \in i\mathbb{R}_+$

$\Leftrightarrow$ $(x,y) \in \mathcal{C} \setminus A(z_i)$ et $2x - y + 2 > 0$

$\Leftrightarrow$ $y < 2x + 2$

ainsi F est la partie du cercle $\mathcal{C}\left(\left(-\frac{1}{2}; 1\right); \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ contenue dans le demi plan d'éq. $y < 2x + 2$.

4.



Q5

1. $\sin 3x = \sin(x+2x)$

$= \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x)$

$= \sin(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) + 2\sin(x)\cos^2(x)$

$= \sin(x)\left(1 - 2\sin^2(x)\right) + 2\sin(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)$

$= -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$

2. $4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \overset{?}{=} \sin(3x)$

$4\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4\sin(x)\,\frac{1}{2}\left(\cos(-2x) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\sin(x)\left(1 - 2\sin^2(x) + \frac{1}{2}\right)$

$= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

$\overset{(1)}{=} \sin(3x)$

3. $\sin 3x + 4\sin^2 x - \sin x = 2$

$\Leftrightarrow -4\sin^3(x) + 3\sin(x) + 4\sin^2(x) - \sin(x) = 2$

$\Leftrightarrow 2\sin^3(x) - 2\sin^2(x) - \sin(x) + 1 = 0$

On va Résoudre $2y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0$

	2	-2	-1	1
1		2	0	-1
	2	0	-1	0

$2y^3 - 2y^2 - y + 1 = (y-1)(2y^2 - 1) = 0$

$= (y-1)(\sqrt{2}y - 1)(\sqrt{2}y + 1) = 0$

ainsi $\sin(2x) + 4\sin^2 x - \sin x = 2$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 1 \quad$ ou $\quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad$ ou $\quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad$ ou $\quad x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad$ ou $\quad x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

ou $\quad x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad$ ou $\quad x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$

$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$\mathcal{S} = \{$ $\}$

Concours de recrutement

18 novembre 2009
15h00 à 18h00

EPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS

Partie 1 : Dénombrement et probabilités (5 points)

On importe de Turquie des escargots qui ressemblent aux escargots de Bourgogne. Au restaurant « Pot à l'ail », le cuisinier a mélangé sur son plat trois escargots de Bourgogne et trois escargots de Turquie. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'escargots de Turquie que le client servi a mangés lorsqu'il saisit le premier escargot de Bourgogne.

1) Etablir la loi de probabilité de X.
2) Calculer E(X) et $\sigma(X)$.
3) Calculer la probabilité pour qu'il mange les trois escargots de Bourgogne en premier.

Partie 2 : Nombres complexes (6 points)

1) Soit à résoudre l'équation complexe $z^3 = |z|^2 + i\sqrt{2}|z|$

   a) Etablir la valeur exacte des nombres trigonométriques $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

   b) Calculer $|z|$ et montrer que cette équation peut être ramenée à l'équation $z^3 = 2 + 2i$

   c) Résoudre cette équation et donner les formes trigonométrique et algébrique des solutions.

2) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - \alpha z^2 + \beta z - 16i$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.

   a) Déterminer α et β sachant que $2i$ est une racine de $P(z)$ et que le reste de la division de $P(z)$ par $z - i$ est $-3\sqrt{3} - 8i$.

   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$

$(2i)^3 + 2\alpha + \beta \cdot 2i - 16i = 0$

Partie 3 : Suites (5 points)

Les flocons de neige (courbe de Von Koch, mathématicien suédois , 1870 – 1924)

On donne un triangle équilatéral dont le côté mesure a cm. A partir de ce triangle, il faut construire des figures successives.

Voici les consignes de construction :

- à chaque étape, à partir de la deuxième,
  - on divise chaque côté de la figure obtenue lors de l'étape précédente en trois segments de même longueur ;
  - ensuite, on construit, sur chaque segment central, un triangle équilatéral, extérieur à la figure précédente;
- la donnée du triangle équilatéral constitue l'étape «0».

On obtient ainsi, par récurrence, une courbe qui ressemble à un flocon de neige et dont les propriétés du périmètre et de l'aire sont très particulières.

On note

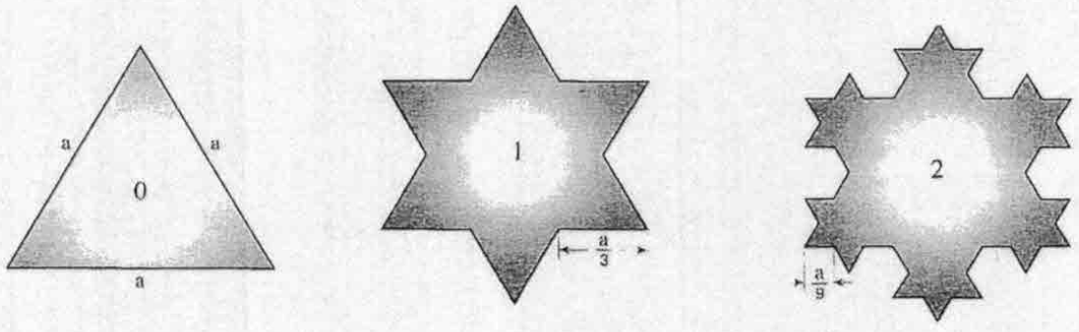
c_n la longueur du côté de la figure obtenue à la $n^{ième}$ étape,

k_n , le nombre de côtés de la figure obtenue à la $n^{ième}$ étape,

p_n, le périmètre de la figure obtenue à la $n^{ième}$ étape,

A_n, l'aire de la figure obtenue à la $n^{ième}$ étape

Voici les figures obtenues lors des étapes «0», «1» et «2» :



1) Etudier la convergence des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n a^2$.
3) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)a^2$.
4) Etudier la convergence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5) Commenter brièvement les résultats trouvés !

Partie 4 : Trigonométrie (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x + \cot x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = -2$

EPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS

Partie 1 : Dénombrement et probabilités (5 points)

1) Le plat est constitué de 6 escargots discernables, et l'ordre joue un rôle. Il y a donc en tout $6! = 720$ éventualités. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

$P(X=0) = P(\text{le client mange d'abord un escargot de Bourgogne}) = \dfrac{3 \cdot 5!}{6!} = \dfrac{1}{2}$

$P(X=1) = P(\text{le client mange d'abord un esc. de Turquie suivi d'un esc. de Bourgogne}) = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 4!}{6!} = \dfrac{3}{10}$

$P(X=2) = P(\text{le client mange d'abord 2 esc. de Turquie suivi d'un esc. de Bourgogne}) = \dfrac{(3 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 3!}{6!} = \dfrac{3}{20}$

$P(X=3) = P(\text{le client mange d'abord les 3 esc. de Turquie}) = \dfrac{3! \cdot 3!}{6!} = \dfrac{1}{20}$

2) $E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i P(X = x_i) = 0 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{3}{10} + 2 \cdot \dfrac{3}{20} + 3 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 P(X = x_i) = 0 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot \dfrac{3}{10} + 4 \cdot \dfrac{3}{20} + 9 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{27}{20} = 1{,}35$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{27}{20} - \dfrac{225}{400} = \dfrac{315}{400} = 0{,}7875$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\dfrac{315}{400}} = \dfrac{3\sqrt{35}}{20} \approx 0{,}887$.

3) Cette probabilité est la même que celle de l'événement $\{X = 3\}$, car il y a exactement 3 escargots de chaque région. On trouve donc $\dfrac{1}{20}$

Partie 2 : Nombres complexes (6 points)

1) $z^3 = |z|^2 + i\sqrt{2}|z|$

a)

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

b) $z=0$ est une solution de l'équation.

$(\forall z\neq 0)\qquad z^3=|z|^2+i\sqrt{2}|z|\Rightarrow|z^3|=\sqrt{|z|^4+2|z|^2}$

$\Leftrightarrow |z|^6=|z|^4+2|z|^2$

$\Leftrightarrow |z|^4-|z|^2-2=0 \qquad \Delta=1+4\cdot 2=9$

$\Leftrightarrow |z|^2=\dfrac{1-3}{2}$ ou $|z|^2=\dfrac{1+3}{2}$

$\Leftrightarrow |z|=\sqrt{2}$

Donc l'équation s'écrit $z^3=2+2i$.

c) $|2+2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$

Donc

$$z^3=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow z_k=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}cis\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}=\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\quad(k\in\{0;1;2\})$$

Ainsi, les solutions non nulles de l'équation sont

$$z_0=\sqrt{2}cis\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{12}}{4}+i\frac{\sqrt{12}-2}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$z_1=\sqrt{2}cis\frac{9\pi}{12}=\sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-1+i$$

$$z_2=\sqrt{2}cis\frac{17\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{12}}{4}-i\frac{\sqrt{12}+2}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\cos\frac{17\pi}{12}=-\cos\frac{5\pi}{12}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{17\pi}{12}=-\sin\frac{5\pi}{12}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2) $P(z)=z^3-\alpha z^2+\beta z-16i,\quad \alpha\in\mathbb{C}$ et $\beta\in\mathbb{C}$

a) Conditions : $\begin{cases}P(2i)=0\Leftrightarrow 2\alpha+\beta i=12i\\ P(i)=-3\sqrt{3}-8i\Leftrightarrow \alpha+\beta i=-3\sqrt{3}+9i\end{cases}$

On trouve $\alpha=3\sqrt{3}+3i$ et $\beta=6+6\sqrt{3}i$ donc $P(z)=z^3-\left(3\sqrt{3}+3i\right)z^2+\left(6+6\sqrt{3}i\right)z-16i$

b) Divisons $P(z)$ par $z-2i$: $P(z)=(z-2i)\left(z^2+\left(-3\sqrt{3}-i\right)z+8\right)$

Résolvons l'équation $z^2+\left(-3\sqrt{3}-i\right)z+8=0\qquad \Delta=-6+6\sqrt{3}i$

Les racines complexes du discriminant sont $\delta_1=-\sqrt{3}-3i$ et $\delta_2=\sqrt{3}+3i$

Donc $z^2+\left(-3\sqrt{3}-i\right)z+8=0\Leftrightarrow z=2\sqrt{3}+2i$ ou $z=\sqrt{3}-i$

Finalement, $S=\left\{2i;\sqrt{3}-i;2\sqrt{3}+2i\right\}$

Partie 3 : Suites (5 points)

1)

$$c_n = a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad k_n = 3\cdot 4^n \qquad p_n = c_n\cdot k_n = 3a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$$

2) $A_0 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$$A_1 = A_0 + \underbrace{3}_{k_0}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\underbrace{\frac{a}{3}}_{c_1}\right)^2 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^0 a^2$$

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + k_n\frac{\sqrt{3}}{4}\left(c_{n+1}\right)^2 \\ &= A_n + 3\cdot 4^n\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left[a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]^2. \\ &= A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n a^2 \end{aligned}$$

3) A démontrer : $\left(\forall n\in\mathbb{N}_0\right)\quad A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)a^2$

a) La propriété est vraie pour n=1 (voir point 2)

b) Supposons que la propriété soit vraie pour un indice quelconque k, et démontrons qu'elle reste vraie pour $k+1$:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k a^2 \qquad \text{par c)} \\ &= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\right)a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k a^2 \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)a^2 \end{aligned}$$

Ainsi, la formule reste vraie pour l'indice $k+1$

c) Comme la formule est vraie pour $k=1$, elle est vraie pour $k=2$, $k=3$, … donc pour tout entier naturel non nul k.

4) $$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{9}{5}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}\right)a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$

5) Le flocon est une surface fractale dont le périmètre tend vers l'infini, tandis que son aire tend vers une limite finie.

Partie 4 : Trigonométrie (4 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\tan x+\cot x+\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}=-2$

CE : $x\neq k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$

$$\tan x+\cot x+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=-2 \quad \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=-2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+\sin x+\cos x=-2\cos x\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=0\ (1) \quad \text{ou} \quad \cos x+\sin x+1=0$$

$$(1)\Leftrightarrow \cos x=-\sin x \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$(2)\Leftrightarrow \cos x+\sin x=-1 \quad \Leftrightarrow \cos x+\tan\frac{\pi}{4}\sin x=-1$$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

Toutes les solutions de l'équation (2) sont à rejeter.

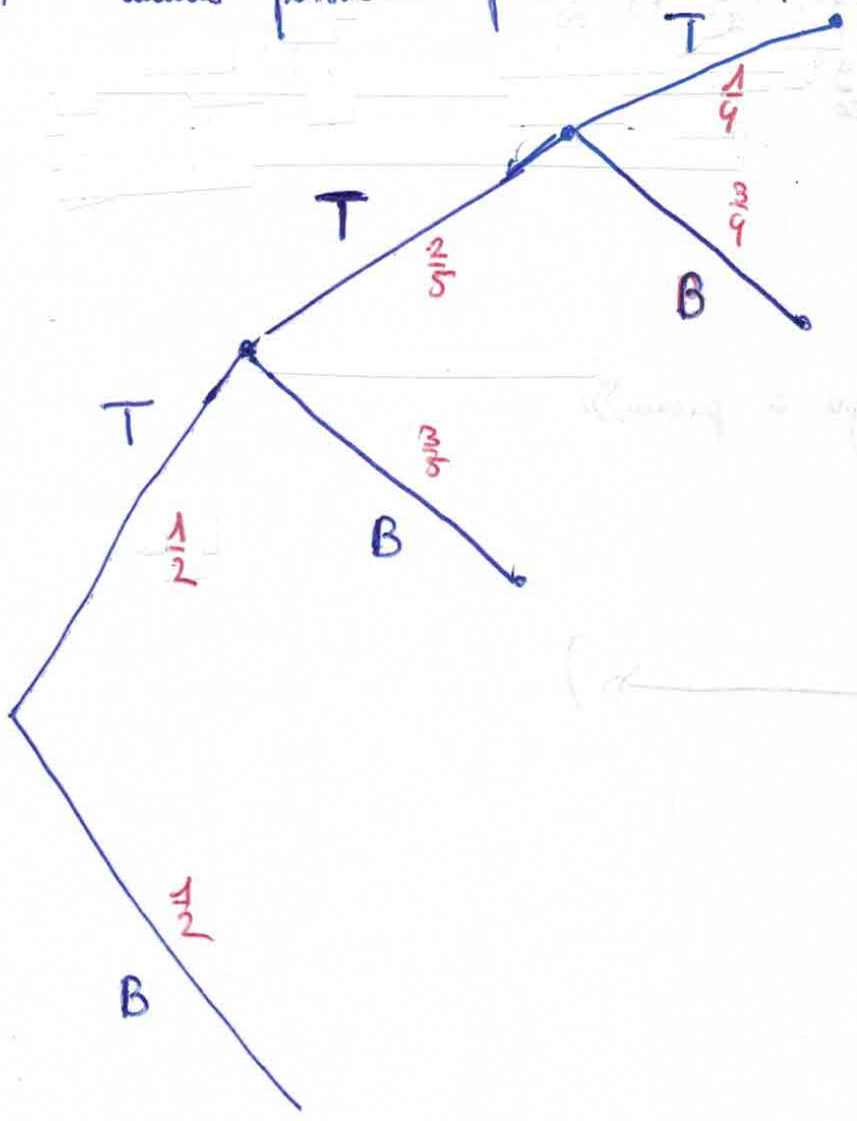
$$S=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Q1

X : nombre d'exemplaires de Tenguie mangés lorsque le client saisit le 1er exemplaire de Bourgogne

3 exemplaires de T et 3 exemplaires de B au un plat

1) Valeurs possibles pour X : $\{0;1;2;3\}$



$\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

2) $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20}$

$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20}$

$= \frac{15}{20}$

$= \frac{3}{4}$

$\sigma(X) = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \sqrt{\frac{27}{20} - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{315}{400}} = \frac{3\sqrt{35}}{20}$

$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{20}$

$= \frac{3}{10} + \frac{3}{5} + \frac{9}{20}$

$= \frac{27}{20}$

3) $\mathbb{P}$ (« 3 escargots de Bourgogne en premier »)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{20}$

$= \mathbb{P}$ (« 3 ——— T ——— »)

Q2

$z^3 = |z|^2 + i\sqrt{2}\,|z|$

a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $z^3 = |z|^2 + i\sqrt{2}\,|z|$

ainsi $|z|^3 = \sqrt{|z|^4 + 2|z|^2}$

ou $|z|^6 = |z|^4 + 2|z|^2$

$\Leftrightarrow |z|^2\left(|z|^4 - |z|^2 - 2\right)$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $|z|^4 - |z|^2 - 2 = 0$

Posons $y = |z|^2 \geq 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (y-2)\underbrace{(y+1)}_{>0} = 0$

$\Leftrightarrow y = 2$

$\Leftrightarrow |z| = 0$ ou $|z| = \sqrt{2}$

Si $|z| = 0$, l'éq. devient $0 = 0$ OK

Si $z \neq 0$, alors l'éq. devient

$$z^3 = \sqrt{2}^2 + i\sqrt{2}\sqrt{2}$$
$$= 2 + 2i$$

c) $z^3 = 2+2i$

Écrivons z sous forme trigonométrique

$$z = r e^{i\theta} \quad (r>0, \theta \in \mathbb{R})$$

ainsi $z^3 = 2+2i \iff r^3 e^{i3\theta} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$$\iff r^3 e^{i3\theta} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} \\ \theta = \frac{\pi}{12} \mod \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + 0\frac{2\pi}{3} \ [2\pi], \ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \ [2\pi], \ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

Ainsi les solutions non nulles de cette équation sont celles de $z^3 = 2+2i$, c-à-d.

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{9\pi}{12}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\cos\frac{17\pi}{12} = \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{6\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{17\pi}{12} = \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2) Posons $P(z) = z^3 - \alpha z^2 + \beta z - 16i$ $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \ \beta \in \mathbb{C}$

a) $P(2i) = 0 \iff -8i + 4\alpha + 2\beta i - 16i = 0$

$P(1) = -3\sqrt{3} - 8i \iff -i + \alpha + \beta i - 16i = -3\sqrt{3} - 8i$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta i = 12i \\ \alpha + \beta i = -3\sqrt{3} + 9i \end{cases} \qquad \beta = 12 - 2\alpha \vec{i} \ \frac{1}{i}$$

$\alpha = 3\sqrt{3} + 3i$

$\beta = 12 + 2\alpha i$

$= 12 + 2(3\sqrt{3} + 3i)i$

$= 12 + 6\sqrt{3}i - 6$

$= 6 + 6\sqrt{3}\, i$

b) $P(z) = z^3 - (3\sqrt{3} + 3i)z^2 + (6 + 6\sqrt{3}i)z - 16i$

$P(2i) = 0$

	1	$-(3\sqrt{3}+i3)$	$6+6\sqrt{3}i$	$-16i$
$2i$		$2i$	$-6\sqrt{3}i+2$	$16i$
	1	$-3\sqrt{3}-i$	8	0

$P(z) = (z - 2i) \cdot (z^2 - (3\sqrt{3} + i)z + 8)$

$\Delta = (3\sqrt{3} + i)^2 - 4 \cdot 8$

$= 27 + 6\sqrt{3}i - 1 - 32$

$= -6 + 6\sqrt{3}\, i$

$x^2 - y^2 = -6$

$2xy = 6\sqrt{3} > 0$

$x^2 + y^2 = 12$

$x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$

$y^2 = 9 \quad y = \pm 3$

$\delta_1 = -\sqrt{3} - 3i \qquad \delta_2 = \sqrt{3} + 3i$

$$z_1 = \frac{3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - 3i}{2} = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = \frac{3\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + 3i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$$

Επομένως $S = \{2i;\ \sqrt{3} - i,\ \sqrt{3} + 2i\}$

Q3

Triangle équilatéral de côté : a cm

$c_0 = a$ cm $\qquad c_1 = \frac{a}{3}$ cm $\qquad c_n = \frac{a}{3^n}$ cm

$k_0 = 3 \qquad k_1 = 12 \qquad k_2 = 48 \qquad k_n = 4^n \cdot 3$

$0 \qquad \Delta_1 = 3 \qquad \Delta_2 = 12 \qquad \Delta_n = 4^{n-1} \cdot 3$ avec $n>$ 1 # de triangles rajoutés

$p_0 = 3a \qquad p_1 = 12 \cdot \frac{a}{3} = 4a \qquad p_n = c_n \cdot k_n = a \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3a$

$h_0 = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow A_0 = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} c_0^2$

2) $A_1 = A_0 + \underbrace{3}_{k_0} \cdot \left(\underbrace{\frac{a}{3}}_{c_1} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{36}} \cdot \frac{1}{2} \right) = A_0 + a_n \cdot \frac{\sqrt{3}a}{12} = A_0 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{3}\right)^2$

$= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 = A_0 + k_0 \frac{\sqrt{3}}{4} c_1^2$

$= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^0 a^2$

$n \to n+1$, on rajoute l'Aire de k_n triangles :

$A_{n+1} = A_n + k_n \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c_n^2$

$A_{n+1} = A_n + 4^n \cdot 3 \left(\frac{a}{3^{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{3^{2n+2}} - \frac{a^2}{4 \cdot 3^{2n+2}}} \cdot \frac{1}{2} \right)$

$= A_n + \frac{4^n}{9^{n+1}} a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= A_n + 4^n \cdot 3 \left(\frac{a}{3^{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4 \cdot 3^{2n+2}}} \cdot \frac{1}{2} \right)$

$= A_n + \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{a^2 3\sqrt{3}}{4 \cdot 9}$

$= A_n + 4^n \cdot 3 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \, 3^{2n+2}} \right)$

$= A_n + \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} a^2$

$= A_n + 4^{n-1} \frac{3\sqrt{3}}{9^{n+1}} a^2$

$= A_n + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3\sqrt{3} \, a^2 \left(\frac{4}{9}\right)^n$

$= A_n + \left(\frac{4}{9}\right)^n \frac{\sqrt{3}}{12} a^2$

1) $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

$\lim_{n\to+\infty} k_n = \lim_{n\to+\infty} 3\cdot 4^n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$

3) $A_0 = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^0 a^2$

$a^0 = 1$

Reprenons que la prop est vraie pour A_n est-elle l'encore pour A_{n+1}

$$A_{n+1} \overset{21}{=} A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n a^2$$

$$\overset{\text{hyp}}{=} A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n a^2$$

$$= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)a^2$$

4) $A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right)$

$$= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}}$$

$$= A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot \frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} A_n = A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{20}a^2 = \frac{8\sqrt{3}}{20}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$

5) Le flocon de neige est une courbe de surface finie, mais de périmètre infini (« paradoxe » bien connu)

Q4

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\tan x + \cot x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = -2$ (*)

C.E. $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}$ $\left\{ x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \right.$

$D = \mathbb{R} \setminus \{ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\frac{\pi}{2}\} \}$

$\forall x \in D$: (*) $\Leftrightarrow$ $\sin^2(x) + \cos^2(x) + \sin(x) + \cos(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

$\Leftrightarrow$ $\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) + \cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sin(x) + \cos(x))^2 + \sin(x) + \cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(\sin(x) + \cos(x))(\sin(x) + \cos(x) + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin(x) = -\cos(x)$ ou $\sin(x) + \cos(x) = -1$

$\Leftrightarrow$ $\sin(x) = \cos(\pi - x)$ ou $\cos(\frac{\pi}{4})\sin(x) + \sin(\frac{\pi}{4})\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\pi - x)$ ou $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{3\pi}{4})$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \pi - x + k2\pi \text{ impossible} & \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} - x = x - \pi + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi & \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\pi + k2\pi \text{ i.e. } \pi + k2\pi & \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \text{ i.e. } -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$



$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{-\frac{\pi}{4} + k\pi\}$

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Mardi, le 20 avril 2010

15h-18h

I. Soit g la fonction définie par $g(x) = -x + \ln|x^2 - 1|$.

1) a) Etudiez g : domaine de définition, parité, branches infinies et asymptotes éventuelles, sens de variation, concavité, tableau de variation, courbe représentative C_g dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

b) Démontrez que pour tout réel k distinct de -1, il existe deux réels distincts x_1 et x_2 appartenant à $\mathrm{dom}\, g$ tels que la pente de la tangente à C_g aux points d'abscisses x_1 et x_2 soit égale à k. Exprimez x_2 en fonction de x_1.

2) Déterminez la primitive de g sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0 après avoir justifié son existence.

5+3= 8 points

II. Pour tout réel $a \in \left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$, on considère la fonction f_a définie par $f_a(x) = xe^{\frac{1}{x+a}}$ et C_a la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

1) Précisez $\mathrm{dom}\, f_a$ et déterminez les asymptotes éventuelles à C_a.

2) Etudiez le sens de variation de f_a et esquissez C_{-2} et C_0.

3) Soit h la restriction de f_0 à $]-\infty;0[$. Démontrez que h définit une bijection de $]-\infty;0[$ sur un ensemble J à préciser. Démontrez que h^{-1} est dérivable sur J. Calculez $\left(h^{-1}\right)'(-e^{-1})$. Indication: On pourra calculer d'abord $h(-1)$.

3+4+2= 9 points

III. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\left(-4x^2+4x\right)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{4x^3-5x^2-2x+3}$.

Déterminez $\mathrm{dom}\, f$ et calculez les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \frac{-3}{4}} f(x)$.

3 points

Q1

$g(x) = -x + \ln|x^2-1|$

C.E. $x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

1) a) $\text{dom } g = \mathbb{R} \setminus \{1;-1\}$

$g(-x) = x + \ln|x^2-1| \neq \begin{cases} -g(x) \\ g(x) \end{cases}$

g est ni paire, ni impaire

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{-x}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln|x^2-1|}_{\to +\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} = -1$

Calcul à part

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1} 2x}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - (-x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln|x^2-1| = +\infty$

$\mathcal{C}_g$ admet une branche parabolique (en $-\infty$) de direction $y = -x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{-x}_{\to -\infty} + \underbrace{\ln|x^2-1|}_{\to +\infty} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x \underbrace{\left(1 + \frac{\ln|x^2-1|}{x}\right)}_{\to 1}$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln|x^2-1|}{x} = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - (-x) = +\infty$

$\mathcal{C}_g$ admet aussi une b. p. (en $+\infty$) de direction $y = -x$

$\lim_{x \to (-1)^-} -x + \ln|x^2-1| = -\infty$ ($x \to -1$, $\ln|x^2-1| \to -\infty$)

$\lim_{x \to (-1)^+} -x + \ln|x^2-1| = -\infty$

A.V d'éq. $x=-1$ et $x=1$

$\text{dom } f' = \text{dom } f$

$\forall x \in \text{dom } f'$,

$$f'(x) = -1 + \frac{2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{-x^2+1+2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{-x^2+2x+1}{x^2-1}$$

Résolvons $-x^2+2x+1=0$

$\Delta = 4+4=8$

$= (2\sqrt{2})^2$

$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	max I_1	$\searrow$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	max I_2	$\searrow$	$-\infty$

$I_1 \left(1-\sqrt{2}\,;\, f(1-\sqrt{2})\right)$ $\quad$ $I_2 \left(1+\sqrt{2}\,;\, f(1+\sqrt{2})\right)$

$\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$$f''(x) = 0 + \frac{2(x^2-1) - 2x(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$\forall x \in \text{dom } f''$, $f''(x) < 0$, f concave vers le bas sur $\text{dom } f$

b) Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, alors $\forall x \in \text{dom } g$

$$g'(x) = k$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x + 1 = k(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k+1)x^2 - 2x + (-k-1) = 0$$

$$\Delta = 4 + 4(k+1)(k+1)$$
$$= 4 + 4(k+1)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{1+(k+1)^2}}{2(k+1)} = \frac{1 + \sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1} \qquad (k \neq -1)$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1} = x_1 - \frac{2\sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1}$$

$x_1 = 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1+(k+1)^2} = k+1$

$\Leftrightarrow 1 + (k+1)^2 = k^2$ avec $k > 0$

$\Leftrightarrow 2k + 2 = 0$

$\Leftrightarrow k = -1$ ainsi $x_1 \neq 1$ car $k \neq -1$

$x_1 = -1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1+\dots} = -k-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+\dots} = -k-2$ avec $-k-2 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq -2$

$\Leftrightarrow 1 + (k+1)^2 = (k+2)^2$ avec $k \leq -2$

$\Leftrightarrow 2k + 2 = 2k + 4$ ↯ ainsi $x_1 \neq -1$

$x_2 = 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+(k+1)^2} = k+1$

$\Leftrightarrow 1 + (k+1)^2 = k^2$ avec $k \leq 0$

$\Leftrightarrow 2k + 2 = 0$

car $k \neq -1$ ↯ ainsi $x_2 \neq 1$

$x_2 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{1+(k+1)^2} = k+2$ avec $k \geq -2$ ↯ ainsi $x_2 \neq -1$

On en déduit que x_1, x_2 et donc $\forall k \neq -1$

2) On va d'abord déterminer une primitive de g sur $]-1;1[$

g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$

ainsi g est continue sur l'intervalle $]-1;1[$

↳ g admet une primitive sur $]-1;1[$

sur $]-1;1[$, $x^2-1<0$

$$\int g(x)\,dx = \int -x + \ln(-x^2+1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + \int \ln(1-x^2)\,dx$$

$\ln(1-x^2)$	1
$\frac{1}{1-x^2}(-2x)$	x

$$= -\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{1-x^2}\,dx$$

$2x^2 \;|\; -x^2+1$

$-2x^2-2 \;|\; -2$

2

$\Rightarrow 2x^2 = -2(-x^2+1) - 2$

$$= -\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x^2) - 2x + \int \frac{2}{1-x^2}\,dx$$

Or $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx$ $\quad a+b=1,\ a-b=0$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + k$$

$k \in \mathbb{R}$

d'où $G(x) = -\frac{x^2}{2} + x\ln(1-x^2) - 2x + \ln|1+x| - \ln|1-x| + k$, $k \in \mathbb{R}$

$G(0)=0 \Leftrightarrow k=0$ la primitive de g sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0

Q2

Soit $a \in]-\infty ; \frac{1}{2}[$

posons $f_a(x) = x\, e^{\frac{1}{x+a}}$

C.E. $x+a \neq 0 \iff x \neq -a$

1) $\mathrm{dom}\, f_a = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{x}_{\to \pm\infty}\ \underbrace{e^{\frac{1}{x+a}}}_{\to 0 \to 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x+a}}}_{\to 0 \to 1} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_a(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} x\, e^{\frac{1}{x+a}} - x$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x+a}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x+a}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+a)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x+a}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{(x+a)^2}}_{\to 1}$$

$$= 1$$

C_{f_a} admet une V.A. d'éq. $y = x + 1$

si $a = 0$: $\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$

$$\lim_{x \to (-a)^+} f_a(x) = \lim_{x \to (-a)^+} \underbrace{x}_{\to (-a)}\ \underbrace{e^{\frac{1}{x+a}}}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to (-a)^-} f_a(x) = \lim_{x \to (-a)^-} x\, \underbrace{e^{\frac{1}{x+a}}}_{\to -\infty} = 0$$

$\lim_{x \to (-a)} f_a(x)$ n'existe pas

Néanmoins, $\mathcal{C}_{f_a}$ admet une asymptote verticale d'éq. $x = -a$

2) On a $\text{dom } f_a' = \text{dom } f_a$

$\forall x \in \text{dom } f_a'$, on obtient

$$f_a'(x) = e^{\frac{1}{x+a}} + x\, e^{\frac{1}{x+a}} \left(-\frac{1}{(x+a)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+a}} \left(1 - \frac{x}{(x+a)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+a}} \frac{x^2 + 2ax - x + a^2}{(x+a)^2}$$

$$= e^{\frac{1}{x+a}} \frac{x^2 + (2a-1)x + a^2}{(x+a)^2}$$

$f_a'(x) = 0 \iff x^2 + (2a-1)x + a^2 = 0$

$\Delta = (2a-1)^2 - 4a^2$

$= -4a + 1$ avec $a \in]-\infty ; \frac{1}{4}[$

$-4a+1 > 0 \iff -4a > -1$

$\iff a < \frac{1}{4}$

$\Delta > 0$, donc 2 solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-2a+1 + \sqrt{-4a+1}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2a+1 - \sqrt{-4a+1}}{2}$$

$x_1 = -a \iff -2a+1 + \sqrt{-4a+1} = -2a$

$\iff \sqrt{-4a+1} = -1$ impossible

$x_1 \geq -a \iff \sqrt{\dots} > -1$ toujours

$x_2 = -a \iff -\sqrt{-4a+1} = -1$

$\iff -4a+1 = 1$ si $a = 0$, $x_2 \overset{=0}{\notin} \text{dom } f_0$

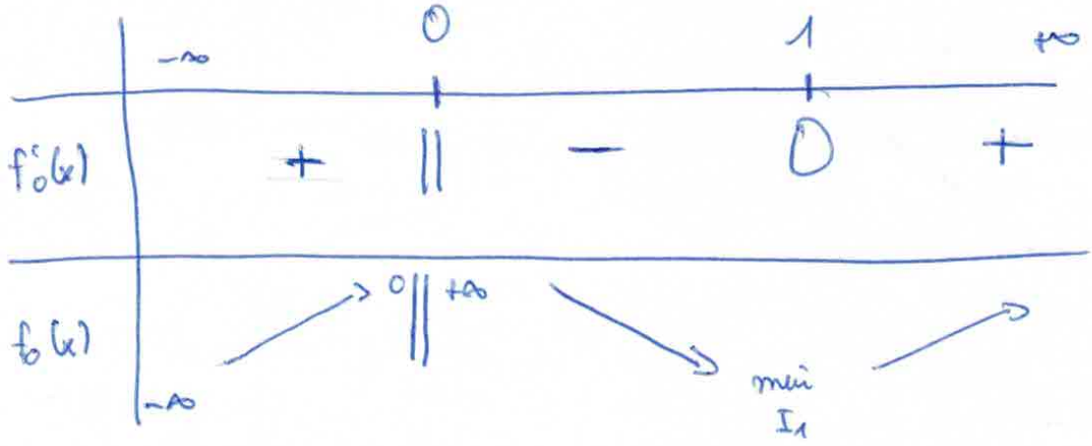
$\iff$

Si $a = 0$,

$f_0'(x) = 0 \iff x = 1$ $\quad (x = 0 \notin \text{dom } f_0)$

---

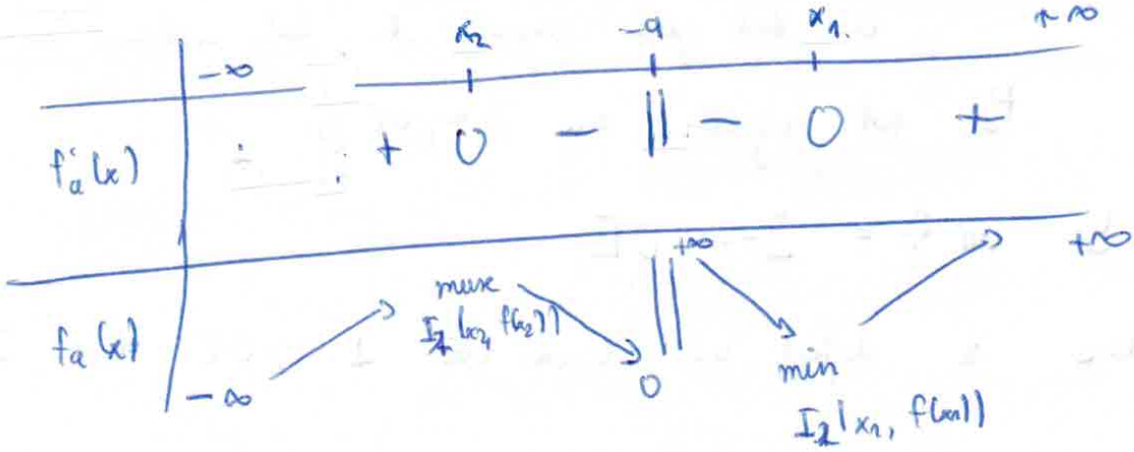
si $a = 0$, $f_0'(x) = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x^2 - x}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x(x-1)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x-1}{x}$



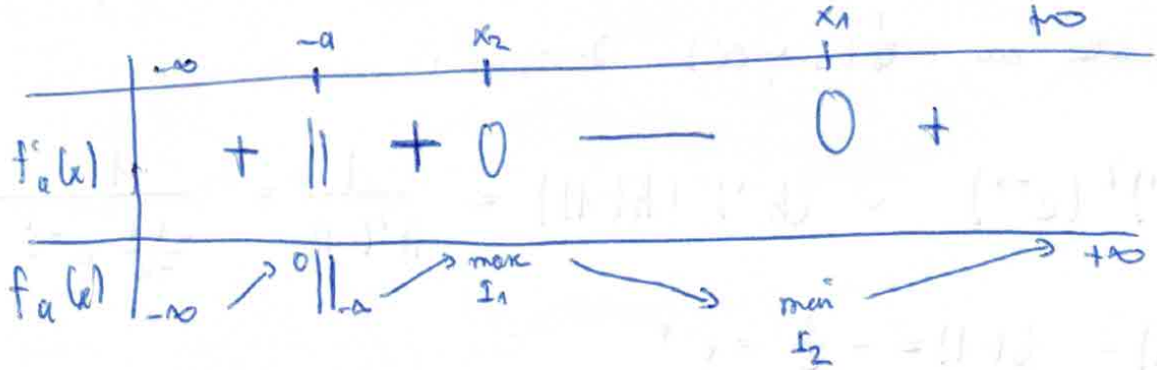
$f_0(1) = 1 e^{\frac{1}{1}} = e$

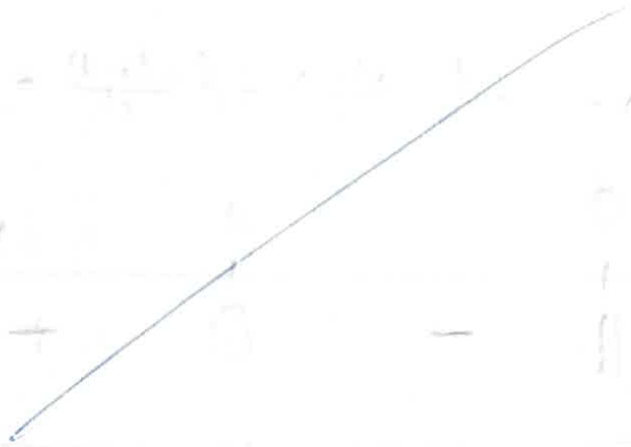
$I_1 (1; e)$

si $a \in]-\infty; 0[$ $\quad$ (rem. on a toujours $x_1 > x_2$ et $x_1 > -a$ $x_2 > -a$ si $a > 0$)



si $a \in]0; \frac{1}{4}[$ $\quad a > 0 \iff -a < 0$





3) $h := f_0|_{]-\infty;0[}$

$\forall x \in]-\infty;0[$

$f_0'(x) > 0$, c'est-à-dire f_0' est strictement croissante

de plus f_0 est continue sur $]-\infty;0[$

et tout ça composé de fct. continues sur $]-\infty;0[$

Ainsi f_0 est injective sur $]-\infty;0[$

Soit $y = \text{im } f_0 =]-\infty;0[$

alors f_0 définit une bijection de $]-\infty;0[$ dans $]-\infty;0[$.

on a que $\forall x \in]-\infty;0[$ $f_0'(x) \neq 0$, et la bijection f_0 est dérivable sur $]-\infty;0[$. Donc la bijection réciproque est dérivable sur $f_0(]-\infty;0[) =]-\infty;0[$.

$$(h^{-1})'(e^{-1}) = (h^{-1})'(h(-1)) = \frac{1}{h'(-1)} = \frac{1}{\frac{-1-1}{-1}e^{-\frac{1}{1}}} = \frac{1}{2}e$$

$h(-1) = f_0(-1) = -\frac{1}{e} = e^{-1}$

Q3

Soit $f(x) = \dfrac{(-4x^2+4x)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{4x^3-5x^2-2x+3}$

Posons $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3$

$P(1) = 4 - 5 - 2 + 3 = 0$

	4	-5	-2	3
1		4	-1	-3
	4	-1	-3	0

$P(x) = (x-1)(4x^2 - x - 3)$

$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$x_1 = \dfrac{1+7}{8} = 1$

$x_2 = \dfrac{1-7}{8} = -\dfrac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{-4x(x-1)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{4(x-1)^2\left(4x+3\right)}$$

$$\lim_{x\to(1)^\pm} f(x) = \lim_{x\to(1)^\pm} \frac{-x\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)} \quad \begin{cases} \to -4 \\ \to 0^\pm \end{cases}$$

$= \mp\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas

$$\lim_{x \to (-\frac{3}{4})} f(x) = \lim_{x \to (-\frac{3}{4})} \frac{-x\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)} \to 0 \quad -\frac{6}{4}+\sqrt{-\frac{3}{4}+\frac{12}{4}}$$

$$= -\frac{6}{4}+\frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} = 0$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to (-\frac{3}{4})} \left(\frac{-2x-\sqrt{x+3}}{(x+\frac{3}{4})+(x-1)} - \frac{x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)}{2x-\frac{1}{4}} \right)$$

$\to 0$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(2+\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{6}{3}+\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{-\frac{7}{4}}$$

$$= -1$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ANALYSE

Mardi, le 9 novembre 2010
15h00 à 18h00

QUESTION I : 12 points

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -xe^{2x+1} & si\ x \leq 0 \\ \left|ln\frac{x+1}{2}\right| - ln2 & si\ x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition, le domaine de continuité et le domaine de dérivabilité de f.

2) Etudier f. (limites, branches infinies, dérivée, concavité, tableau des variations)

3) Construire C_f, la représentation graphique de f, dans un RON. (unité : 2 cm)

4) Soit λ un réel strictement négatif. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre C_f, l'axe des abscisses et les deux droites $x = \lambda$ et $x = 3$.
Calculer en cm^2 la limite de cette aire $\mathcal{A}(\lambda)$ si λ tend vers $-\infty$.

QUESTION II : 4 points

1) Résoudre : $5 \cdot 3^{\frac{3x-4}{2}} - 11 \cdot 3^{x-2} - 13 \cdot 3^{\frac{x-4}{2}} + \frac{1}{3} \leq 0$

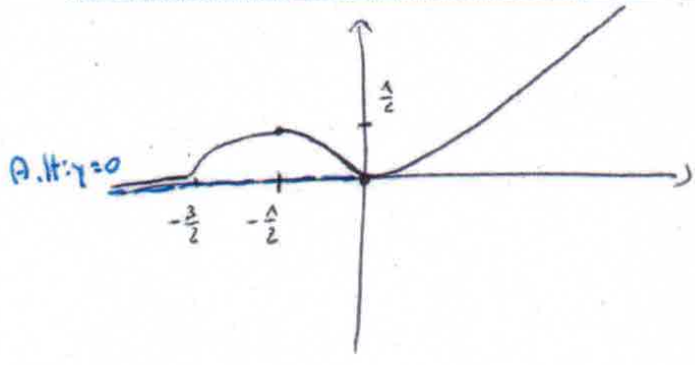
2) Calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sint \cdot ln(1 + sint)dt$ $= \frac{\pi}{2} - \lambda + \ln\lambda = \frac{\pi}{2} - \lambda$

QUESTION III : 4 points

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1) Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
Indiquer les caractéristiques de la bijection réciproque f^{-1} et établir son expression analytique.

2) Indiquer le domaine de dérivabilité de f^{-1}.
Calculer $(f^{-1})'(x)$ et $f'(f^{-1}(x))$, quelle relation y a-t-il entre ces deux expressions ?



Q1

11 Bonus

$$f(x) = \begin{cases} -x e^{2x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ \left|\ln \frac{x+1}{2}\right| - \ln 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \left(\text{c.e. } \frac{x+1}{2} > 0 \Leftrightarrow x > -1\right)$$

$\ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} \geqslant 1 \Leftrightarrow x+1 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

f est continue sur $]-\infty; 0[$ en tant que composée de fonctions continues

f est ——— $]0; +\infty[$ ———

continuité en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left|\ln \frac{x+1}{2}\right| - \ln 2 = |\ln 2| - \ln 2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x e^{2x+1} = 0$$

ainsi $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

il s'ensuit que f est continue en 0

$\text{dom}_c f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{2x+1} - 2x e^{2x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ -\frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -e$

f n'est pas dérivable en 0
$(0; f(0))$ est un point anguleux

dérivable à gauche et à droite mais dérivées ≠

$\lim_{x \to (1)^-} f(x) = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to (1)^+} f(x) = \frac{1}{2}$

$\Big]$ f n'est pas dérivable en 1 ; $(1; f(1))$ est un point anguleux

$\text{Dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left| \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| - \ln 2$

$= +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$

$= 0$

B.P. de direction Ox en $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x\, e^{2x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-2x-1}}$ $\{ \to +\infty$ $\{ \to +\infty$

$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{e^{-2x-1} \cdot (-2)}$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$= 0$

A. H d'éq. $y = 0$.

Dérivée $\forall x \in \text{dom } f'$

$f'(x) = \begin{cases} -e^{2x+1} - 2x\, e^{2x+1} = (-1-2x)\, e^{2x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ -\frac{1}{x+1} & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}$

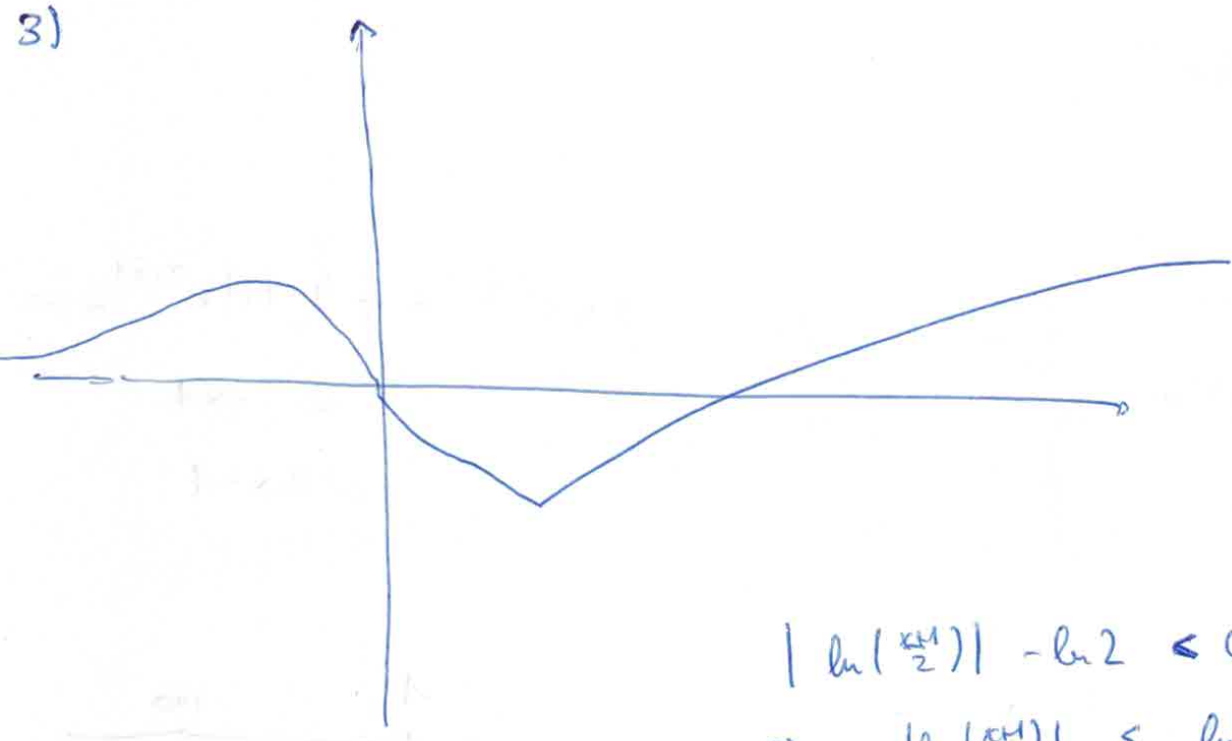
$\text{dom } f'' = \text{dom } f'$

$\forall x \in \text{dom } f''$,

$$f''(x) = \begin{cases} -2e^{2x+1} - 2e^{2x+1} - 4x\, e^{2x+1} = (-4-4x)\, e^{2x+1} & \text{si } x<0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x>1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } 0<x<1 \end{cases}$$

	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	−	‖	−	‖	+			
$f''(x)$	+	0	−		−		‖	+	‖	−	
$f(x)$	0	↗	max	↘		↘	$(0;0)$ point anguleux	↗	$(1; -\ln 2)$ point anguleux	↗	$+\infty$
concavité de f	∪ P.I		∩					∪		∩	

3)



$$\left|\ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right| - \ln 2 \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 3$$

$$\iff \left|\ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right| \leq \ln 2$$

$$\iff \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{x+1}{2} \leq 2$$

4) On sait qu'on regarde la limite en $-\infty$, on peut supposer que $b < 0$, ainsi on a

$$A(b) = \int_b^0 -x e^{2x+1} - \int_0^3 \left(\left|\ln\left[\tfrac{x+1}{2}\right)\right| - \ln 2\right) dx$$

$$= -\int_b^0 x e^{2x+1} + \int_0^1 \ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right) - \int_1^3 \ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right) + \int_0^3 \ln 2$$

x	e^{2x+1}	$\ln\left[\frac{x+1}{2}\right)$	1
1	$\frac{e^{2x+1}}{2}$	$\frac{1}{1+x}$	x

$$= \left[-x\,\frac{e^{2x+1}}{2}\right]_b^0 + \int_b^0 \frac{e^{2x+1}}{2} dx + \left[x \ln\left[\tfrac{x+1}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$$

$$- \left[x \ln\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{x}{1+x} dx + 3\ln 2$$

$$= -0 + b\,\frac{e^{2b+1}}{2} + \left[\frac{e^{2x+1}}{4}\right]_b^0 + 0 - 0 - 3\ln 2 + 3\ln 2 + 0$$

$$- \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx + \int_1^3 \frac{x}{1+x} dx$$

$$= b\,\frac{e^{2b+1}}{2} + \frac{e}{4} - \frac{e^{2b+1}}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx + \int_1^3 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= (2b-1)\,\frac{e^{2b+1}}{4} + \frac{e}{4} - \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_1^3 1\,dx - \int_1^3 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= (2b-1)\,\frac{e^{2b+1}}{4} + \frac{e}{4} - [x]_0^1 + [\ln|x+1|]_0^1 + [x]_1^3 - [\ln|x+1|]_1^3$$

$$= (2b-1)\,\frac{e^{2b+1}}{4} + \frac{e}{4} - 1 + \ln 2 + 2 - \ln 4 + \ln 2$$

$$= (2b-1)\,\frac{e^{2b+1}}{4} + \frac{e}{4} + 1 \quad u.a.$$

$$= 4 \cdot \left(\qquad\qquad \right)$$

$$= (2b-1)\,e^{2b+1} + e + 4 \quad cm^2$$

$$\lim_{b\to-\infty} \Big[\underbrace{(2b-1)}_{\to-\infty}\,\underbrace{e^{2b+1}}_{\to 0} \Big] + e + 4$$

$$\overset{\text{(A)}}{=} \lim_{b\to-\infty} \frac{2}{-2e^{-2b-1}} + e + 4$$

$$= e + 4$$

$A(b) \longrightarrow e+4 \quad$ si $b \to -\infty$

Q2

1)

(I) $\Leftrightarrow 5 \cdot 3^{\frac{3x-9}{2}} - 11 \cdot 3^{x-2} - 13 \cdot 3^{\frac{x-9}{2}} + \frac{1}{3} \leq 0$

Domaine d'étude : $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, (I) $\Leftrightarrow 5 \cdot 3^{\frac{3x}{2}} - 11\, 3^{x} - 13 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-1} \cdot 3^{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow 5\, 3^{\frac{3x}{2}} - 11 \cdot 3^{x} - 13 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 3^{1} \leq 0$

posons $t = \sqrt{3^x} > 0$

$\Leftrightarrow 5 \cdot t^3 - 11 t^2 - 13 t + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow 5 (t+1)(t-\frac{1}{5})(t-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow (t-\frac{1}{5})(t-3) \leq 0$

		$\frac{1}{5}$		3	
$t-\frac{1}{5}$	$-$	0	$+$		$+$
$t-3$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Leftrightarrow t \in [\frac{1}{5}; 3]$

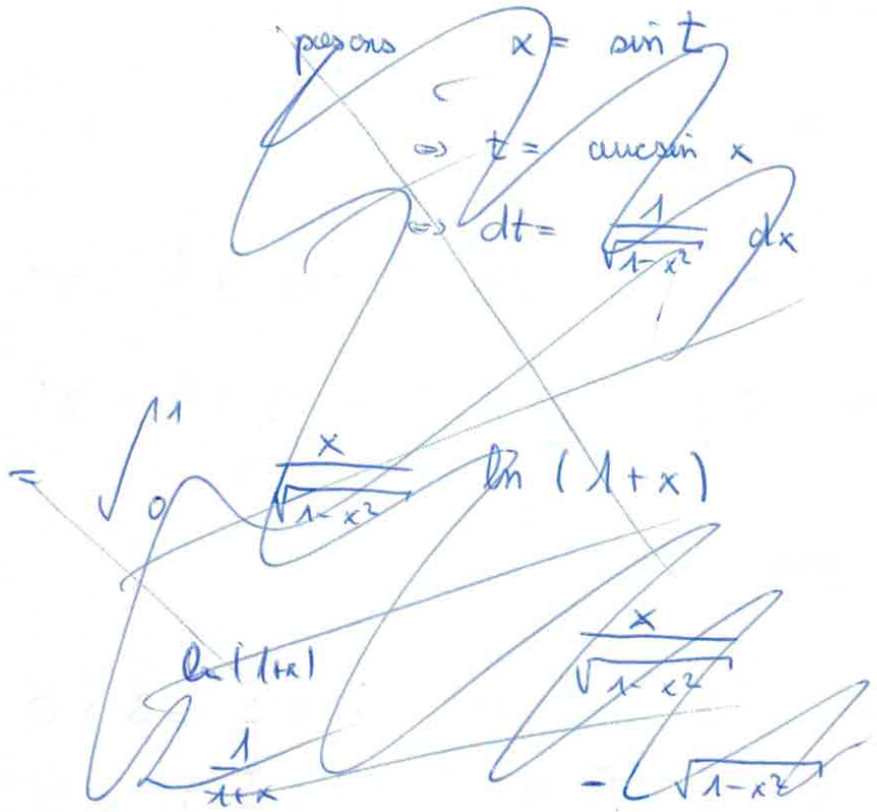
$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq 3^{\frac{x}{2}} \leq 3^{1}$

$\Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{5} \leq \frac{x}{2} \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \log_3 5 \leq x \leq 2$

$S = [-2\log_3 5 ; 2]$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ \ln(1+\sin t)\ dt$



Calcul à part :

$\ln(1+\sin t)$	$\sin t$
$\frac{1}{1+\sin t} \cdot \cos t$	$-\cos t$

$$I = \left[-\cos(t)\ln(1+\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{1+\sin(t)}\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin(t)\,dt$$

$$\left[t+\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} - 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Q3

$\forall x \in]0;+\infty[$, posons $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad dom f = dom f' =]0;+\infty[$

1) $\forall x \in dom f'$

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}_{<0 \text{ sur }]0;+\infty[} < 0$ sur $]0;+\infty[$

f' ne s'annule pas et f strictement décroissante

de plus f est continue sur $]0,+\infty[$, sur $]0;+\infty[$

ainsi f est injective

Il s'ensuit que f est une bijection de $]0;+\infty[$ dans

$\text{im } f =]1,+\infty[= J$.

f^{-1} est une bijection, strictement décroissante, de $]1;+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.

De plus comme f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$,

f^{-1} (la bijection réciproque) est aussi dérivable sur $]1;+\infty[$.

Ainsi f^{-1} est aussi continue sur $]0;+\infty[$

Soit $y, x \in]0;+\infty[$

$y = e^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln y}$

Ainsi $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x} \quad \forall x \in]1;+\infty[$

2) $dom (f^{-1})' =]1,+\infty[$

$\forall x \in dom (f^{-1})', (f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$

$f'(f^{-1}(x)) = -\frac{e^{\frac{1}{f^{-1}(x)}}}{[f^{-1}(x)]^2} = -\frac{e^{\ln(x)}}{x} \quad \ln^2(x) = -x \ln$

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot f'^{-1}(x) = 1$$

Ceci est naturel vu que

$\forall x \in$

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$$

$$\| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$(id)'(x) \qquad\qquad 1$$

$$\|$$

$$1$$

$$f \circ f^{-1} : \quad x \longmapsto x$$

ou $$f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{(f^{-1})'(x)}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

vendredi, le 23 avril 2010

15H00 – 18H00

I. Soient A, B et C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

On pose a = BC, b = CA et c = AB.

1) On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$.
Justifier que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

2) Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}$
   a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer f(O).
   b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
   Montrer que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}\left(b^2 - c^2\right)$. En déduire la valeur de f(G).
   c) Déterminer l'ensemble D des points M du plan tels que f(M) = 0.

(5 points)

II. Soient ABC un triangle équilatéral et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point situé sur l'arc du cercle $\mathcal{C}$ défini par [AC] et qui ne contient pas le point B.

1) Montrer que BM est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.
2) Soit D un point de [BM] tel que $\overline{DM} = \overline{DA}$. Montrer que le triangle DAM est équilatéral.
3) Démontrer : $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB}$.

(5 points)

III. Pour tous les réels a, b et c non simultanément nuls, on considère le plan

$\pi_{abc} \equiv ax + by + cz = 1$

1) Déterminer les conditions sur a, b et c pour que la distance de π_{abc} à l'origine soit égale à 1.
2) Déterminer les conditions sur a, b et c pour que π_{abc} soit parallèle à la droite $d \equiv \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$.
3) Déterminer le lieu géométrique décrit par le point d'intersection de π_{abc} et de la droite perpendiculaire à π_{abc} passant par l'origine, quand les paramètres a, b et c varient dans $\mathbb{R}$ tout en satisfaisant les conditions 1) et 2).

(5 points)

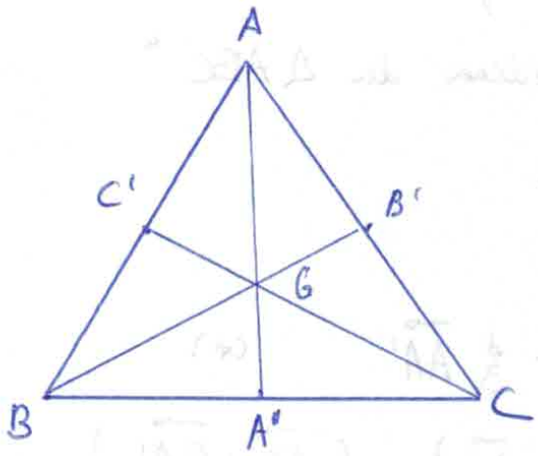
IV. Soit OABC un carré avec $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soient r la rotation de centre B et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, h l'homothétie de centre B et de rapport k = – 2 et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au carré OABC.

1) Construire le centre de la rotation $r_1 = r \circ t$.
2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct avec O(0 ;0) et A(2 ;0)
   a) Chercher les formules analytiques de la transformation composée $f = r \circ t \circ h$.
   b) Chercher les éléments caractéristiques de cette transformation.
   c) Chercher l'équation du cercle $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par la transformation f.

(5 points)

Q1



ABC non équilatéral
et A, B et C non alignés

$a = BC$

$b = AC$

$c = AB$

1) $\vec{u} = a^2 \vec{BC} + b^2 \vec{CA} + c^2 \vec{AB}$

$\vec{u} = 0 \iff a^2 \vec{BA} + a^2 \vec{AC} + b^2 \vec{CA} + c^2 \vec{AB} = 0$

$\iff (c^2 - a^2)\vec{AB} + (a^2 - b^2)\vec{AC} = 0$

Si $c = a$, alors $a \neq b$ (car sinon équilatéral)

et donc $\vec{AC} = 0 \iff A = C$ Donc A, B et C alignés ↯

Si $c \neq a$, alors $\vec{AB} = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}\vec{AC} \iff$ A, B et C alignés ↯

Dans chacun des cas, on obtient une absurdité, ainsi $\vec{u} \neq 0$

2) $\forall M \in \mathbb{R}^2 : f(M) = a^2 \vec{BC}.\vec{MA'} + b^2 \vec{CA}.\vec{MB'} + c^2 \vec{AB}.\vec{MC'}$

a) O le centre du cercle circonscrit $\iff$ O = ∩ des médiatrices du Δ ABC

$f(O) = a^2 \underbrace{\vec{BC}.\vec{OA'}}_{=0} + b^2 \underbrace{\vec{CA}.\vec{OB'}}_{=0} + c^2 \underbrace{\vec{AB}.\vec{OC'}}_{=0}$

$= 0$

b) G, le centre de gravité du ΔABC

" $\Leftrightarrow$ G = $\cap$ des médianes du ΔABC "

$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$$

$$\vec{BC}\cdot\vec{GA'} = \vec{BC}\cdot\frac{1}{3}\vec{AA'}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{BA}+\vec{AC})\cdot\vec{AA'}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{AB}\cdot\vec{AA'} + \frac{1}{3}\vec{AC}\cdot\vec{AA'}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{AB}\cdot\left(\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}\right) + \frac{1}{3}\vec{AC}\cdot\left(\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{CB}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{6}\vec{AB}\cdot\vec{BC} + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{6}\vec{AC}\cdot\vec{CB}$$

$$= \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{6}\left(\underbrace{(\vec{AC}+\vec{AB})}_{2\vec{AA'}}\cdot\vec{BC}\right)$$

$$= \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}\underbrace{\vec{AA'}\cdot\vec{BC}}_{\vec{BC}\cdot\vec{GA'}}$$

D'où $2\,\vec{BC}\cdot\vec{GA'} = \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{3}c^2$

$$\Leftrightarrow \vec{BC}\cdot\vec{GA'} = \frac{1}{6}b^2 - \frac{1}{6}c^2$$

$$f(G) = a^2\,\vec{BC}\cdot\vec{GA'} + b^2(\vec{CA}\cdot\vec{GB'}) + c^2(\vec{AB}\cdot\vec{GC'})$$

$$= \frac{a^2}{6}(b^2 - c^2) + \frac{b^2}{6}\underbrace{(c^2-a^2)}_{\text{par symétrie des produits}} + \frac{c^2}{6}\underbrace{(a^2-b^2)}$$

$$= 0$$

$\Leftrightarrow$ G et O $\in$ (1)

Si $f(M)=0$, alors (1) $a^2\vec{BC}\cdot(\vec{MO}+\vec{OA'})+b^2\vec{CA}\cdot(\vec{MO}+\vec{OA'})+c^2\vec{AB}\cdot(\vec{MO}+\vec{OA'})=0$

$\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{MO}=0 \quad \vec{u}\neq 0$

$\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{MO}$ ou $M=O$

alors (2) $-(\vec{MG}+\vec{GA'})+\ldots$

$\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{MG}$ ou $M=G$

donc si $f(M)=0$ avec $M\neq O$ et $M\neq G$, on a $M\in(OG)$

Réciproquement si $M\in(OG)$, $\vec{MO}=k\vec{OG}$

alors $f(M)=k\,a^2\vec{BC}\cdot\vec{OG}+\ldots$

$\vec{BC}\cdot\vec{OA'}+\vec{BC}\cdot\vec{AG}$

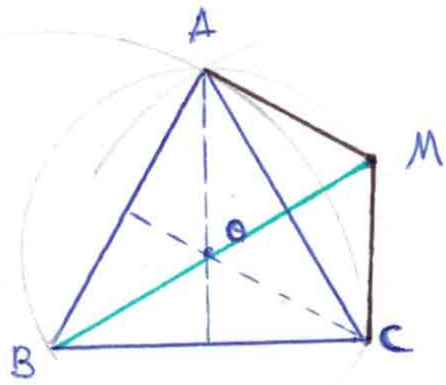
$= k\,f(O)-k\,f(G)$

$= 0-0$

$=0$

$\mathcal{D}=(OG)$

Q2



Dans tout cercle, des angles inscrits interceptant la même corde et situés de part et d'autre de cette corde ont une somme égale à 180°

$\Rightarrow \widehat{AMC} + \widehat{ABC} = 180° \Leftrightarrow \widehat{AMC} = 180° - 60° = 120°$

1) On a que $\widehat{ABC} = 60°$ | Propriétés d'angles dans un cercle

D'où $\widehat{AMC} = 120°$

Il s'ensuit que (BM) est la médiatrice de $\widehat{AMC}$

ou $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 60°$

2) $D \in [BM]$ tq. $DM = DA$

~~autre méthode : tout point de la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés de cet angle~~

Thèse : ΔAM est équilatéral

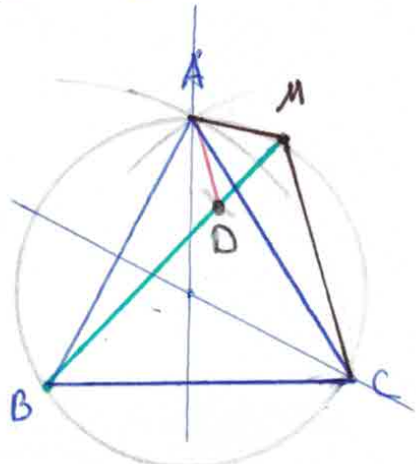
$\widehat{AMD} = \widehat{AMB} = 60°$ car (MB) bissectrice de $\widehat{AMC}$

isocèle et un angle de 60° $\Rightarrow \Delta$ équilatéral

3) $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MD} + \overline{MC} = \overline{MD} + \overline{DB}$

$\Leftrightarrow \overline{MC} = \overline{DB}$

$\overline{MA} = \overline{DM}$ ou $\overline{MA} = \overline{DA}$



$AB = AC$

$\widehat{ABD} = \widehat{ACM}$ (arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$)

$\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = 60°$

$\widehat{CAM} = 60 - \widehat{DAC}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$

ok

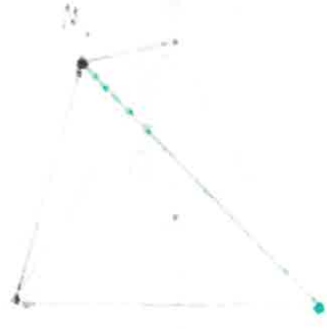
donc $ABD \overset{iso}{\sim} ACM$

et donc $\overline{MC} = \overline{DB}$

$\hat{BMC} = 60° = \hat{BAC}$

$\hat{BMA}$





Q3

Pour $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, considérons $\pi_{abc} : ax+by+cz-1=0$

1) $d(\pi_{abc}, O(0,0,0)) = 1 \iff \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 1$

$\iff \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$

$\iff a^2+b^2+c^2 = 1$

2) vecteur directeur de $d \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = (1;1;1)$$

vecteur normal de π_{abc} : $\vec{n}(a;b;c)$

on veut $\vec{n} \cdot \vec{d} = 0$

$\iff a+b+c=0$

3) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\}$ tq $a+b+c=0$

et $a^2+b^2+c^2=1$

$M(x,y,z) \in \underbrace{\Delta}_{\text{droite } \perp \text{ à } \pi_{abc} \text{ passant par } O} \cap \pi_{abc}$

$\iff \begin{cases} \overrightarrow{OM} \parallel \vec{n}_{abc} \iff \overrightarrow{OM} = k\vec{n}_{abc} \\ ax+by+cz-1=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = ka \\ y = kb \\ z = kc \\ ax+by+cz-1=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = ka \\ y = kb \\ z = kc \\ k\underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{=1} - 1 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases}$

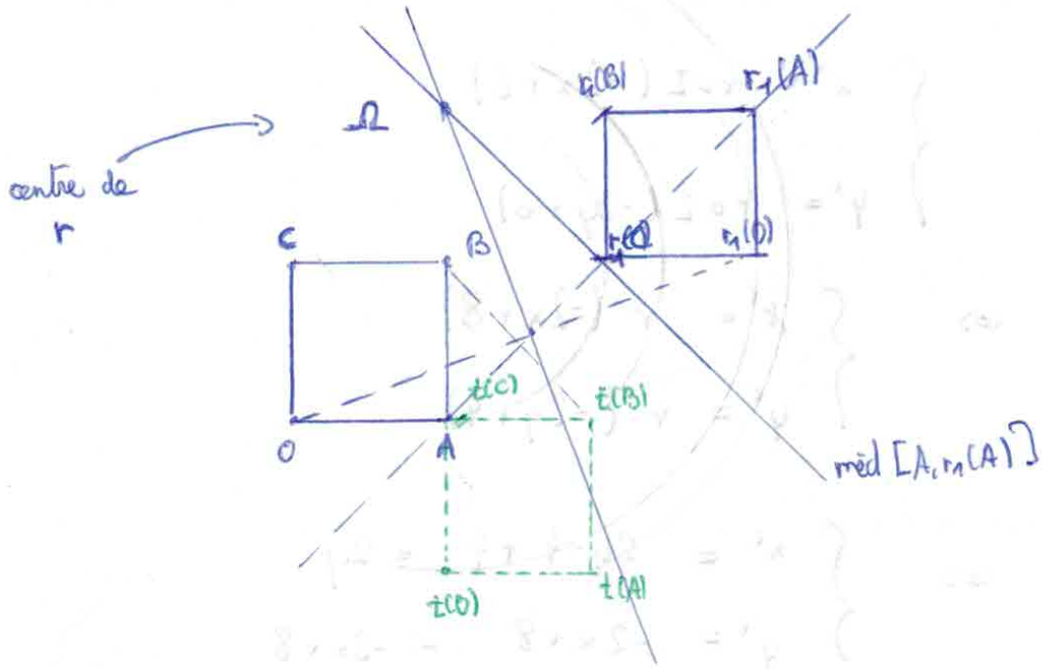
$M(x;y;z) \in \mathcal{C}(O, r=1) \cap \pi\,(x+y+z=0)$

$d(O, \pi) = 0$

ainsi $M(x;y;z)$ appartient au cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1 $\mathcal{C}(O, r=1) \cap \pi\,(x+y+z=0)$

Q4

1)



2) $O(0;0)$ $A(2;0)$ $C(0;2)$ $B(2;2)$ $\vec{CA}\begin{pmatrix}2-0\\0-2\end{pmatrix} = \vec{CA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

expression analytique de r

$$\begin{cases} x'-2 = -(y-2) = -y+2 \\ y'-2 = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y+4 \\ y' = x \end{cases}$$

expression analytique de h

$$\begin{cases} x'-2 = -2(x-2) = -2x+4 \\ y'-2 = -2(y-2) = -2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x+6 \\ y' = -2y+4 \end{cases}$$

expression analytique de t

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-2 \end{cases}$$

a) $f = r \circ t \circ h$

$$\begin{cases} x' = r \circ t(-2x+6) \\ y' = r \circ t(-2y+6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = r(-2x+8) \\ y' = r(-2y+4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2y-4+4 = 2y \\ y' = -2x+8 = -2x+8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x'}{2} \\ \frac{8-y'}{2} = x \end{cases}$$

b)

1) $t \circ h = h_{\Omega', -2}$ avec $\overrightarrow{B\Omega'} = \frac{1}{1-(-2)} \overrightarrow{CA}$

2) $r \circ t = r_{X, \frac{\pi}{2}}$ avec $X = B + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$

ainsi $f = r \circ t \circ h$

$\overset{1)}{=} r \circ h_{\Omega', -2}$

?

$f = r \circ t \circ h$

$\overset{2)}{=} r_{X, \frac{\pi}{2}} \circ h$

$= r_{t(B), \frac{\pi}{2}} \circ h_{B, -2}$

?

c) $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

$\mathcal{C}'$ a pour équation $\left(\frac{8-y'}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x'}{2} - 1\right) = 2$

$\Leftrightarrow (7-y')^2 + (x'-1)^2 = 8$

$\Leftrightarrow (y'-7) + (x'-1)^2 = 8$

$\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

lundi, le 15 novembre 2010

15H00 – 18H00

I. Soit ABC un triangle.

À tout point M du segment [AB] on associe le point M' de la manière suivante :

1°/ BM = CM'

2°/ si M ≠ B, alors A, C et M' sont alignés dans cet ordre.

Soit I le point d'intersection des médiatrices de [AA'] et de [BB'].

1) Démontrer que les triangles ABI et A'CI sont isométriques.

2) Démontrer que les triangles IBM et ICM' sont isométriques.

3) En déduire que la médiatrice de [MM'] passe par un point fixe lorsque M décrit le segment [AB].

(4 points)

II. Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. a, b et c désignent les longueurs des côtés du triangle et k un réel positif.

1) Caractériser le lieu géométrique L_k des points M défini par :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=k\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

2) Dans le cas où le triangle ABC est équilatéral, déterminer la valeur du réel k pour que L_k soit le cercle circonscrit au triangle.

(5 points)

III. 1) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur à $\mathcal{C}$. Soient P et Q les points de contact des tangentes menées par un point A extérieur au cercle $\mathcal{C}$. Montrer que les points A, O, P et Q sont cocycliques.

2) Soit un triangle ABC rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A. Notons E, F et G les milieux de ses côtés. Démontrer que les points E, F, G, A et H sont cocycliques.

3) Démontrer que 4 points A, B, C et D du plan sont cocycliques si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\ [\pi]$.

(6 points)

IV. Soit ABCD un rectangle de centre O et de cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

On note f la transformation du plan qui à tout point M associe le point M_1 tel que

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$

et g la transformation du plan qui à tout point M associe le point M_2 tel que

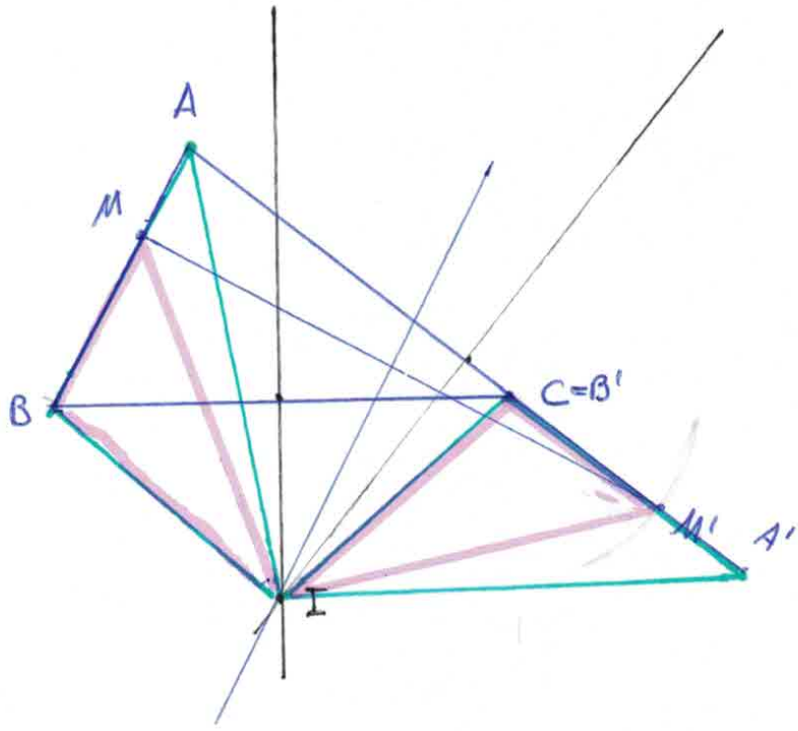
$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MA}$$

1) Démontrer que f est une homothétie et g une translation.

2) On suppose que M décrit le cercle $\mathcal{C}$. Déterminer le lieu de M_1 et de M_2.

(5 points)

Q1



1) $AB = A'C$ par construction

$I \in$ médiatrice de $[BB']$ car. $IB = IB'$

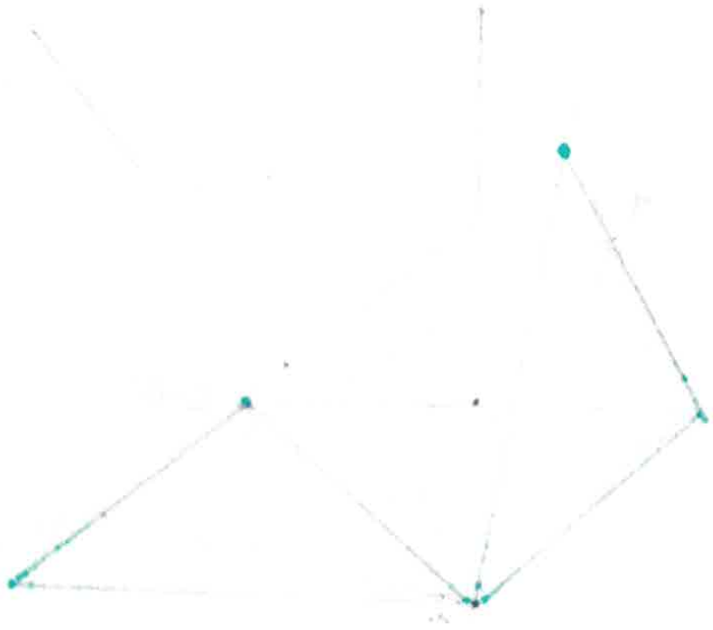
$I \in$ médiatrice de $[AA']$ car. $IA = IA'$

Par le critère CCC, on conclut que ABI et $A'CI$ sont isométriques

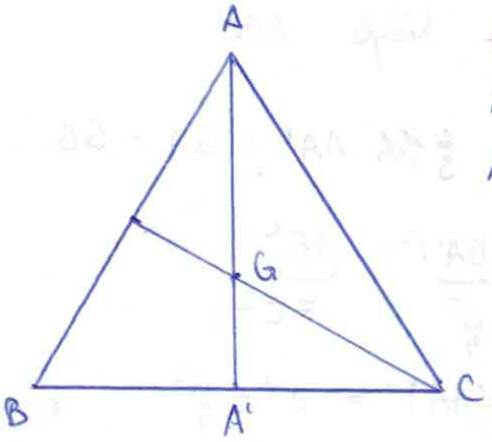
2) $BM = CM'$
$IB = IB'$
et $\widehat{MBI} = \widehat{MCI}$ on peut 1) } par le critère CAC, on conclut que IBM et ICM' sont isométriques

3) $IBM \overset{\text{isom.}}{\sim} ICM' \Rightarrow IM = IM'$

d'où $I \in$ méd $[MM']$



Q2



$BC = a$

$AB = c$

$AC = b$

$k \geq 0$

1) $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = k \quad \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$ (*)

on a $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

(*) $\Leftrightarrow (\vec{GA} - \vec{GM}) \cdot (\vec{GB} - \vec{GM}) + (\vec{GB} - \vec{GM}) \cdot (\vec{GC} - \vec{GM}) + (\vec{GC} - \vec{GM}) (\vec{GA} - \vec{GM}) =$

$\Leftrightarrow \vec{GA} \cdot \vec{GB} - \vec{GA} \cdot \vec{GM} - \vec{GM} \cdot \vec{GB} + \vec{GM}^2$
$+ \vec{GB} \cdot \vec{GC} - \vec{GB} \cdot \vec{GM} - \vec{GM} \cdot \vec{GC} + \vec{GM}^2$
$+ \vec{GC} \cdot \vec{GA} - \vec{GC} \cdot \vec{GM} - \vec{GM} \cdot \vec{GA} + \vec{GM}^2$

car $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

$= \dots$

$\Leftrightarrow 3\vec{GM}^2 + \vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot (-\vec{GA} - \vec{GB}) + (-\vec{GA} - \vec{GB}) \cdot \vec{GA} = \dots$

$\vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB}$

$\Leftrightarrow 3\vec{GM}^2 - \vec{GB}^2 - \vec{GA}^2 - \vec{GB} \cdot \vec{GA} = \dots$

$\Leftrightarrow \vec{GM}^2 = \frac{1}{3} \left(\underbrace{k \frac{a^2+b^2+c^2}{6}}_{\text{car}} + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GA} \cdot \vec{GB} \right) \dots$

si (*) > 0 cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\dots}$

(*) $= 0$ point G

(*) < 0 ensemble vide

2) $\mathcal{L}_k$ cercle circonscrit au triangle ABC

ssi rayon de $\mathcal{L}_k$ vaut $\frac{2}{3}$ AA' = GA = GB

ou $(AA')^2 + \underbrace{(BA')^2}_{\frac{a^2}{4}} = \underbrace{AB^2}_{=c^2}$

$\Leftrightarrow \quad (AA')^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} \qquad c=a$

$= \frac{3a^2}{4}$

$AA' = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\widehat{BCA} = 60° \rightarrow \widehat{BGA} = 120°$

$3GM^2 = k\,\frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \cos 120°$

$= k\,\frac{a^2}{2} + \frac{3}{9}a^2 + \frac{3}{9}a^2 + \frac{3}{9}a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= k\,\frac{a^2}{2} + \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{18}a^2$

$= k\,\frac{a^2}{2} + \frac{9}{18}a^2$

$= k\,\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}$

$= (k+1)\,\frac{a^2}{2}$

$3GM^2 = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{3}a^2 = a^2$

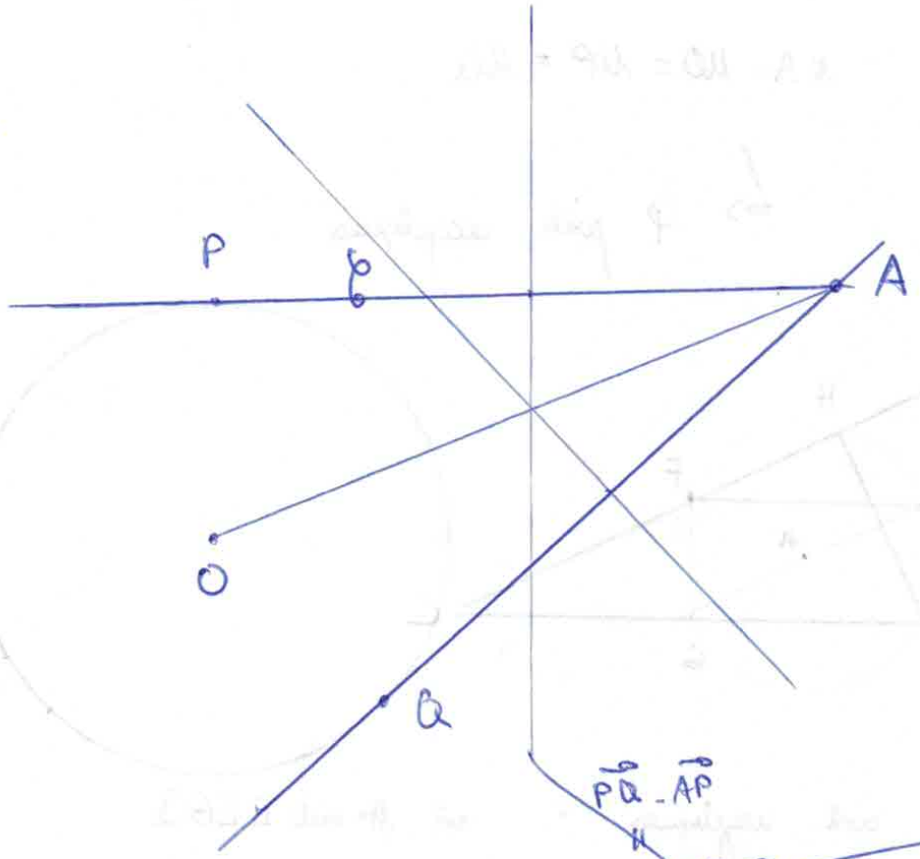
$\Leftrightarrow \quad (k+1)\,\frac{a^2}{2} = a^2$

$\Leftrightarrow \quad k+1 = 2$

$\Leftrightarrow \quad k = 1$

Q3

1)



$\mathcal{P} = (OQ)$

et $(OP) \perp (PA)$
$(QQ) \perp (QA)$

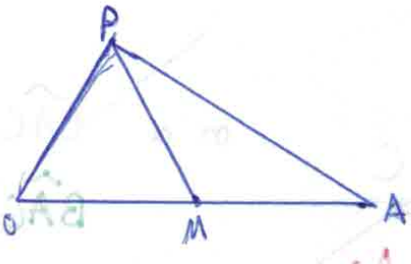
$AP = AQ$

$\vec{PQ} \cdot \vec{AP}$
=
$\vec{OP} \cdot \vec{AP} + \vec{OQ} \cdot \vec{AP}$
//
$\vec{QP} \cdot \vec{QA}$ $\quad$ $\vec{OQ} \cdot \vec{AP}$ $\quad$ $\vec{OA} \cdot \vec{PQ}$
=
$\vec{OQ} \cdot \vec{QA} + \vec{QP} \cdot \vec{PA}$ $\quad$ $(\vec{OQ} + \vec{QA}) \cdot (\vec{PA} + \vec{AQ})$
=
$\vec{QP} \cdot \vec{PA}$ $\quad$ = $\vec{OQ} \cdot \vec{PA} + \vec{QA} \cdot \vec{PA} + \vec{QA} \cdot \vec{AQ}$
=

Soit M = mil $[AO]$, alors

$MA = MO$

et $MP = MQ$ (car médianes de 2 triangles isométriques)



d'où $MP = MO$

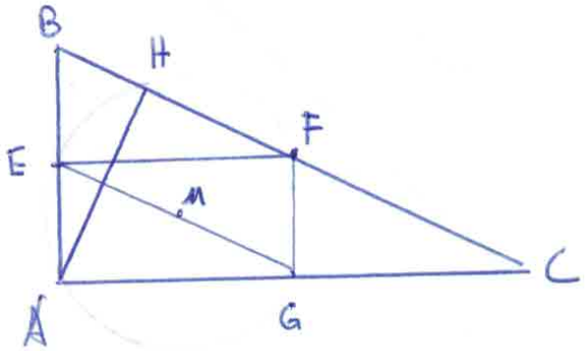
APO triangle rectangle en P $\Rightarrow$ milieu de l'hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit

$\Rightarrow MO = MP$

Au total $MA = MD = MP = MQ$

↳ $\mathcal{C}$ petit cercle

2)



E, F, G sont cocyclique : soit M = mil [EG]

alors E, F, G sur le cercle de centre M et de rayon

$MF = MG = ME$

Il est clair que $MA = ME$, car EFGA est un rectangle.

a-t-on $MH = ME$?

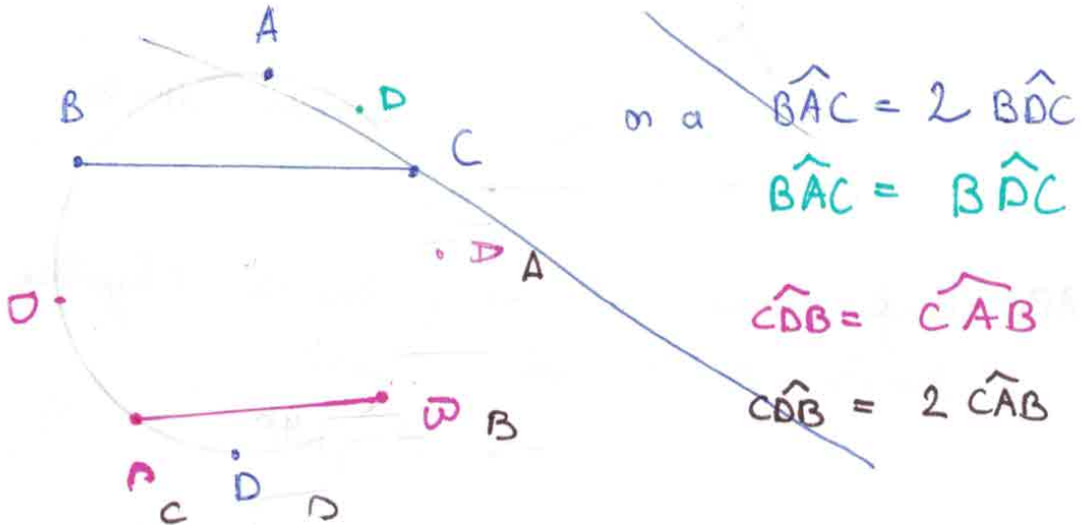
oui, car Δ AHF rectangle en H

M = mil [AF] avec [AF] l'hypoténuse

d'où $MA = MH$.

ainsi $MA = MH = MF = ME = MG$

3)



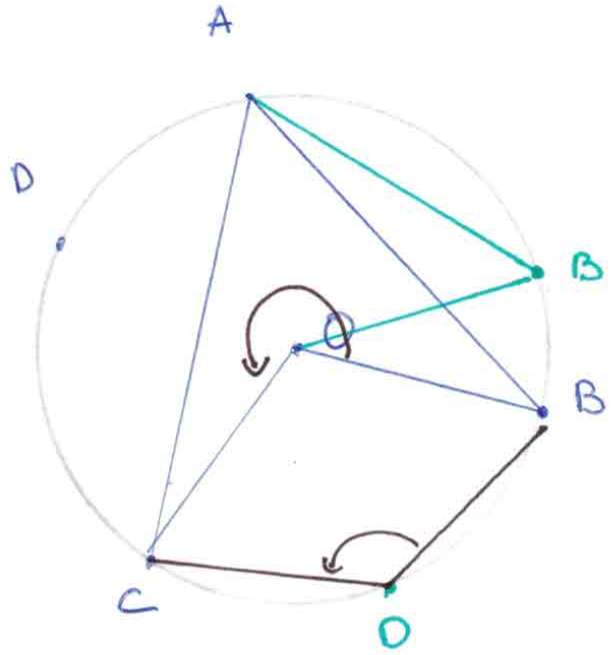
on a $\widehat{BAC} = 2\,\widehat{BDC}$

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

$\widehat{CDB} = \widehat{CAB}$

$\widehat{CDB} = 2\,\widehat{CAB}$

3)

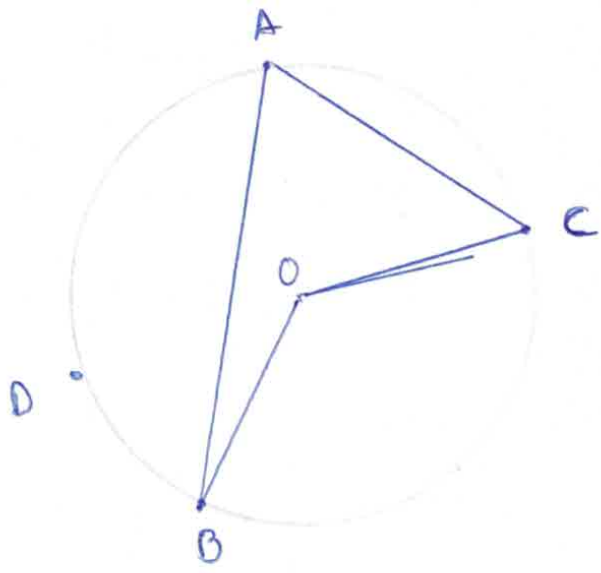


$2(\vec{AC}, \vec{AB}) = (\vec{OC}, \vec{OB})\ (2\pi)$

$2(\vec{DC}, \vec{DB}) = (\vec{OC}, \vec{OB})\ (2\pi)$

$2(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{OB}, \vec{OC})\ (2\pi)$

$2(\vec{DB}, \vec{DC}) = (\vec{OB}, \vec{OC})\ (2\pi)$



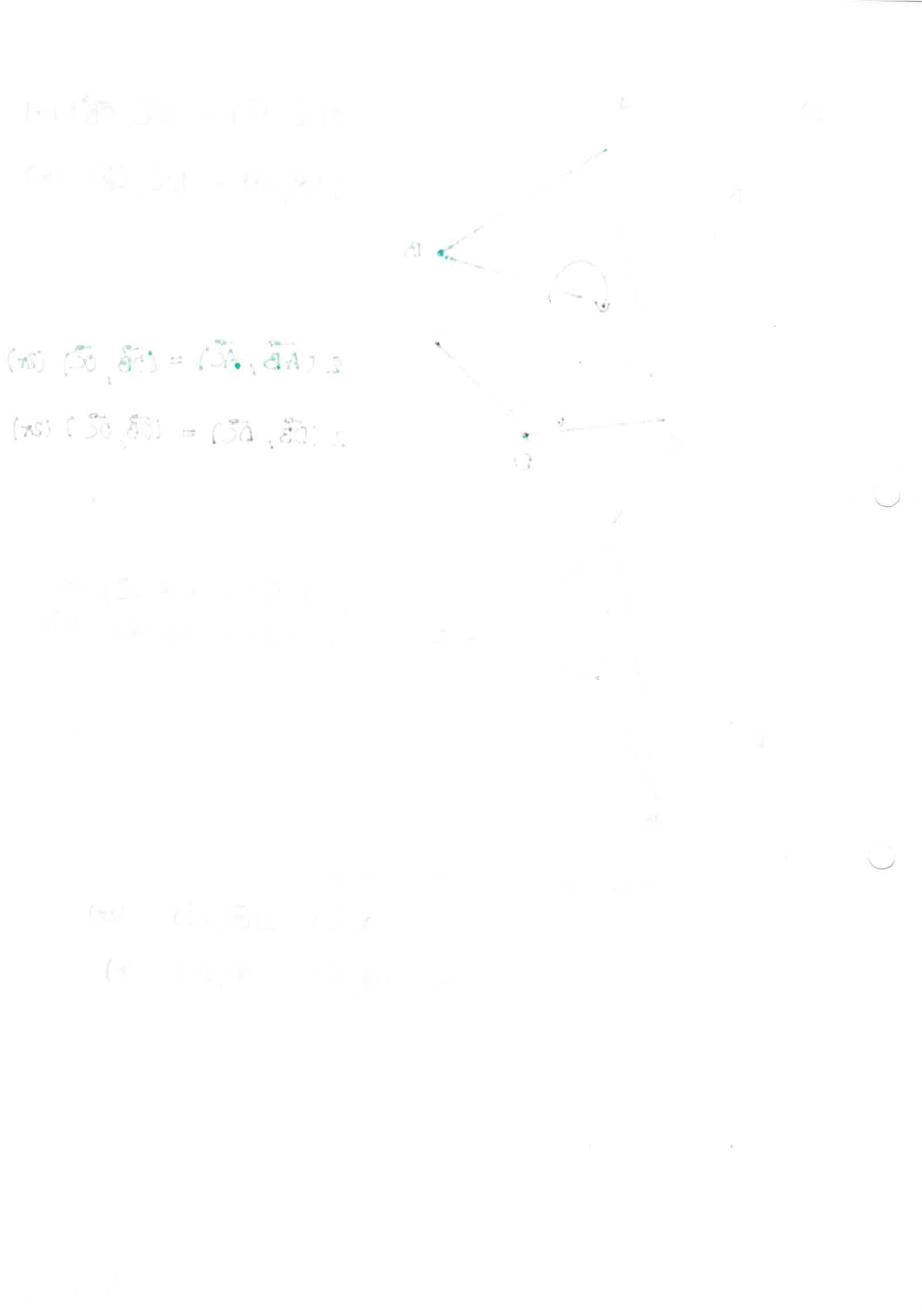
$2(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{OB}, \vec{OC})\ (2\pi)$

$2(\vec{DB}, \vec{AC}) = (\vec{OB}, \vec{OC})\ (1)$

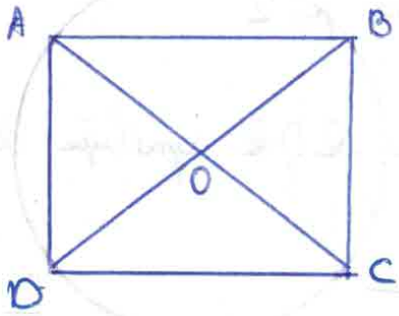
Dans toutes les situations on a

$2(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2(\vec{DB}, \vec{DC})\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{DB}, \vec{DC})\ (\pi)$



Q4



f : $\vec{MM_1} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$

$= \vec{MO} + \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OC}$

$= 3\vec{MO} + \vec{OB}$

g : $\vec{MM_2} = \vec{MB} + \vec{MD} - 2\vec{MA}$

$= \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OD} - 2\vec{MO} - 2\vec{OA}$

$= -2\vec{OA}$

$= 2\vec{AO}$

$= \vec{AC}$

1) $\vec{MM_1} = 3\vec{MO} + \vec{OB}$) translation ∘ homothétie = homothétie (si rapport ≠ 1)

$\Leftrightarrow \vec{OM_1} = 2\vec{MO} + \vec{OB}$

$= -2\vec{OM} + \vec{OB}$

Soit $\vec{OO'} = \frac{1}{1+2}\vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{OB}$

alors $\vec{OO'} + \vec{O'M_1} = -2\vec{OO'} - 2\vec{O'M} + 3\vec{OO'}$

$\Leftrightarrow \vec{O'M_1} = -2\vec{O'M}$

homothétie de centre O' (avec $\vec{OO'} = \frac{1}{3}\vec{OB}$)

et de rapport -2

2) $\vec{MM_2} = \vec{AC}$

Translation de vecteur $\vec{AC}$

2) M_1 décrit le cercle de centre Ω $(\vec{i}, \vec{OB})$

et de rayon OB multiplié par 2

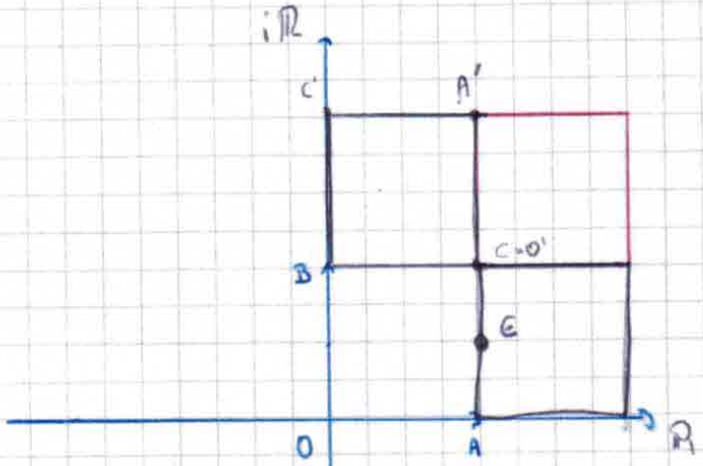
M_2 décrit le cercle de centre Ω_1 le symétrique de O par rapport à C,

et de rayon OB

Thm $\vec{\Pi J} = \frac{1}{2}\vec{\Pi N}$

$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AD}$

$\vec{IJ}$ $\vec{IA} + \vec{A\Pi} + \vec{\Pi I} + \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{DA} + k\cdot\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{\Pi N} + \vec{LI} + \vec{IJ}$



$r_B = r\left(B; \frac{\pi}{2}\right)$

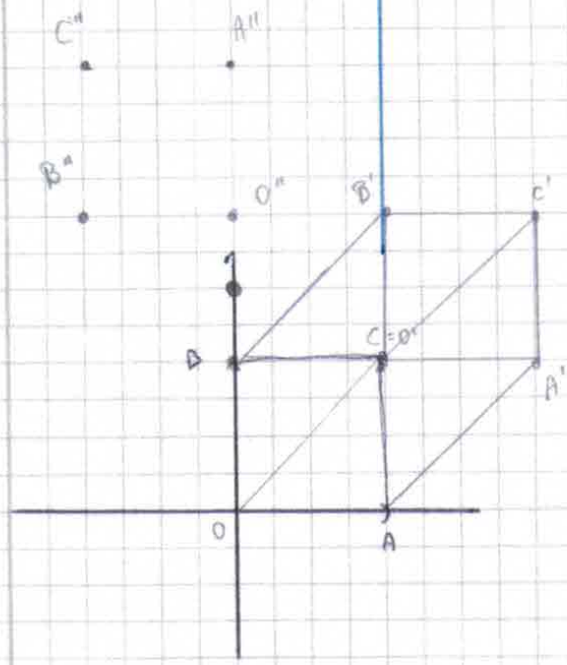
$S = S(C)$

$t = t(\vec{OC})$

$E = \lambda + \frac{\lambda}{2}i$

$z -$

$F = \frac{3}{2}i$



$-\lambda$

$r_\lambda : z' = e^{i\pi}(z - (\lambda + \frac{1}{2}i)) + (\lambda + \frac{1}{2}i)$

$z' = -z + (\lambda + \frac{1}{2}i) + (\lambda + \frac{1}{2}i)$

$z' = -z + (2 + i)$

$r_2 : z' = -\lambda\left(z - \frac{3}{2}i\right) + \frac{3}{2}i$

$= -z + 3i$

$z'' = a'(az + b) + b'$

$= a'(-z + (2+i)) + b'$

$= -a'z + 2a' + a'i + b' = -z + 3i$

$\Rightarrow a' = \lambda \qquad -2 + 2 + i \qquad \Rightarrow b' = 2i - 2$

$\Rightarrow r : z' = z + 2(i - \lambda)$

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'algèbre et de probabilité

27 avril 2010
15h-18h

I. Si A et B sont deux évènements, p(A) désigne la probabilité de l'évènement A et $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. La variable aléatoire définie par le nombre de clients qui se présentent dans une station-service en cinq minutes est notée X et la loi de probabilité $p_i = p(\{X = i\})$ s'écrit :

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7, celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant des autres clients.
Soient les évènements suivants :
C_1 « en cinq minutes, un seul client se présente »
C_2 « en cinq minutes, deux clients se présentent »
E « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence »

Calculer :
a) $p(C_1 \cap E)$
b) $p_{C_2}(E)$ puis $p(C_2 \cap E)$
En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. On considère la variable aléatoire Y égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes. Déterminer la loi de probabilité de Y.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(6 points)

II. Soit f la fonction qui à tout nombre complexe $z \neq 2i$ associe le nombre complexe f(z) défini par

$$f(z) = \frac{z-1}{z-2i}$$

On note M, A et B les points d'affixes respectives z, 1 et 2i.

1. a) Donner les formes algébrique et trigonométrique de f(i).

b) Résoudre l'équation f(z)=2i.

2. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $|f(z)| = 2$

3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que :

$\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

4. Trouver $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$.

(5 points)

III. Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$ et $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Exprimer v_n en fonction de n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{19}{4} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

3. Montrer que la suite (u_n) peut s'écrire sous la forme $(u_n) = (t_n) + (w_n)$ où (t_n) est une suite géométrique et (w_n) est une suite arithmétique.

4. Calculer les sommes :

$T_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$ $W_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ et $U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

(4 points)

IV. 1. Soient x un réel distinct de $k \cdot \pi$ et T(x) le réel défini par :

$$T(x) = 16 \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x$$

a). Montrer que $T(x) = \frac{\sin 16x}{\sin x}$ en calculant le produit : $\sin x \cdot T(x)$.

b) En déduire la valeur du produit :

$$\cos\frac{\pi}{15} \cdot \cos\frac{2\pi}{15} \cdot \cos\frac{4\pi}{15} \cdot \cos\frac{8\pi}{15}$$

2. Soit ABC un triangle. On note a, b, c les mesures des côtés et S l'aire du triangle.

a) Etablir que : $a^2 + b^2 + c^2 - 4 \cdot S \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \left(b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A} - \frac{\pi}{3}) \right)$

b) Prouver que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

Dans quel cas a-t-on égalité ? Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

(5 points)

Q1

A : évènement A $p(A)$

B : ——— B $p(B)$

$p_A(B) = p(B|A)$

1. X : nombre de clients qui se présentent dans une station service en cinq minutes

$\Omega = \{0; 1; 2\}$

$E(X) = 0 \cdot p_0 + 1\, p_1 + 2 \cdot p_2 = 0 + 0,5 + 0,8 = 1,3$

2. C_1 : « en 5 min, un seul client se présente » $\mathbb{P}(C_1) = 0,5$

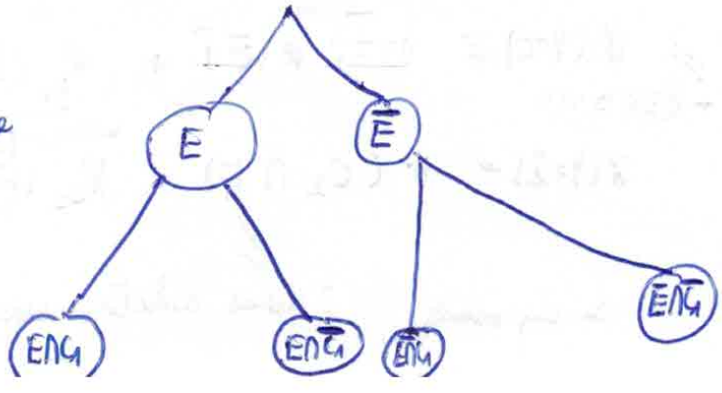
C_2 : « en 5 min, 2 clients se présentent » $\mathbb{P}(C_2) = 0,4$

E : « en 5 min, 1 seul client achète de l'essence » $\mathbb{P}(E)$

Ess : « un client choisit essence » : $\mathbb{P}(Ess) = 0,3$

a) $\mathbb{P}(C_1 \cap E) = \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(E) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35$

Les faits de se présenter et d'acheter de l'essence sont indépendants



b) $\mathbb{P}_{C_2}(E)$: prob. un seul client sur deux prend de l'essence, ceci un client prend essence l'autre groupe ; les deux des clients sont indép

$$\mathbb{P}_{C_2}(E) = \mathbb{P}(E_{ss})\mathbb{P}(\overline{E_{ss}}) + \mathbb{P}(\overline{E_{ss}})\mathbb{P}(E_{ss})$$
$$= 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3$$
$$= 0,42$$

$$\mathbb{P}(C_2 \cap E) = \mathbb{P}_{C_2}(E) \cdot \mathbb{P}(C_2)$$
$$= 0,42 \cdot 0,4$$
$$= 0,168$$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_{C_2}(E) \cdot \mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}_{C_1}(E)\mathbb{P}(C_1) + \underbrace{\mathbb{P}_{C_0}(E)}_{=0}\mathbb{P}(C_0)$$
$$= \mathbb{P}(C_2 \cap E) + \mathbb{P}(C_1 \cap E)$$
$$= 0,168 + 0,35$$
$$= 0,518$$

3. Y : nombre de clients achetant de l'essence en 5 minutes

$\Omega = \{0; 1; 2\}$

$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(C_2 \cap E) + \mathbb{P}(C_1 \cap E) = \mathbb{P}(E) = 0,518$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(C_0) + \mathbb{P}(C_1 \cap \overline{E}) + \mathbb{P}(C_2 \cap \overline{E}) = 0,1 + \mathbb{P}_{C_1}(\overline{E}) \cdot \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}_{C_2}(\overline{E})$

$\mathbb{P}(\overline{E_{ss}}) \cdot \mathbb{P}(\overline{E_{ss}}) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

$0,1 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,09 \cdot 0,4 = 0,286$

$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(C_2 \cap F) = \mathbb{P}_{C_2}(F)\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(E_{ss})\mathbb{P}(E_{ss})\mathbb{P}(C_2)$
$= 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,4$
$= 0,196$

en cinq minutes, 2 clients achètent essence

1 client achète essence

"$\mathbb{P}(\overline{E_{ss}})$"

"$\mathbb{P}(C_2)$"

4. $\mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) \overset{?}{=} \mathbb{P}(\{X=1\}) \mathbb{P}(\{Y=1\})$

$= 0,5 \cdot 0,518$

$= 0,259$

$\mathbb{P}(C_1 \cap E)$

$= 0,35$

$\neq$

Non, pas d'indépendance.

Si $=$, on aurait dû vérifier une autre paire.

Pour prouver indép, on aurait dû prouver que

$$\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \mathbb{P}(\{X=i\}) \mathbb{P}(\{Y=j\})$$

$\forall i,j \in \{0;1;2\}$

Q2

$f(z) = \dfrac{z-1}{z-2i} \qquad \forall\, z \neq 2i$

$M(z), \quad A(1), \quad B(2i)$

1. a) $f(i) = \dfrac{i-1}{i-2i} = \dfrac{i-1}{-i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i^2-i}{1} = -(1+i) = -1-i$

$|f(i)| = \sqrt{2} \qquad f(i) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) $f(z) = 2i \overset{\forall z \neq 2i}{\iff} z-1 = 2i(z-2i) \quad \forall z \neq 2i$

$\iff z = 2iz + 4 + 1 \quad \forall z \neq 2i$

$\iff (1-2i)z = 5$ ——

$\iff z = \dfrac{5}{1-2i} \cdot \dfrac{1+2i}{1+2i}$ ——

$= \dfrac{5+10i}{5}$ ——

$= 1+2i$

2. $|f(z)| = 2 \ \forall z \neq 2i \iff AM = 2BM \quad \forall z \neq 2i \qquad S = \{1+2i\}$

$\iff |z-1|^2 = 4\,|z-2i|^2$ ——

$\iff (x-1)^2 + y^2 = 4\,(x^2 + (y-2)^2)$ ——

$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 16y + 16$ ——

$\iff -3x^2 - 2x + 1 - 3y^2 + 16y - 16 = 0$ ——

$\iff 3x^2 + 2x + 3y^2 - 16y + 15 = 0$

$\iff 3x^2 + 2\cdot\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{1}{3} + 3y^2 - 2\cdot\sqrt{3}\,\dfrac{8\sqrt{3}}{3}y + \dfrac{64}{3} = -15 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{64}{3}$

$\iff \left(\sqrt{3}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}y - \dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \quad 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$\left(0+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(2-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \neq \frac{20}{9}$ donc $B \notin \mathcal{C}$

3. $\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}_+$

1ère méthode $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}$

$\mathcal{Y}$ est donc le demi-cercle ouvert de diamètre $[AB]$ situé au-dessus de (AB)

$$\frac{x+iy-1}{x+iy-2i} = \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-2)} = \frac{[(x-1)+iy][x-i(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - x - i(x-1)(y-2) + iy + y(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

$f(z) \in i\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow x^2 - x + y(y-2) = 0$ et $-(x-1)(y-2) + xy > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 = \frac{5}{4}$ et $2x + y - 2 > 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $y > -2x+2$

cercle de centre $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point B

partie du cercle $\mathcal{C}$ située au dessus de la droite $d: y = -2x+2$ avec $A \in d$ et $B \in d$.

4. $\mathcal{E} \cap \mathcal{Y} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = 2 \text{ et } f(z) \in i\mathbb{R}_+ \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 2i \}$

$\overset{1.b)}{=} \{ 1+2i \}$

$\mathcal{E} \cap \mathcal{Y} = \{ C(1+2i) \}$

Q3

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = 4u_n - 6n + 15$

1. $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15$

$= 4\left(\frac{1}{3}u_n + n - 1\right) - 6n + 1) + 15$

$= \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6n - 6 + 15$

$= \frac{4}{3}u_n - 2n + 5$

$= \frac{1}{3}(4u_n - 2n + 15)$

$= \frac{1}{3}v_n$

v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$v_0 = 4u_0 - 6 \cdot 0 + 15 = 4 - 0 + 15 = 19$

ainsi, $v_n = 19\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (déf. explicite)

2. $4u_n = v_n + 6n - 15$

$= 19\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{19}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6n - 15}{4}$

3. posons $t_n = \frac{19}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et $w_n = \frac{6n - 15}{4} = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$

t_n est une suite géo. de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{19}{4}$.

w_n est une suite arith. de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $-\frac{15}{4}$

Si alors $u_n = \frac{2}{\quad} + \quad + w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4. $T_n = \sum_{i=0}^{n} t_i = t_0 \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{4} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{19}{8}\left(3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$W_n = \sum_{i=0}^{n} w_i = (n+1)\frac{w_0 + w_n}{2}$$

$$= (n+1)\frac{-\frac{15}{4} + \frac{6n-15}{4}}{2}$$

$$= (n+1)\frac{6n-30}{8}$$

$$= (n+1)\frac{3n-15}{4}$$

$$U_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n}(t_i + w_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i + \sum_{i=0}^{n} w_i$$

$$= T_n + W_n$$

$$= \frac{19}{8}\left(3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) + \left(\frac{3n-15}{4}\right)(n+1)$$

Q4

1. Soit $x \neq k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$$T(x) = 16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x$$

a) $T(x) = \dfrac{\sin 16x}{\sin x}$ $\quad (\text{CE} \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} T(x) \cdot \sin x &= 16 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \\ &= 8 \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \\ &= 4 \sin 4x \cos 4x \cos 8x \\ &= 2 \sin 8x \cos 8x \\ &= \sin 16x \end{aligned}$$

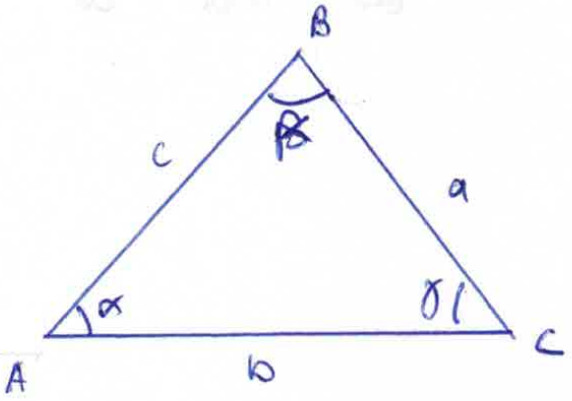
b) $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15} = \dfrac{\sin \frac{16\pi}{15}}{16 \sin \frac{\pi}{15}}$

$$= \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right)}{16 \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}{16 \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)}$$

$$= -\frac{1}{16}$$

2.



a) $a^2+b^2+c^2 - 4S\sqrt{3}$

$= b^2+c^2 - 2bc\cos\hat{A} + b^2+c^2 - 4S\sqrt{3}$

$= 2b^2+2c^2 - 2bc\cos\hat{A} - 2bc\sin\hat{A}\sqrt{3}$

$= 2b^2+2c^2 - 4bc\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}}\cos\hat{A} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{3}}\sin\hat{A}\right)$

$= 2b^2+2c^2 - 4bc\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\hat{A}\right)\right)$

$= 2\left(b^2+c^2-2bc\cos\left(\hat{A}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b) $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow b^2+c^2 - 2bc\cos\left(\hat{A}-\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

Or $b^2+c^2 - 2bc\underbrace{\cos\left(\hat{A}-\frac{\pi}{3}\right)}_{\leq 1} \geq b^2+c^2-2bc = (b-c)^2 \geq 0$

On a l'égalité $\Leftrightarrow \cos\left(\hat{A}-\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \hat{A}-\frac{\pi}{3} = 0\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{3}$ $\hat{A}\in\underbrace{]0,\pi[}_{\hat{A}\text{ angle d'un triangle}}$

et $b=c$

$\Leftrightarrow$ ABC est isocèle en A et l'angle du sommet principale mesure $\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow$ ABC est équilatéral.

Concours de recrutement

18 novembre 2010
15h00 à 18h00

EPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS

Partie 1 : Probabilités et suites (2+2+2 = 6 points)

Un joueur débute un jeu à plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la permière partie est 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- S'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05.
- S'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1) On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que le joueur perd lors des 3 premières parties. Déterminer la loi de probabilité de X, et calculer son espérance.
2) Pour tout entier naturel non nul, on note E_n l'événement « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire et p_n la probabilité de l'événement E_n.
   Exprimer les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.
   En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0{,}05$.
3) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \frac{1}{19}$ pour tout entier naturel non nul. Montrer que cette suite est géométrique, et indiquer son premier terme et sa raison. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Partie 2 : Nombres complexes (3+3 = 6 points)

1) Soit m un paramètre réel.
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boxed{(z-i)^4 + m(z^2+1)^2 = 0}$ en discutant suivant la valeur de m.
2) Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives i, 2+3i et 2 – 3i.
   a) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image de A par r.
   b) Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme A' en C.

   Illustrer l'exercice par une figure.

Partie 3 : Trigonométrie (4+4=8 points)

1) Etablir la formule suivante : $\boxed{\tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 8\cot 8x = \cot x}$ après avoir précisé les conditions d'existence.
2) Résoudre l'équation $\boxed{2\sin 3x + \sin x = \sin 2x}$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Q1

P_1 : « perdre la 1ère partie » $\quad \mathbb{P}(P_1) = 0,2$

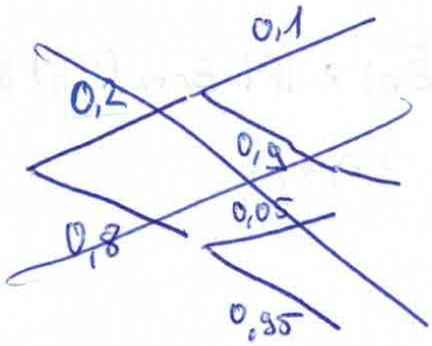
P_i : « ——— i^e partie »

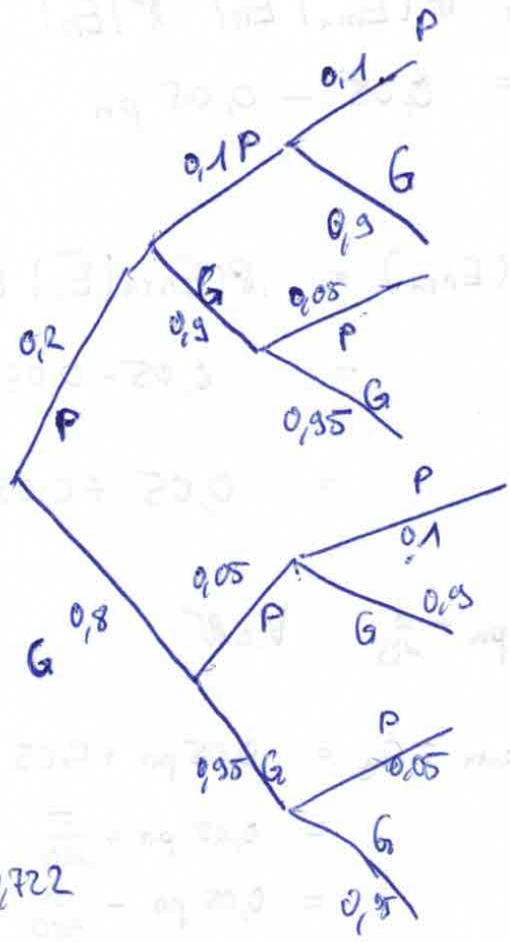
$\mathbb{P}(P_i \mid \overline{P_{i-1}}) = 0,05$

$\mathbb{P}(P_i \mid P_{i-1}) = 0,1$

1) X : # de fois que le joueur perd les 3 premières parties

$X = \{0; 1; 2; 3\}$





$\mathbb{P}(X=0) = 0,8 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 0,722$

$\mathbb{P}(X=1) = 0,8 \cdot 0,05 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,95 + 0,05 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,95 = 0,245$

$\mathbb{P}(X=2) = 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,05 \cdot 0,1 = 0,031$

$\mathbb{P}(X=3) = 0,002$

$E(X) = 0 \cdot 0,722 + 1 \cdot 0,245 + 2 \cdot 0,031 + 3 \cdot 0,002 = 0,313$

2) E_n : joueur perd la n^e partie $\quad \mathbb{P}(E_n) = p_n$

$\overline{E_n}$: ——— gagne ——— $\quad \mathbb{P}(\overline{E_n}) = 1 - p_n$

$E_n \cap E_{n+1}$: joueur perd la n^e et la $(n+1)^e$ partie

$$\mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_{n+1} \mid E_n)\, \mathbb{P}(E_n)$$
$$= 0{,}1\, p_n$$

$$\mathbb{P}(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_{n+1} \mid \overline{E_n})\, \mathbb{P}(\overline{E_n})$$
$$= 0{,}05 - 0{,}05\, p_n$$

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_{n+1} \mid \overline{E_n})\, \mathbb{P}(\overline{E_n}) + \mathbb{P}(E_{n+1} \mid E_n)\, \mathbb{P}(E_n)$$
$$= 0{,}05 - 0{,}05\, p_n + 0{,}1\, p_n$$
$$= 0{,}05 + 0{,}05\, p_n$$

3) $u_n = p_n - \frac{1}{19} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0{,}05\, p_n + 0{,}05 - \frac{1}{19}$$
$$= 0{,}05\, p_n + \frac{5}{100} - \frac{1}{19}$$
$$= 0{,}05\, p_n - \frac{1}{380}$$
$$= \frac{5}{100}\left(p_n - \frac{1}{19}\right)$$
$$= 0{,}05\, u_n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $0{,}05$ et de premier terme

$u_0 = p_0 - \frac{1}{19} = \frac{2}{10} - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}$ def explicite : $u_n = \frac{14}{95} \cdot 0{,}05^n$

$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} u_n + \frac{1}{19} = \lim_{n \to +\infty} \frac{14}{95} \cdot 0{,}05^n + \frac{1}{19} = \frac{1}{19}$.

$-1 < 0{,}05 < 1$

Q2

$m \in \mathbb{R}$

$$(z-i)^4 + m(z^2+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-i)^4 + m(z+i)^2(z-i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-i)^2\left((z-i)^2 + m(z+i)^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \quad \text{ou} \quad \underbrace{(z-i)^2 + m(z+i)^2 = 0}_{(*1)}$$

$$(*1) \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 1 + mz^2 + 2miz - m = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+m)z^2 + (2mi - 2i)z - m - 1 = 0$$

$$\Delta = (2i)^2(m-1)^2 + 4(1+m)(m+1)$$
$$= -4(m^2 - 2m + 1) + 4(m^2 + 2m + 1)$$
$$= 16m$$

si $m > 0$, $\Delta > 0$ et $z_1 = \dfrac{-2i(m-1) + 4\sqrt{m}}{2(1+m)}$

$$z_2 = \frac{-2i(m-1) - 4\sqrt{m}}{2(1+m)}$$

si $m = 0$, $\Delta = 0$ et $z_0 = \dfrac{2i}{2} = i$

si $m < 0$, $\Delta < 0$ et $z_1' = \dfrac{-2i(m-1) - 4i\sqrt{-m}}{2(1+m)}$

$$z_2' = \frac{-2i(m-1) + 4i\sqrt{-m}}{2(1+m)}$$

$S_{>0} = \{i, z_1, z_2\}$ $\quad S_0 = \{i\}$ $\quad S_{<0} = \{i, z_1', z_2'\}$

2) A(1) B(2+3i) C(2-3i)

a) Expression complexe de la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

$$z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_B)$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$$

$$z'_A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(i - 2 - 3i) + 2 + 3i$$

$$= (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-i - 1) + 2 + 3i$$

$$= -i\sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2} + 2 + 3i$$

$$= -2\sqrt{2}i + 2 + 3i$$

$$= 2 + (3 - 2\sqrt{2})i$$

b) $$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg\left(\frac{2 + (3-2\sqrt{2})i - 2 - 3i}{-6i}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-2\sqrt{2}i}{-6i}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= 0$$

donc A', B et C sont alignés

écriture complexe de l'homothétie de centre B

$$z' - z_B = k(z - z_B) \qquad k \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad z' = k(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$$

$$z'_C = k(z_A - 2 - 3i) + 2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - 3i - 2 - 3i = k(2 + (3 - 2\sqrt{2})i - 2 - 3i)$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{-6i}{-2\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

d'où $\quad z' = \frac{3\sqrt{2}}{2}(z - 2 - 3i) + 2 + 3i$

Q3

1) $\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$

$= -2\cot 2x$

$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

$2\tan 2x = 2\cot 2x - 4\cot 4x$

$4\tan 4x = 4\cot 4x - 8\cot 8x$

$\tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x = \cot x - 8\cot 8x$

$\Leftrightarrow \tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 8\cot 8x = \cot x$

C.E 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}$

2) $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}$

3) $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\pi}{8} ; \frac{3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8}$

$\left(x \neq k\frac{\pi}{8} \right.$ $\quad \left. \frac{\pi}{8} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} \right)$

4) $x \neq k\pi$

2) $2\sin 3x + \sin x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow 6\sin x - 8\sin^3 x + \sin x = 2\sin x \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x \left(6 - 8\sin^2 x + 1 - 2\cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\underbrace{7 - 8(1-\cos^2 x) - 2\cos x = 0}_{(*1)}$

$(*1) \Leftrightarrow -1 + 8\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 32 = 36$

$\cos x = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ ou $\cos x = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ (bonus)

ou $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$ ou $x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Jeudi, le 10 février 2011

15h-18h

I. Soit f_n ($n \in \mathbb{R}^*$) la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n \cdot e^{1-x}$ lorsque $x > 0$ et $f_n(0) = 0$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1) Etudiez la continuité de f_n en 0 et l'existence d'asymptotes au graphe de f_n.

2) Etudiez la dérivabilité de f_n à droite en 0 et le sens de variation de f_n et dressez le tableau de variation.

3) Déterminez les points d'inflexion éventuels au graphe de f_n.

4) Représentez graphiquement f_n pour $n = \frac{1}{4}$, $n = 1$ et $n = \frac{9}{4}$. **7 points**

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + x^3\right)\sqrt{1 - x^2}$, soit G la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan et soit C le demi-cercle de centre O et de rayon 1 dans le même repère et situé au dessus de l'axe des abscisses.

1) Etudiez f : domaine, continuité, dérivabilité aux bornes du domaine avec interprétation graphique, sens de variation, tableau de variation, extrema éventuels, représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Quelle est la nature du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ de G ? Justifiez !

2) Démontrez que la partie du plan délimitée G et l'axe des abscisses a la même aire que la partie du plan délimitée par C et l'axe des abscisses. **7 points**

III. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1) Etudiez f : domaine, parité, sens de variation, représentation graphique.

2) Calculez $\int_1^x \arctan(t)\, dt$ et ensuite $\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ pour tout $x > 0$, après avoir justifié l'existence de ces intégrales. **4 points**

IV. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 8x}$.

Calculez la limite de f en $+\infty$. **2 points**

Q1

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n e^{1-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad n \in]0;+\infty[$$

dom $f_n = [0;+\infty[$

1) f_n est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues

Continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^n}_{\to 0} \underbrace{e^{1-x}}_{\to e} = 0 = f_n(0)$$

Ainsi comme $\lim_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0)$ il s'ensuit que f_n est continue en 0.

Donc Dom$_c$ $f_n = [0;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^n}_{\to+\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x-1}}$$

$$\overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^{x-1}} \quad \text{(n fois)}$$

$$= 0$$

AH $(en+\infty)$: $y = 0$

(Pas d'AV. en $x=0$)

car si $n \in]0;1[$;

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x^{n-1}}_{\to+\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to 1} = +\infty$$

2) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f_n'(x) = n x^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x}$

$$\lim_{x\to 0} f_n'(x) = \lim_{x\to 0^+} n x^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n<1 \\ 0 & \text{si } n>1 \\ e^1 - e^1 = 0 & \text{si } n=1 \end{cases}$$

Par le théorème : lien entre limite de f' en a et dérivabilité de f en a,

il s'ensuit que f_n est dérivable à droite de 0 si $n \geq 1$ et dans ce cas $f_n'(0) = 0$

et si $n \in]0;1[$, f_n n'est pas dérivable à droite en 0 dom $f_n' = \begin{cases} [0;+\infty[& \text{si } n \geq 1 \\ ]0;+\infty[& \text{si } n < 1 \end{cases}$

$\forall x \in \text{dom } f_n'$, $f_n'(x) = (n-x)\, x^{n-1}\, e^{1-x}$

$f_n'(x) = 0 \iff x = n$ ou $\left(x = 0 \text{ si } n \geq 1\right)$

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	$+\infty$ si $n \in]0;1[$ 0 si $n \geq 1$	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	max I_1	↘	0

$I_1(n ; n^n e^{1-n})$

3) $\forall x \in]0;+\infty[$

$$f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}e^{1-x} - nx^{n-1}e^{1-x} - nx^{n-1}e^{1-x} + x^n e^{1-x}$$

$$= x^{n-2}e^{1-x}\left(n(n-1) - 2nx + x^2\right)$$

$$= x^{n-2}e^{1-x}\left[x^2 - 2nx + (n^2-n)\right]$$

$$\lim_{x \to 0^+} f_n''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 2 \\ 4 - 2e = 2e^1 & \text{si } n = 2 \\ +\infty & \text{si } n \in]1;2[\\ -\infty & \text{si } n \in]0;1] \end{cases}$$

$f_n''(x) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ si } n \geq 2\right)$ ou $x^2 - 2nx + (n^2-n)$

Résolution de l'équation du 2nd degré

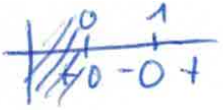
$$x^2 - 2nx + (n^2-n) = 0$$

$$\Delta = 4n^2 - 4(n^2-n) = 4n > 0$$

$$x_1 = \frac{2n - 2\sqrt{n}}{2} = n - \sqrt{n} > 0$$

$$x_2 = n + \sqrt{n} > 0$$

si $n \geq 1$ $\quad n - \sqrt{n} > 0 \iff n > \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n^2 > n \iff n(n-1) > 0$



	0		$n-\sqrt{n}$		$n+\sqrt{n}$	
x^{n-2}	0 si $n>2$ 1 si $n=2$ $+\infty$ si $n\in]0;2[$	$+$		$+$		$+$
$x^2-2nx+(n^2-n)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f''_n(x)$	$2e-$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	0	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I	$\cup$

$I_2\left(n-\sqrt{n};\ (n-\sqrt{n})^n e^{1-(n-\sqrt{n})}\right)$ $\qquad$ $I_3\left(n+\sqrt{n};\ (n+\sqrt{n})^n e^{1-(n+\sqrt{n})}\right)$

si $n \leq 1$ $\quad n - \sqrt{n} \leq 0$

	0		$n+\sqrt{n}$		$+\infty$
x^{n-2}		$+$		$+$	
$x^2-2nx+(n^2-n)$		$-$	0	$+$	
$f''_n(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\cap$	P.I.	$+$	

I_3

Q2

$f(x) = (1+x^3)\sqrt{1-x^2}$

C.E. $\quad 1-x^2 \geq 0 \iff x \in [-1;1]$

1) $\text{dom } f = [-1;1]$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$ → f est continue en -1 et 1

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$

$\text{dom}_C f = [-1,1]$

Conclusion : pas d'A.H (ni A.O), et pas d'A.V.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)-0}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x \to -1} (1-x+x^2)\sqrt{1-x^2} = 0$$

en $x=-1$ tangente horizontale

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-0}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1+x^3)\sqrt{1+x}}{-\sqrt{1-x}} = -\infty$$

en $x=1$ tangente verticale

f est dérivable en $x=-1$, mais f n'est pas dérivable en $x=1$

$\text{dom } f' =]-1;1[$

$\forall x \in \text{dom } f'$

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{1-x^2} + (1+x^3)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$= 3x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{(1+x^3)x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2(1-x^2) - (x+x^4)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^4 - x - x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2 - x - 4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $3x - 1 - 4x^3 = 0$

$(\Leftrightarrow x = -1, \; x = \frac{1}{2}$ (exclu$)$

	4	0	-3	1
-1		-4	4	-1
	4	-4	1	0

$4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1)$

$= (x+1)(2x-1)^2$

$-4x^3 + 3x^2 - x = -x(x+1)(2x-1)^2$

	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x(2x-1)^2$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	↗	max I_1	↘	I_2	↘	$\|\|$

$I_1(0;1)$

$f'(\frac{1}{2}) = 0$

$f' < 0$ sur $]0;\frac{1}{2}[$

et $f' < 0$ sur $]\frac{1}{2};1[$

$(\frac{1}{2}; f(\frac{1}{2}))$ est un point d'inflexion.

2) Aire d'un demi-cercle de centre 0 et de rayon 1

$$\frac{\pi 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{-1}^{1} (1+x^3)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}}_{\text{fonction paire sur un intervalle symétrique}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}}_{=0 \text{ fonction impaire sur un intervalle symétrique}}$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Poser $x = \cos t$

$dx = -\sin t\,dt$

$x = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{\sin^2 t}}_{=|\sin t| = \sin t \text{ sur } [0;\frac{\pi}{2}]}\,\sin t\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t\,dt$$

$$= \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Q3

$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \underset{x \to 0^+}{\text{lim}} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \underset{x \to 0^-}{\text{lim}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

Parité; $\forall x \in \text{dom} f$:

$$f(-x) = \arctan(-x) - \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -f(x)$$

f est impaire sur dom f, il suffit d'étudier la fonction sur $]0;+\infty[$, les caractéristiques de cette fonction sur $]-\infty;0[$ sont obtenues par symétrie par rapport au point $(0;0)$

$\text{dom} f' = \text{dom} f$, ainsi

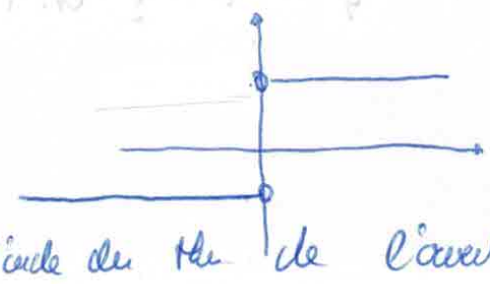
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$
$$= 0$$

f n'est ni croissante et ni décroissante, il s'agit d'une fonction constante sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in \text{dom} f$, prenons par ex $x = 1$

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



[on peut démontrer ceci à l'aide du théorème de l'accroissement]

2) $I = \int_1^x \arctan(t)\,dt$ pour $x > 0$

Ok, car $g : t \longmapsto \arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]1;x[$ ou $]x;1[$

$\arctan(t)$	$\cdot$	1
$\frac{1}{1+t^2}$		t

$$I \overset{\text{i.p.p}}{=} [\arctan(t)\cdot t]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= x\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln|1+t^2|\right]_1^x$$

$$= x\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$J = \int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ (avec $x>0$) existe, car

$h : t \longmapsto \arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

donc aussi sur $]0,+\infty[\supseteq]1;x[$ ou $]x;1[$

$\arctan\left(\frac{1}{t}\right)$		1
$-\frac{1}{1+t^2}$		t

$$J = x\arctan x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(2)$$

Q4

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3+5x^2} - \sqrt[3]{x^3+8x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2-x^3-8x}{\sqrt[3]{(x^3+5x^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3+5x^2)(x^3+8x)} + \sqrt[3]{(x^3+8x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-8x}{\sqrt[3]{x^6+10x^5+25x^4} + \sqrt[3]{x^6+8x^4+5x^4+40x^3} + \sqrt[3]{x^6+16x^4+64x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-8x}{x^2\left(\underbrace{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{13}{x^2}+\frac{40}{x^3}} + \sqrt[3]{1+\frac{16}{x^2}+\frac{64}{x^4}}}_{\to 3}\right)}$$

$$= \frac{5}{3}$$

Concours de recrutement : Mathématiques

Epreuve d'analyse :

Question 1 :

$f_n(x) = x^n \cdot e^{1-x}$ $\quad x \geq 0$; $f_n(0) = 0$ $\quad n \in \mathbb{N}_+^* = \mathbb{N}^* \setminus \{0\}$

Domaine $f_n = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

1) continuité de f_n en 0

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} x^n \cdot e^{1-x} = 0 \quad \Big] \Rightarrow$$

$f_n(0) = 0$

$\Rightarrow f_n$ est continue en 0 $\Rightarrow \mathrm{Dom}_c f = [0, +\infty[$

Asymptotes

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$ $\Rightarrow$ pas d'AV

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^n}_{\to +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to 0} \quad (\text{fi}) \ (+\infty \cdot 0)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{x-1}} \begin{matrix} \to +\infty \\ \to +\infty \end{matrix} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^{x-1}} \begin{matrix} \to +\infty \\ \to +\infty \end{matrix} = \dots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^{x-1}} \begin{matrix} = 0 \\ \to +\infty \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ AH d'équation $y = 0$

2) dérivabilité de f_n à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^n e^{1-x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^{n-1}}_{\to 0} \underbrace{e^{1-x}}_{\to e^1} = 0$$

$\Rightarrow f_n$ est dérivable à droite en 0 $\Rightarrow \mathrm{Dom}_d f = [0, +\infty[$

dérivée de f_n

$\forall x \in \mathrm{Dom}_d f$: $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{1-x} + x^n \cdot e^{1-x} \cdot (-1)$

$= n x^{n-1} e^{1-x} - x^n e^{1-x} = x^{n-1} e^{1-x} (n - x)$

Recherche des extremas

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} \underbrace{e^{1-x}}_{>0} (n-x) = 0$

$\Leftrightarrow x^{n-1} = 0$ ou $(n-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = n$

Tableau de variation :

	0		n		$+\infty$
x^{n-1}	-0	$+$		$+$	
$n-x$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	Max	↘	0

$\text{Max}(n, n^n \cdot e^{1-n})$

3) Dérivée seconde :

$\forall x \in \text{dom } f'$ $\quad f_n''(x) = n\left((n-1)x^{n-2} \cdot e^{1-x} + x^{n-1} \cdot e^{1-x}(-1)\right) - \left(x^{n-1} e^{1-x}(n-x)\right)$

$= n(n-1)x^{n-2} e^{1-x} - n x^{n-1} e^{1-x} - x^{n-1} e^{1-x}(n-x)$

$= x^{n-2} e^{1-x}\left(n(n-1) - nx - x(n-x)\right)$

$= x^{n-2} e^{1-x}\left(n^2 - n - nx - nx + x^2\right)$

$= x^{n-2} e^{1-x}\left(+x^2 - 2nx + (n^2-n)\right)$

Recherche de pts d'inflexion :

$f_n''(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-2} \underbrace{e^{1-x}}_{>0}\left(x^2 - 2nx + (n^2-n)\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^{n-2} = 0$ ou $(x^2 - 2nx + (n^2-n)) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\Delta = 4n^2 - 4(n^2-n) = 4n$

$x_1 = \dfrac{2n + \sqrt{4n}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2n - \sqrt{4n}}{2}$

$= \dfrac{2n + 2\sqrt{n}}{2}$ $\quad = \dfrac{2n - 2\sqrt{n}}{2}$

$= n + \sqrt{n}$ $\quad = n - \sqrt{n}$

Tableau de variation : (si $n > 1$)

	0		$n-\sqrt{n}$		$n+\sqrt{n}$	$+\infty$
x^{n-2}	0	$+$		$+$		$+$
$x^2 - 2nx + (n^2-n)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f_n''(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_n(x)$		$(+)$	Pf$_1$	$(-)$	Pf$_2$	$(+)$

Pf$_1$ $\left(n-\sqrt{n},\ (n-\sqrt{n})^n e^{1-(n-\sqrt{n})}\right)$

Pf$_2$ $\left(n+\sqrt{n},\ (n+\sqrt{n})^n e^{1-(n+\sqrt{n})}\right)$

déduction existe $n - \sqrt{n} > 0 \Rightarrow n^2 \sqrt{n} = n^{\frac{2}{2}} n$

$\Rightarrow n^2 - n > 0 \Rightarrow n(n-1) > 0$

	0		1	
$n^2 - n$	$+$	0	$-$	0 $+$

si $n > 1$ $\Rightarrow$ il existe 2 pts d'inflexion (selon tableau)

si $n \in [0, 1]$ $\Rightarrow$ il existe 1 point d'inflexion

si $n < 1$

	$n-\sqrt{n}$		0		$n+\sqrt{n}$	$+\infty$
x^{n-2}	$-$	$-$	0	$+$		$+$
$x^2 - 2nx + (n^2-n)$	$+0$			$-$	0	$+$
$f_n''(x)$		$-$		$-$	0	$+$

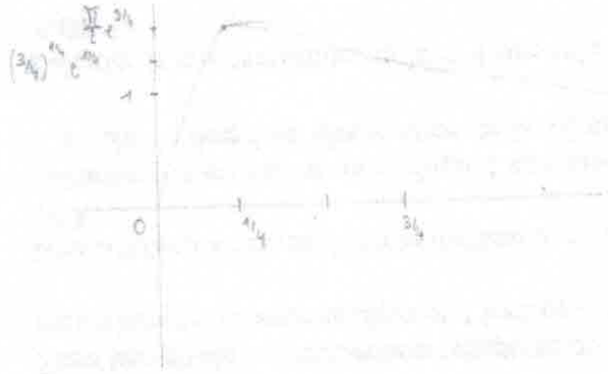
4) Représentation graphique :

1) $f_{1/4}(x) = x^{1/4}\ e^{1-x}$ $\quad \approx 1,43$

$\text{Max}\left(\frac{1}{4} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{3/4}\right)$

à exclure & dom ← $PI_1\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} ; \left(-\frac{1}{4}\right)^{1/4}\ e^{1-(-1/4)}\right) = \left(-\frac{1}{4} ; \left(-\frac{1}{4}\right)^{1/4} e^{5/4}\right)$

$PI_2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} ; \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}\ e^{1-(3/4)}\right) = \left(\frac{3}{4} ; \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} e^{1/4}}_{\approx 1,19}\right)$



2) $f_1(x) = x\ e^{1-x}$

$\text{Max}(1,1)$

$PI_1(0,0)$, $PI_2\left(2, \underbrace{\frac{2}{e}}_{\approx 0,734}\right)$



Question II :

$f(x) = (1+x^3)\sqrt{1-x^2}$

1) Domaine de f :

C.E : $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$

TdS :		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\text{Dom } f = [-1, 1]$

Domaine de continuité :

$\lim\limits_{x \to -1^+} \underbrace{(1+x^3)}_{\to 0} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 0} = 0 = f(-1)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \underbrace{(1+x^3)}_{\to 2} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 0} = 0 = f(1)$

$\Rightarrow f$ est continue en $x=-1$ et en $x=1$

$\Rightarrow \text{Dom}_c f = [-1, 1] = \text{dom } f$

Domaine de dérivabilité

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2} - 0}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(1+x^3)\sqrt{(1+x)(1-x)}}{x+1}$ $\begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix}$

à part : $\dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$

$= \lim\limits_{x \to -1} \underbrace{(x^2-x+1)}_{\to 3} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 0} = 0 \in \mathbb{R}$ (interprétation géométrique : f possède en $x=-1$ une tangente de pente 0)

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2} - 0}{x \neq 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(1+x^3)\sqrt{1-x^2}}{x-1}$ $\begin{matrix}\to 0 \\ \to 0\end{matrix}$

à part : $\dfrac{x^3+1}{x-1} = (x^2+x+1) + \dfrac{2}{x-1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1}\right)\sqrt{1-x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+x+1)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+x+1)\sqrt{1-x^2} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}$

$= -\lim\limits_{x \to 1^-} \underbrace{\underbrace{(x^2+x+1)}_{\to 3} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 0}}_{\to 3} - 2 \underbrace{\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}}_{\begin{matrix}\to 2 \\ \to 0^+ \\ \to +\infty\end{matrix}} = -\infty$ (interprétation géométrique : f possède en $x=1$ une tangente verticale)

$\to f$ est dérivable en $x=-1$ mais f n'est pas dérivable en $x=+1$

$\to \text{Dom } f' = [-1, 1[$

Bonus : limites et asymptotes

$\text{Dom } f = [-1, 1] \Rightarrow$ pas d'AH, ni d'AO

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow$ pas d'AV

f n'est pas définie
Dom f'
$-1 \notin$ dom f'

Dérivée :

$\forall x \in \text{dom} f' :$ $f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} + (1+x^3) \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x)$

$= 3x^2 \sqrt{1-x^2} - (1+x^3) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Recherche des extremas :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 \sqrt{1-x^2} - (1+x^3) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2(1-x^2) - (1+x^3) \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 3x^4 - x - x^4}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^4 + 3x^2 - x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$

$\Leftrightarrow -4x^4 + 3x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(+4x^3 - 3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $+4x^3 - 3x + 1 = 0$

Schéma de Horner

	4	0	-3	1
-1		-4	4	-1
	4	-4	1	0

$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

$x = \frac{4+0}{8} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$

à écarter ($\notin \text{dom} f'$)

$\Leftrightarrow -4x^4 + 3x^2 - x \geq 0$

$\Leftrightarrow -x(4x^3 - 3x + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (-x)(x+1)(4x^2 - 4x + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (-x)(x+1)(2x-1)^2 \geq 0$

Tableau de variation :

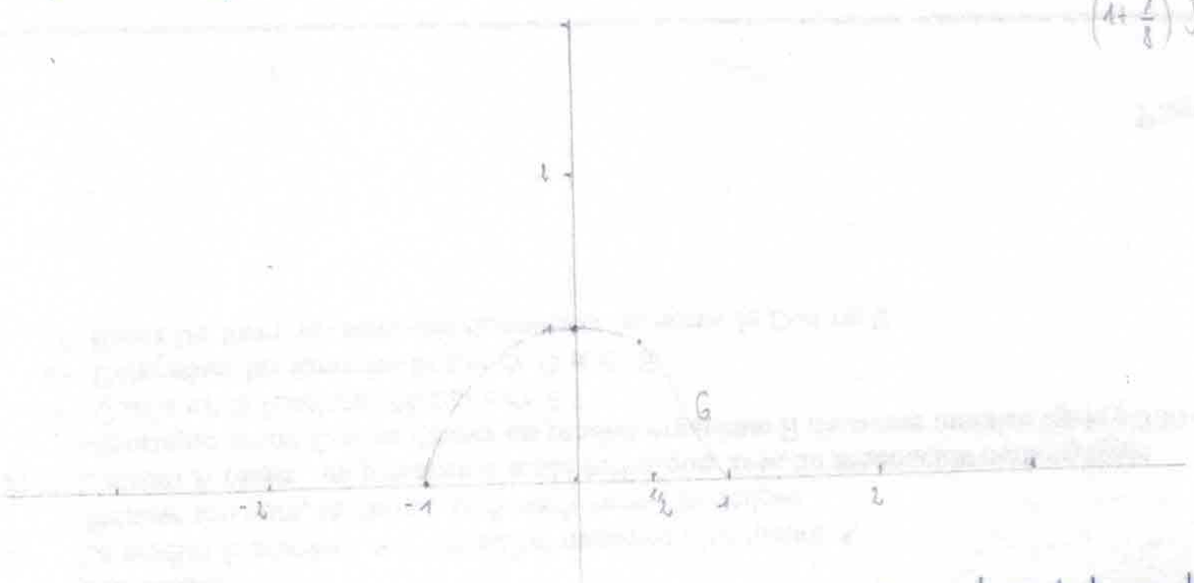
x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
x	$-$		0	$+$		$+$	
$4x^3 - 4x + 1$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\pm$	0		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$(0,1)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	0

Tableau de variation :

	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x+1)$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$\sqrt{1-x^2}$	0	$+$		$+$		$+$	0
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$-$	$\nexists$
$f(x)$	0	$\nearrow$	max $(0,1)$	$\searrow$		$\searrow$	0

Représentation graphique:

$f(1/2) = \left(1+\frac{1}{8}\right)\sqrt{3/4} \approx 0{,}97$



Le point d'abscisse $1/2$ est un point d'inflexion. En ce point la courbure de la courbe change de - en +.

2) L'aire de la partie du plan delimitée par un cercle de rayon 1 et de centre O est

$\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi 1^2 = \frac{1}{2}\pi$

L'aire de la partie du plan delimitée par G et l'axe des abscisses:

$\int_{-1}^{1} (1+x^3)\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{11}{2}$ (mal Rechenmaschine berechnet)

Question III :

$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Domaine :

C.E $x \neq 0$

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parité :

$f(-x) = \arctan(-x) + \arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$

$= -\arctan x - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (car arctan est une fct impaire)

$= -f(x)$

$\Rightarrow f$ est impaire

Il suffit d'analyser f sur $]0, +\infty[$. Le graphe de f pour $]-\infty, 0[$ on obtient par symétrie au pt $(0,0)$.

$\mathrm{Dom}\, f' = \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Dérivée

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$

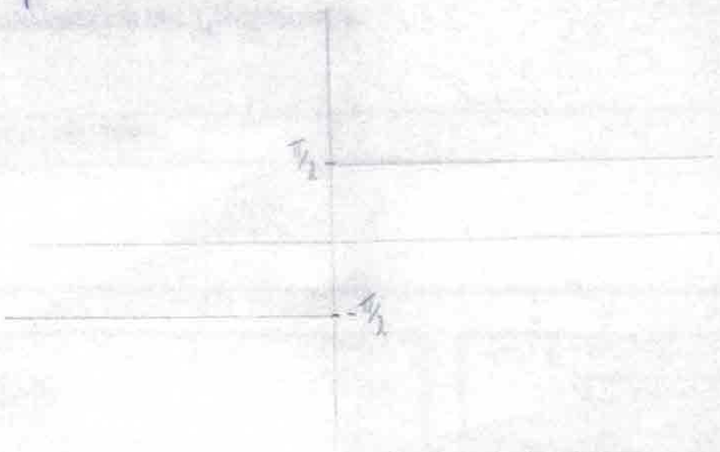
$\Rightarrow f$ n'est ni croissante, ni décroissante

$\Rightarrow f$ est une fonction constante

Choisissons $x \in \mathrm{dom}\, f$: $x = 1$

$f(1) = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(1) = 2 \cdot \mathrm{Arctan}(1) = 2\,\pi/4 = \pi/2$

Représentation graphique :



2) $\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ existe car Arctan est une fct continue sur $\mathbb{R}$

$\int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ " " " $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ donc aussi sur $\mathbb{R}_0^+$.

$$\int_1^x \arctan(t)\,dt = \int_1^x \arctan t \cdot 1\,dt$$

→ Integration par parties:

$f(t) = \arctan t$ $\qquad g'(t) = 1$

$f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $\qquad g(t) = t$

$$\int \arctan t \cdot 1\,dt = \arctan(t)\cdot t - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,(2t)\,dt$$

$u = 1+t^2$, $du = 2t\,dt$

$$= \arctan(t)\cdot t - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + k$$

$$\int_1^x \arctan t\,dt = \left[\arctan(t)\cdot t - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^x$$

$$= \arctan x \cdot x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \arctan(1) + \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \arctan(x)\cdot x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

$$\int_1^x \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)dt = \int_1^x \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)\cdot 1\,dt$$

→ Integration par parties:

$f(t) = \arctan\frac{1}{t}$ $\qquad g'(t) = 1$

$f'(t) = \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{-1}{t^2+1}$ $\qquad g(t) = t$

$$\int \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)dt = \arctan\tfrac{1}{t}\;t - \int -\frac{1}{t^2+1}\cdot t\,dt$$

$$= \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)\cdot t + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,(2t)\,dt$$

$u = t^2+1$, $du = 2t\,dt$

$$= \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)\cdot t + \tfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + k$$

$$\int_1^x \arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)dt = \left[\arctan\left(\tfrac{1}{t}\right)\cdot t + \tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_1^x$$

$$= \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(1) - \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\cdot x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 15 février 2011

15H00 – 18H00

I. Soit ABC un triangle quelconque d'orthocentre H. Soient O le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$, D le point du cercle diamétralement opposé à A, A' le milieu de [BC] et K et L les points d'intersection respectifs de la hauteur (AH) avec (BC) et $\mathcal{C}$.

1) Démontrer que BHCD est un parallélogramme et que A' est le milieu de [HD].

2) Démontrer que le triangle ADL est rectangle en L.

3) Démontrer que le symétrique de H par rapport à (BC) est L.

4) En déduire que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit.

(4 points)

II. Deux carrés de côté 1, ABCD et ADEF sont situés dans deux plans perpendiculaires. Soit k un réel de l'intervalle [0 ; 1]. Les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DN} = k \cdot \overrightarrow{DB}$.

On admet que l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}\right)$.

1) Calculer la distance MN en fonction de k.

2) Pour quelle valeur de k, la distance MN est-elle minimale ? Quelle est cette distance minimale ?

3) Soient I, J et L les milieux des segments [AD], [EB] et [MN] respectivement.
   a) Démontrer que $\overrightarrow{IL} = k \cdot \overrightarrow{IJ}$
      En déduire l'ensemble des points L lorsque k décrit l'intervalle [0 ; 1]
   b) Démontrer que L est le barycentre de (A, 1 – k), (B, k), (D, 1 – k), (E, k)

(6 points)

III. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$.

B est le quatrième sommet du carré direct OABC,

r_B est la rotation de centre B et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

s est la symétrie centrale de centre C, t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

1) Construire le centre E de la rotation $r_1 = s \circ r_B$. Indiquer l'affixe de E.

2) Construire le centre F de la rotation $r_2 = r_B \circ t$. Indiquer l'affixe de F.

3) On pose $r_2 = r \circ r_1$. Chercher la forme complexe de r et l'affixe du centre P de la rotation r.

4) Quelle est l'affixe du vecteur de la translation t_1 défini par $r = s \circ t_1$?

(5 points)

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 15 février 2011

15H00 – 18H00

IV. Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et soit m un nombre réel.

1) Chercher les équations des droites de pente m et qui sont tangentes à l'ellipse.

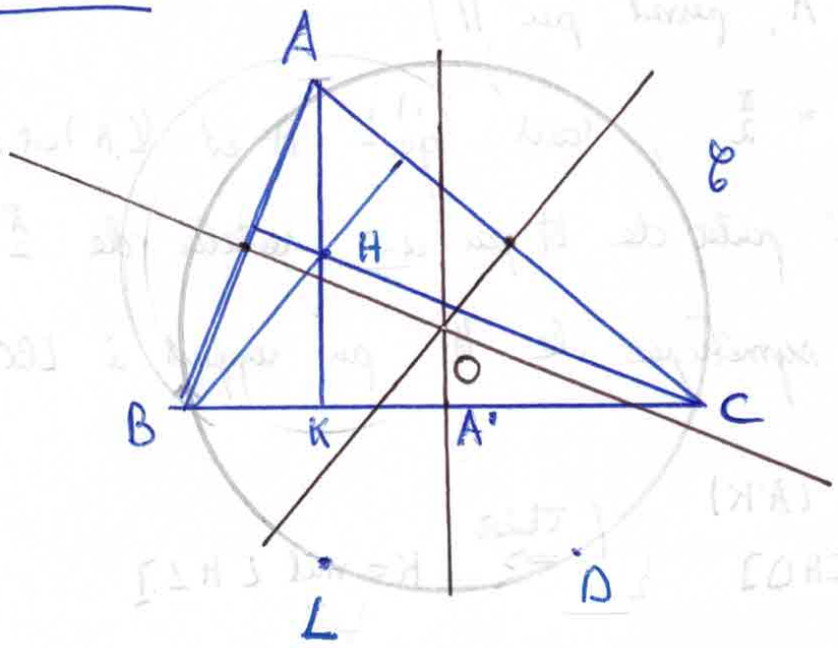
2) Chercher l'équation de la tangente t à l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ au point $P\left(3;\frac{12}{5}\right)$.

3) Chercher les équations des tangentes à l'ellipse (E) qui sont perpendiculaires à la droite t.

4) Chercher les équations des tangentes à l'ellipse (E) qu'on peut mener par le point $Q\left(\frac{-35}{9};2\right)$.

(5 points)

Q1



1) BHCD est un parallélogramme

(CH) ⊥ (AB) car

[AD] est rectangle en B (triangle inscrit dans le cercle de diam. [AD]

car (BD) ⊥ (AB) car d'où car et car : (CH) // (BD) car

De même (BH) ⊥ (AC) } (BH) // (CD) car
(CD) ⊥ (AC) }

Au total (car et car) BHCD est un ~~#~~.

A' = mil [BC] diagonale de BHCD

aussi A' = mil [HD] car les diagonales d'un # se coupent en leur milieu

2) [AD] est un diamètre du cercle ℰ

L ∈ ℰ , par conséquent ADL est rectangle en L.

3) A' = mil [HD]

Triangle HLD est rectangle en L

Il s'ensuit que $HA' = LA' = DA'$

(rayon du cercle de centre A', passant par H)

De plus $(\overrightarrow{A'H}, \overrightarrow{A'L}) = \frac{\pi}{2}$, car $(LA') \perp (HD)$ ((LA') est une hauteur)

Ainsi L est obtenu à partir de H par une rotation de $\frac{\pi}{2}$,

ou encore L est le symétrique de H par rapport à $[BC] \perp [HL]$

Autre méthode : $(DL) \parallel (A'K)$; $A' = \text{mil } [HD]$ $\Rightarrow$ (Thalès) $K = \text{mil } [HL]$

Comme en plus $(HL) \perp (BC)$, $L = s_{(BC)}(H)$.

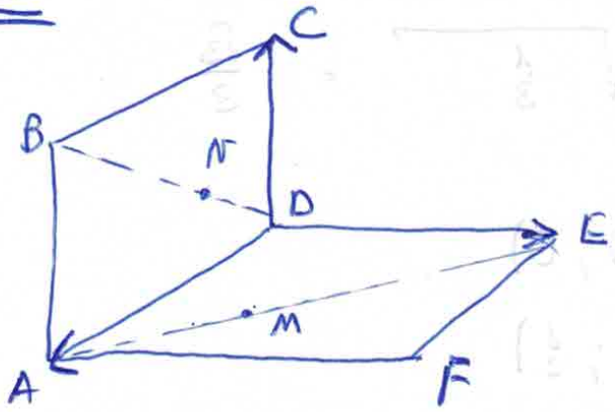
4) $L \in \mathcal{C} \iff s_{(BC)}(H) \in \mathcal{C}$

En un raisonnement analogue,

on obtient $s_{(AC)}(H) \in \mathcal{C}$

et $s_{(AB)}(H)$

Q2



Soit $k \in [0;1]$

$\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{DN} = k \cdot \overrightarrow{DB}$

Repère orthonormal $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$

1) $A(1;0,0)$
$E(0;0;1)$
$D(0;0;0)$
$B(1;1;0)$

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = -k \\ y_M = 0 \\ z_M = k \end{cases}$

$M(1-k, 0, k)$

$\overrightarrow{DN} = k\cdot\overrightarrow{DB} = k\cdot\overrightarrow{DC} + k\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{DC} + k\overrightarrow{DA}$

$N(k, k, 0)$

$MN = \sqrt{(2k-1)^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{4k^2 - 4k + 1 + 2k^2}$

$= \sqrt{6k^2 - 4k + 1}$

2) Considérons $d(k) = \sqrt{6k^2 - 4k + 1}$ avec $k \in [0;1]$

parabole vers le haut

$a=6 \quad b=-4$

d est minimale $\Leftrightarrow$ $6k^2 - 2k + 1$ est minimale

$\Leftrightarrow k = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \in [0;1]$

La distance minimale vaut

$$\sqrt{6 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3)

a) I = mil $[AD]$, soit $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$

J = mil $[EB]$, $\longrightarrow$ $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

L = mil $[MN]$, $\longrightarrow$ $L\left(\frac{1}{2}; \frac{k}{2}; \frac{k}{2}\right)$

$$\vec{IL} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = k \cdot \vec{IJ}$$

$$\begin{cases} x_L = \frac{1}{2} \\ y_L = \frac{1}{2} k \\ z_L = \frac{1}{2} k \end{cases}$$

Il s'agit du segment $[IJ]$

b) Notons G le barycentre de $(A, 1-k)$, (B, k), $(D, 1-k)$ et (E, k), on va prouver que $G = L$

$$x_G = \frac{(1-k)x_A + k x_B + (1-k)x_D + k x_E}{(1-k) + k + (1-k) + k}$$

$$= \frac{(1-k) \cdot 1 + k \cdot 1 + 0 + 0}{2}$$

$$= \frac{1}{2} = x_L$$

$$y_G = \frac{(1-k)y_A + k y_B + (1-k)y_D + k y_E}{2}$$

$$= \frac{0 + k + 0 + 0}{2}$$

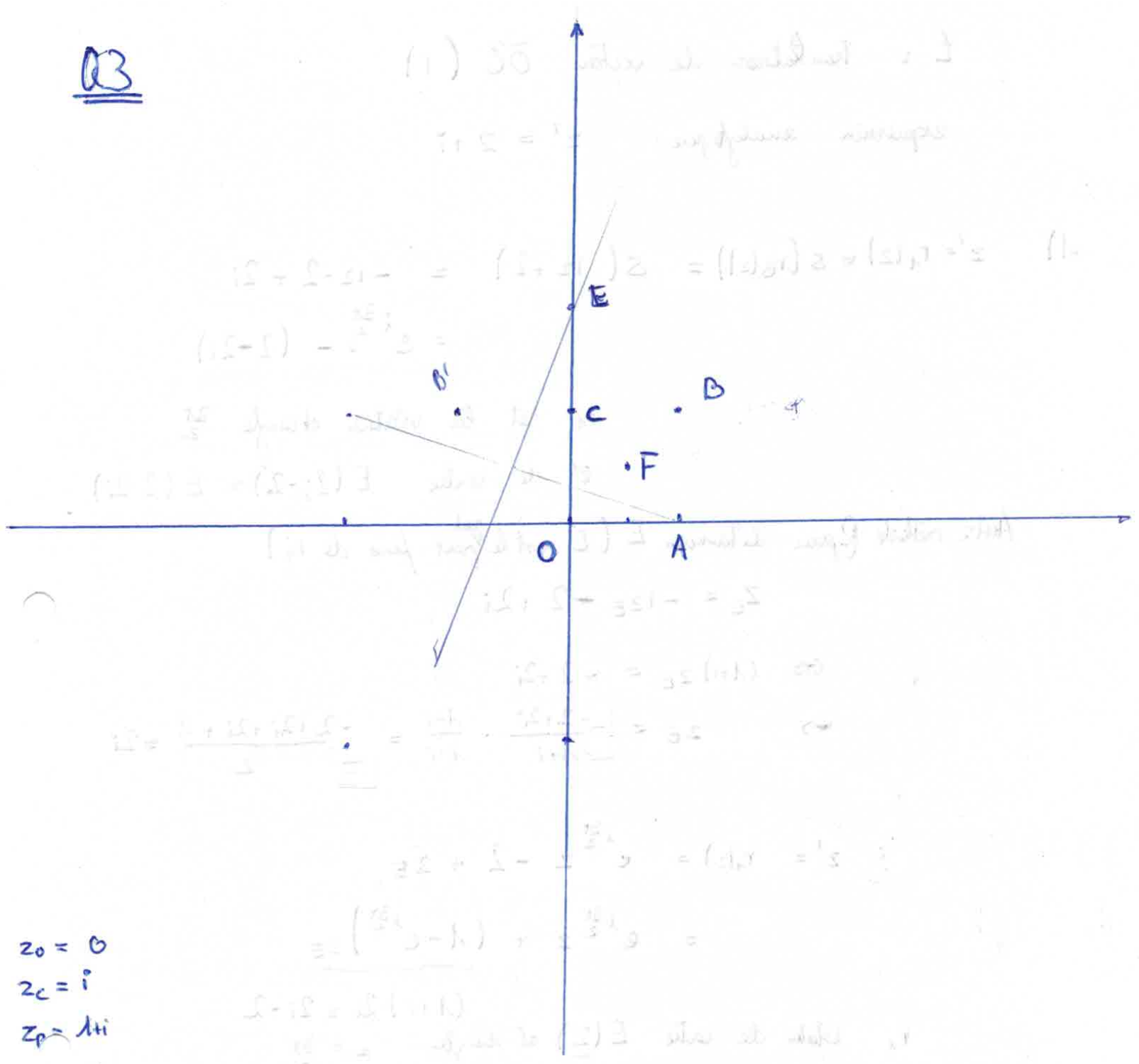
$$= \frac{k}{2} = y_L$$

$$z_G = \frac{(1-k)z_A + k z_B + (1-k)z_D + k z_E}{2}$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + k}{2}$$

$$= \frac{k}{2} = z_L$$

Q3



$z_O = 0$

$z_C = i$

$z_B = 1+i$

$z_A = 1$

r_B : la rotation de centre B et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$

expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) z_B$

$= iz + (1-i)(1+i)$

$= iz + 2$

S : symétrie centrale de centre C (rotation de centre C et d'angle π)

expression complexe : $z' = e^{i\pi} z + (1 - e^{i\pi}) z_C$

$= -z + 2i$

t : translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ (i)

expression analytique : $z' = z + i$

1) $z' = r_1(z) = s(r_B(z)) = s(iz+2) = -iz - 2 + 2i$

Pour déterminer E (E est le point fixe de r_1)

$z_E = -iz_E - 2 + 2i$

$\Leftrightarrow (1+i) z_E = -2 + 2i$

$\Leftrightarrow z_E = \frac{-2+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2+2i+2i+2}{2} = 2i$

$z' = r_1(z) = e^{i\frac{3\pi}{2}} z - 2 + 2i$

$= e^{i\frac{3\pi}{2}} z + \underbrace{(1 - e^{i\frac{3\pi}{2}})}_{(1+i)\cdot 2i = 2i-2} z_E$

r_1 rotation de centre $E(\underbrace{2i}_{z_E})$ et d'angle $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

2) $z' = r_2(z) = r_B(t(z)) = r_B(z+i) = i(z+i) + 2$

$= iz + 1$

Centre F_1 le seul point fixe de la rotation r_2 :

$z_F = iz_F + 1$

$\Leftrightarrow z_F = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$z' = r_2(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} z + 1 - e^{i\frac{\pi}{2}} z_F + \underbrace{(1 - e^{i\frac{\pi}{2}})}_{(1-i)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = 1} z_F$

r_2 la rotation de centre $F(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3) On pose $r_2 = r \circ r_1$

$\Leftrightarrow r_2 \circ r_1^{-1} = r$

avec r_1^{-1} la "rotation inverse" de r_1

rotation de centre E et d'angle $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$r_1^{-1}(z) = e^{i\frac{\pi}{2}} z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) z_E = iz + (1-i)2i = iz + 2i + 2$

$z' = r(z) = r_2 \circ r_1^{-1}(z)$

$= r_2(iz + 2i + 2)$

$= i(iz + 2i + 2) + 1$

$= -z - 2 + 2i + 1$

$= -z - 1 + 2i$

Une composée de rotation est à nouveau une rotation, donc r admet un seul point fixe z_p :

$z_p = r(z_p) \Leftrightarrow z_p = -z_p - 1 + 2i$

$\Leftrightarrow z_p = -\frac{1}{2} + i$

donc $r(z) = -z - 1 + 2i = e^{i\pi} z + \underbrace{(1 - e^{i\pi}) z_p}_{2(-\frac{1}{2}+i) = -1+2i}$

4) $r = s \circ t_1$

$\Leftrightarrow \underbrace{s^{-1} \circ r}_{s} = t_1 \Leftrightarrow t_1 = s \circ r$

$z' = t_1(z) = s \circ r(z) = s(-z - 1 + 2i) = z + 1 - 2i + 2i$

$= z + 1$

t_1 est la translation de vecteur $\vec{u}_1(1)$.

Q4

Considérons l'ellipse d'éq. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où, $m \in \mathbb{R}$

1) éq$^{\text{on}}$ des tangentes à l'ellipse de pente m : $T \equiv y = mx + k$ (2)

droite et tangente ont un point en commun

éq: $(x, mx+k)$ avec $k \in \mathbb{R}$

où de où $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+k)^2}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2b^2$

$\Leftrightarrow (b^2 + m^2a^2)x^2 + 2mka^2 x + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$ où

T est tgte à $(E) \Leftrightarrow$ où admet une solution unique

$\Delta = (mka^2)^2 - (b^2 + m^2a^2)(a^2k^2 - a^2b^2) = 0$

$\Leftrightarrow m^2k^2a^4 - b^2a^2k^2 + a^2b^4 - m^2a^2k^2a^2 + m^2a^4b^2 = 0$

$\Leftrightarrow k^2 = b^2 + m^2a^2$

$T_1 \equiv y = mx + \sqrt{b^2 + m^2a^2}$

$T_2 \equiv y = mx - \sqrt{b^2 + m^2a^2}$

autre méthode : éq de la tangente au point (x_0, y_0)

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow b^2xx_0 + a^2yy_0 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow y = \underbrace{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}_{m} x + \frac{b^2}{y_0}$

$a \neq 0$ (car c'est une ellipse) (de même $b \neq 0$)

$y_0 \neq 0$, car si $y_0 = 0$, ce sont les points $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ qui admettent des tangentes verticales (pente $\notin \mathbb{R}$)

ainsi $x_0 = -\frac{a^2}{b^2} m y_0$

$$\frac{\left(\frac{a^4}{b^4} m^2 y_0^2\right)}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^4}{b^2} m^2 y_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} m^2 y_0^2 + y_0^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 m^2 y_0^2 + b^2 y_0^2 = b^4$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 = \frac{b^4}{\underbrace{a^2 m^2 + b^2}_{>0}}$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$$

$$T \equiv y = mx + \frac{b^2}{\frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}} = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$T \equiv y = mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

2) $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\quad \frac{9}{25} + \frac{144}{9 \cdot 25} = \frac{81+144}{9 \cdot 25} = \frac{225}{225} = 1 \Rightarrow P \in (E)$

$$t \equiv \frac{x}{\frac{25}{3}} + \frac{y}{\frac{9}{12}} = 1 \Leftrightarrow t \equiv \frac{3x}{25} + \frac{4}{15} y = 1$$

$$\Leftrightarrow t \equiv y = -\frac{15}{4} \cdot \frac{3}{25} x + \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow t \equiv y = \frac{-9}{20} x + \frac{15}{4}$$

vecteur directeur $\left(1 ; -\frac{9}{20}\right)$

3) perpendiculaire à t passe de la pente : $\frac{20}{9}$

vecteur directeur $\left(1 ; \frac{20}{9}\right)$ tq produit scalaire donne 0.

on utilise 1)

$T_1 \equiv y = \frac{20}{9}x + \sqrt{25 \cdot \left(\frac{29}{9}\right)^2 + 9}$

$\equiv y = \frac{20}{9}x + \sqrt{\frac{10729}{81}}$

$T_2 \equiv \quad y = \frac{20}{9}x - \sqrt{\frac{10729}{81}}$

Q1) $Q \notin (E)$

éq de Ce Tangente: $d \equiv y = mx + p$

$Q \in d \Rightarrow p = 2 + \frac{35}{9}m$

$d \equiv y = mx + (2 + \frac{35}{9}m)$

$= (m + \frac{35}{9}m)x + 2$

$= \frac{44}{9}mx + 2$

dn (E):

$\frac{x^2}{25} + \frac{(\frac{44}{9}mx + 2)^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{1936}{729}m^2x^2 + \frac{176}{81}mx + \frac{4}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{25} + \frac{1936}{729}m^2\right)x^2 + \frac{176}{81}mx - \frac{5}{9} = 0$

$\Delta = \left(\frac{176}{81}\right)^2 m^2 + 4 \cdot \frac{5}{9}\left(\frac{1}{25} + \frac{1936}{729}m^2\right)$

$= \frac{38720}{6561}m^2 + \frac{38720}{6561} > 0$

éq. d'une tangente à (E) au point (x_0, y_0)

$$d' \equiv \frac{x x_0}{25} + \frac{y y_0}{9} = 1$$

$Q \in d' \Leftrightarrow -\frac{35}{9} \cdot \frac{x_0}{25} + \frac{2 y_0}{9} = 1$

$\Leftrightarrow -\frac{7 x_0}{45} + \frac{2}{9} y_0 = 1$

$\Leftrightarrow y_0 = \frac{9}{2}\left(1 + \frac{7}{45} x_0\right)$

$= \frac{9}{2} + \frac{7}{10} x_0$

$\left(x_0, \frac{9}{2} + \frac{7}{10} x_0\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{\left(\frac{9}{2} + \frac{7}{10} x_0\right)^2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{81}{4 \cdot 9} + \frac{2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{10} x_0}{9} + \frac{\frac{49}{100} x_0^2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{9}{4} + \frac{7}{10} x_0 + \frac{49}{900} x_0^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{17}{180} x_0^2 + \frac{7}{10} x_0 + \frac{5}{4} = 0$

$x_{0,1} = -\frac{75}{17}$

$x_{0,2} = -3$

$t_1 \equiv -\frac{3}{17} x + \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{90}\left(-\frac{75}{17}\right)\right) y = 1$

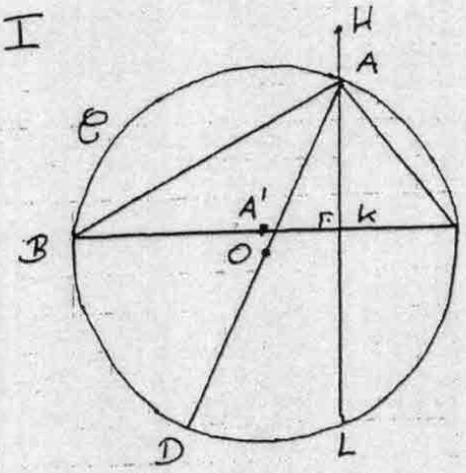
$\equiv -\frac{3}{17} x + \frac{8}{51} y - 1 = 0$

$t_2 \equiv -\frac{3}{25} x + \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{90} \cdot (-3)\right) y = 1$

$\equiv -\frac{3}{25} x + \frac{4}{15} y = 1$

début 2011 : GÉOMÉTRIE

I



1) H = orthocentre $\Rightarrow (BH) \perp (AC)$

C ∈ C et [AD] = diamètre $\Rightarrow (CD) \perp (AC)$

$\Rightarrow (BH) \parallel (CD)$

De même $(CH) \parallel (BD)$

Donc BHCD est un #.

Conséquence : mil[HD] = mil[BC] = K

2) [AD] = diamètre et $L \in C \Rightarrow (AL) \perp (DL)$

3) Conséquence : $(DL) \parallel (A'K)$

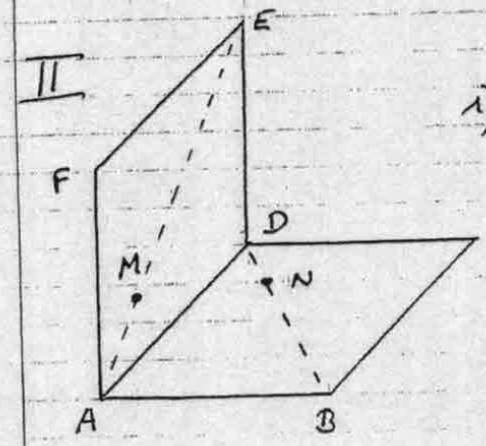
Dans le triangle HDL on a d'après ce qui précède : A' = mil[HD] et $(DL) \parallel (A'K)$,

donc K = mil[HL]

Comme en plus $(HL) \perp (BC)$, on obtient : $L = s_{(BC)}(H)$

4) De même : $s_{(AC)}(H) \in C$ et $s_{(AB)}(H) \in C$.

II



1) $\mathcal{R} = (D ; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DE})$

$\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM} = \vec{DA} + k\vec{AE} = \vec{DA} + k(\vec{DE} - \vec{D}$

$= (1-k)\vec{DA} + k\vec{DE} \Rightarrow M(1-k ; 0 ; k)$

$\vec{DN} = k\vec{DB} = k(\vec{DA} + \vec{DC}) \Rightarrow N(k ; k ; 0)$

$\vec{MN}(2k-1 ; k ; -k)$

Donc $MN = \sqrt{(2k-1)^2 + k^2 + (-k)^2} = \sqrt{6k^2 - 4k + 1}$

2) Poser $f(k) = 6k^2 - 4k + 1$, $D_f = \mathbb{R}$, C_f est une parabo

on a un minimum pour $k_0 = -\frac{(-4)}{2 \cdot 6} = \frac{1}{3}$; la valeur de ce minimum est $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

Donc $MN = \sqrt{f(k)}$ est minimale pour $k = \frac{1}{3}$ et la valeur de ce minimum est $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) t = translation de vecteur $\vec{OC}$

$t(M) = M' \iff z' = z + i$

$r_2 = r_B \circ t$: $M'' = r_2(M) = r_B \circ t(M) = r_B(M')$

avec : $z' = z + i$

d'où : $z'' = i(z+i) + 2 = iz + 1$

r_2 est la rotation d'angle $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ et de centre le pt F tel que $z_F = i z_F + 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

3) $r_2 = r \circ r_1 \iff r = r_2 \circ r_1^{-1}$

$r_1^{-1}(M) = M' \iff z' - 2i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 2i) \iff z' = iz + 2 + 2i$

$r(M) = r_2 \circ r_1^{-1}(M) = r_2(M') = M''$

avec $z' = iz + 2i + 2$

d'où $z'' = i(iz + 2i + 2) + 1 = -z - 1 + 2i$

r est la sym. centrale (= rotation d'angle π) de centre P tel que $z_P = -z_P - 1 + 2i \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2} + i\right)$

4) $r = s \circ t_1 \iff t_1 = s^{-1} \circ r = s \circ r$

$t_1(M) = s \circ r(M) = s(M') = M''$

avec $z' = -z + 2i - 1$

d'où $z'' = -(-z + 2i - 1) + 2i = z + 1$

t_1 est la translation de vecteur $\vec{u}(1)$

IV 1) $(E) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) $\quad T \equiv y = mx + k$ (2)

(2) ds (1) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+k)^2}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2 b^2$

$(b^2 + m^2 a^2)x^2 + 2mka^2 x + a^2 k^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (*)$

T est tgte à $(E) \iff (*)$ admet une sol. unique

$\Delta' = (mka^2)^2 - (b^2 + m^2 a^2)(a^2 k^2 - a^2 b^2) = 0$

$\iff m^2 k^2 a^4 - b^2 a^2 k^2 + a^2 b^4 - m^2 k^2 a^4 + m^2 a^4 b^2 = 0$

$\iff k^2 = b^2 + m^2 a^2$

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'algèbre et de probabilité

2 mars 2011
15h-18h

I. 1. Les douze délégués de classe de première d'un lycée doivent élire en leur sein un représentant au conseil d'éducation. Il n'y a que deux candidats, Albert et Bernadette.

Un candidat est élu s'il obtient la majorité absolue des voix ; tous les délégués doivent voter pour l'un ou pour l'autre des deux candidats.

a. Déterminer le nombre de votes possibles.

b. Déterminer le nombre de votes possibles pour qu'Albert soit élu, puis pour que Bernadette le soit.

c. Déterminer le nombre de votes possibles pour qu'il y ait ballotage.

2. Dans une classe de première A, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur 10 l'a eu du premier coup.

a. On interroge au hasard un élève de la classe. Quelle est la probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup ?

b. On interroge un élève au hasard parmi ceux qui ont eu leur permis du premier coup. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?

(5 points)

II. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}; \vec{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives 4+2i et -2-i.

Soit f la fonction qui à tout point M différent de B et ayant pour affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$$

1. Interpréter géométriquement le module de z', puis un argument de z'.

2. Déterminer la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de z' en fonction de la partie réelle x et de la partie imaginaire y de z.

3. Déterminer, puis construire les ensembles suivants :
   a. E_1 ensemble des points M tels que $|z'| = 1$
   b. E_2 ensemble des points M tels que $|z'| = 2$
   c. E_3 ensemble des points M tels que z' soit un réel
   d. E_4 ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

(7 points)

III. Soient les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$ et $v_n = u_n - 6$

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$
3. Etudier la convergence de la suite (u_n).
4. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$n \cdot w_n = (n+1) \cdot w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Calculer le terme w_{10}. Quelle est la nature de la suite (w_n) ? Justifier et calculer le terme : w_{2011}

(5 points)

IV. On donne la fraction algébrique :

$$\frac{\cos x - 3\sin x + 3}{3\cos x - \sin x + 1}$$

En précisant les conditions d'existence, exprimer cette fraction aussi simplement que possible en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$.

(3 points)

Q1

12 délégués de classe

1. a. vote du 1er délégué : 2
:
12e ——— 2

2^{12} votes possibles

b. On est élu si 7 parmi 12 ou 8, 9, 10, 11, 12 parmi 12 délégués votent pour le candidat.

une liste non ordonné sans répétition

$$\sum_{i=7}^{12} C_{12}^{i} = 1586$$

le nombre de votes permettant à Bernadette d'être élu est identique.

c. Bellotage : anthentxchveclere Ulehl

6 délégués parmi 12 votent pour un candidat

$C_{12}^{6} = 929$ votes

2. G : choisi au hasard un garçon $P(G) = \frac{1}{4}$

A : avoir son permis du premier coup

$\mathbb{P}(A \mid \overline{G}) = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(A \mid G) = \frac{1}{10}$

a. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|G)\,\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(A|\overline{G})\,\mathbb{P}(\overline{G})$

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{40} + \frac{10}{40}$

$= \frac{11}{40}$

b. $\mathbb{P}(G \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|G) \cdot \mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(A)}$

$= \dfrac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{11}{40}}$

$= \frac{1}{11}$

Q2

Plan rapporté au plan complexe.

$A(4+2i)$

$B(-2-i)$

$$f: \quad M \in \mathbb{C} \setminus \{-2-i\} \longrightarrow M'$$

$$z \longmapsto \frac{z-4-2i}{z+2+i}$$

1. $z' = \dfrac{z-4-2i}{a+bi-2+i} \overset{a,b \in \mathbb{R}}{=} \dfrac{a+bi-4-2i}{(a+2)+(b+1)i} \cdot \dfrac{(a+2)-(b+1)i}{(a+2)-(b+1)i}$

$$= \frac{a^2+2a-abi-ai+abi+2bi+b^2+b-4a-8+4(b+1)i-2ai-4i-2(b+1)}{(a+2)^2+(b+1)^2}$$

$$= \frac{a^2-2a+b^2+b-10}{(a+2)^2+(b+1)^2} + i\,\frac{6b-3a}{(a+2)^2+(b+1)^2}$$

$$|z'| = \frac{|z-(4+2i)|}{|z-(-2-i)|} = \frac{AM}{BM}$$

rapport entre la distance de M' vers et de la distance de M vers B.

$$\arg(z') = \arg(z-(4+2i)) - \arg(z-(-2-i))$$

$$= (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$$

$$= (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$$

mesure de l'angle orienté

2. $x' = \dfrac{x^2-2x+y^2-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}$

$y' = \dfrac{6y-3x}{(x+2)^2+(y+1)^2}$

3 a. $|z'|=1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in$ méd $[AB]$

E_1 est la médiatrice de $[AB]$

b. $|z'|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-4-2i}{z+2+i}\right| = 2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-2)^2 = 4\left[(x+2)^2+(y+1)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-4y+4 = 4\left(x^2+4x+4+y^2+2y+1\right)$

$\Leftrightarrow -3x^2-24x-3y^2-12y = 0$

$\Leftrightarrow x^2+8x+y^2+4y = 0$

$\Leftrightarrow x^2+8x+16+y^2+4y+4 = 16+4$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y+2)^2 = (\sqrt{20})^2$

E_2 est le cercle de centre $\Omega(-4;-2)$ et de rayon $r=2\sqrt{5}$

$B \notin E_2$ car $|z'_B| = 0 \neq 2$

c. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 6y-3x=0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$

E_3 est la droite d'éq. $y=\frac{1}{2}x$ privée du point B.

4. $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-y+\frac{1}{4} = 10+1+\frac{1}{4} = \frac{45}{4}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2$ E_4 est le cercle de centre $\Omega'(1;\frac{1}{2})$

Q3

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4 \end{cases}$$

$v_n = u_n - 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3} u_n + 4 - 6$

$= \frac{1}{3} u_n - 2$

$= \frac{1}{3} (u_n - 6)$

$= \frac{1}{3} v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \\ v_0 = -5 \end{cases}$$ déf. récurrente

$v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 5$ déf. explicite

2) $u_n = v_n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow u_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{-5 \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}}_{\to 0} + 6 = 6$

$\to 6$

4) $\begin{cases} n \cdot w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \\ w_0 = 1 \end{cases}$

$w_0 = 1$

$1 \cdot w_1 = 2 \cdot w_0 + 1 \iff w_1 = 3$

$2 \cdot w_2 = 3 \cdot w_1 + 1 \iff w_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$

$3 \cdot w_3 = 4 \cdot w_2 + 1 \iff w_3 = \frac{20}{3} + \frac{1}{3} = 7$

$4 \cdot w_4 = 5 \cdot w_3 + 1 \iff w_4 = \frac{35}{4} + \frac{1}{4} = 9$

$w_5 = 11$

$w_6 = 13$

$w_7 = 15$

$w_8 = 17$

$w_9 = 19$

$w_{11} = 21$

Hyp (w_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

(*)

$w_1 = w_0 + 2$

Supposons que $w_n = w_0 + 2n = 1 + 2n$

et prouvons que $w_{n+1} = 1 + 2(n+1)$

$(n+1)\, w_{n+1} = (n+2)\, w_n + 1$

$\iff (n+1)\, w_{n+1} = n - 1 + n\,2n + 2 \cdot 1 + 4n + 1$

$\iff \underbrace{(n+1)}_{>0}\, w_{n+1} = 2n^2 + 5n + 3$

$\iff w_{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n+1}$

$= \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1}$

$= 2n + 3 = 2(n+1) + 1$

Par récurrence (*) a w_n (*)

$w_n = 2w_{n-1} + 1$

$(n+1)\, w_{n+1} = (n+2)\, w_n$

$w_{2011} = 2 \cdot 2011 + 1$

$= 4023$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$n_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$

$n_2 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$

104

$$\frac{\cos x - 3\sin x + 3}{3\cos x - \sin x + 1}$$

$3\cos x - \sin x + 1 \neq 0$ car

Soit ψ un angle vérifiant $\tan\psi = \frac{-1}{3}$ ex $\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$

car $\Leftrightarrow \frac{3}{\cos\psi}\cos(x-\psi) \neq -1$

$\Leftrightarrow \cos(x-\psi) \neq -\frac{1}{3}\cos\psi$ ($\frac{1}{3} = \tan\psi$)

$\Leftrightarrow \cos(x-\psi) \neq \sin\psi$

$\Leftrightarrow \cos(x-\psi) \neq \cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$

$\Leftrightarrow x-\psi \neq \frac{\pi}{2}-\psi+k2\pi$ et $x-\psi \neq \psi-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi$ et $x \neq 2\psi-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Posons $t = \tan\frac{x}{2}$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi ;\ 2\psi-\frac{\pi}{2}+k2\pi ;\ \pi+2k\pi\right\}$ (1)

$\left(\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi+2k\pi\right)$

alors
$$\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\frac{2t}{1+t^2} + 3}{3\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 1} = \frac{1-t^2-6t+3+3t^2}{3-3t^2-2t+1+t^2} = \frac{2t^2-6t+4}{-2t^2-2t+4}$$

$$= -\frac{t^2-3t+2}{t^2+t-2}$$

$$= -\frac{(t-2)(t-1)}{(t+2)(t-1)}$$

ici on pourrait résoudre $\tan\frac{x}{2} = -2$ et $\tan\frac{x}{2} = 1$ pour finir par C.E.

$z = \dfrac{t-2}{t+2}$ pour $t = \tan\frac{x}{2}$ avec $x \in D$

fonction écrit en fonction de t

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Mardi, le 31 janvier 2012

15h-18h

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

1) Étudiez f : domaine de définition, continuité, branches infinies et asymptotes éventuelles, dérivabilité à gauche en -1, sens de variation, tableau de variation, extrema, courbe représentative C_f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

2) Soit h la restriction de f à $]-\infty;-1]$. Démontrez que h définit une bijection de $]-\infty;-1]$ sur un ensemble J à préciser. Représentez h^{-1} dans le même repère. La fonction h^{-1} est-elle dérivable à gauche en 0? Justifiez ! Calculez $\left(h^{-1}\right)'(-\sqrt{2})$.

Indication : calculez $h(-3)$.

3) Soit A la surface du plan délimitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=-3$. Calculez le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface A.

4 + 1,5 + 1,5 = 7 points

II. 1) Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\ln\left|e^x-m\right|$, m étant un paramètre réel non nul et soit C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé du plan.

a) Pour tout réel non nul m, précisez le domaine de définition de f_m, étudiez le sens de variation de f_m et déterminez les asymptotes éventuelles à C_m.

b) Soit q la restriction de f_1 à $]-\infty;0[$ et p la restriction de f_1 à $]0;+\infty[$.

Démontrez que q (resp. p) définit une bijection de $]-\infty;0[$ (resp. $]0;+\infty[$) sur un ensemble I (resp. J) à préciser. Déterminez l'expression analytique de q^{-1} et de p^{-1}. Déduisez-en que $C_1 \cup C_{-1}$ admet un axe de symétrie que l'on précisera. Tracez C_1 et C_{-1} dans un même repère orthonormé.

2) Soit g la fonction définie par $g(x)=\left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^{x}\right)$.

a) Démontrez : $\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\ln(x+1)<x$.

b) Étudiez g : domaine de définition, branches infinies et asymptotes éventuelles, sens de variation, tableau de variation, courbe représentative C_g dans le même repère orthonormé que C_1 et C_{-1}.

3) Soit a un réel strictement positif. Calculez l'aire $A(a)$ de la partie du plan délimitée par les courbes C_g et C_{-1} et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

4,5 + 4,5 + 2 = 11 points

III. Calculez $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(3x)\cdot\cos^5(3x)\,dx$ après avoir justifié son existence.

2 points

Q1

$f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ C.E $\rightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

1)

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

1) $\text{dom } f =]-\infty ; -1] \cup]1 ; +\infty[$

continuité : $\text{dom}_c f =]-\infty ; -1] \cup]1 ; +\infty[$

en tant que composée de fonctions continues

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

A.V. $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[x\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}} - 1 \right) \right] + 1$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} x \cdot \frac{1+\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \Big/ \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}} + 1$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{(1-\frac{1}{x})(\sqrt{\quad} + 1)} + 1$

$\to 1 \quad \to 2 \quad \to 1$

$= 2$

A.O. (en $\pm\infty$) d'éq. $y = x + 2$

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$:

$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$

$$= \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{(x+1)}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

dérivabilité en -1 :

$\lim_{x \to (-1)^+}$ n'a pas de sens

$$\lim_{x \to (-1)^-} \left(\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}}_{\to 0} \right) = 0$$

$f'_g(-1) = 0$ → demi-tangente horizontale

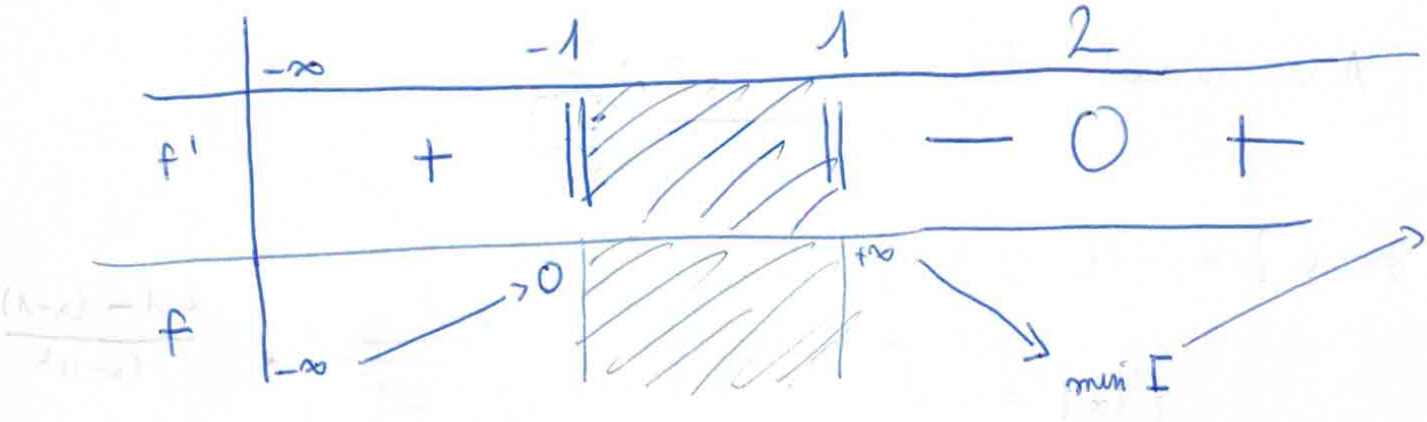
$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \frac{(x+1)}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)}{(x-1)} \geq \frac{(x+1)}{(x-1)^2} \quad \text{avec} \quad x \neq -1$$

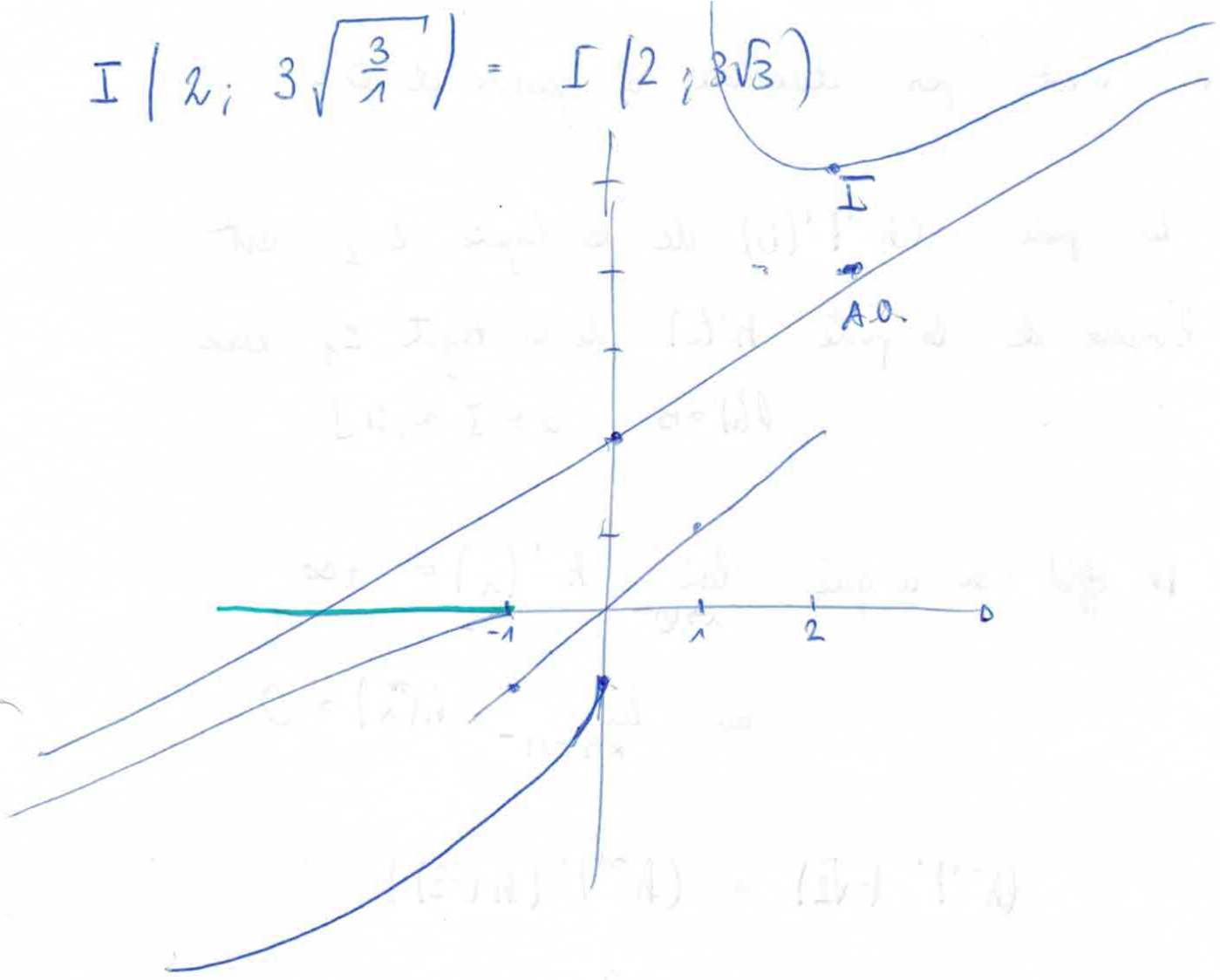
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1-(x+1)}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2} \geq 0$$



$I\left(2 ; 3\sqrt{\frac{3}{1}}\right) = I\left(2 ; 3\sqrt{3}\right)$



2) $h = f|_{]-\infty ; -1]}$

h est continue sur $]-\infty ; -1]$ et strictement croissante, c'est donc injective

on a $h =]-\infty ; f(-1)] =]-\infty ; 0] = V$

Ainsi h est une bijection entre $]-\infty ; -1]$ et $]-\infty ; 0]$.

Dans le même repère, on obtient h en traçant le symétrique de f par rapport à la 1ère bissectrice du plan

h^{-1} n'est pas dérivable à gauche de 0 :

la pente $(h^{-1})'(b)$ de la tangente t_2 est l'inverse de la pente $h'(a)$ de la tangente t_1 avec

$$h(a) = b \qquad a \in]-\infty ; 1]$$

En effet on a que $\lim\limits_{x \to 0^-} h^{-1}(x) = +\infty$

ou $\lim\limits_{x \to (-1)^-} h(x) = 0$

$$(h^{-1})'(-\sqrt{2}) = (h^{-1})'(h(-3))$$

$$= \frac{1}{h'(-3)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{-2}{16}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{8}{9\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{18}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

3) $V = \pi \int_{-3}^{-2} (x+1)^2 \frac{(x+1)}{(x-1)} \, dx$

$= \pi \int_{-3}^{-2} \frac{(x+1)^3}{(x-1)} \, dx$

$t = x-1$

$= \pi \int_{-4}^{-3} \frac{(t+2)^3}{t} \, dt$

$= \pi \int_{-4}^{-3} t^2 + 6t + 12 + \frac{8}{t} \, dt$

$= \pi \left[\frac{t^3}{3} + 3t^2 + 12t + 8 \ln|t| \right]_{-4}^{-3}$

$= \pi \left[-\frac{27}{3} + 27 - 36 + 8 \ln 3 + \frac{64}{3} - 48 + 48 - 8 \ln \right.$

$= \pi \left[\frac{37}{3} - 9 + 8 \ln \frac{3}{4} \right]$

$= \pi \left(\frac{10}{3} + 8 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right) \ cm^3$

Q2

1) $f_m(x) = \ln|e^x - m|$, $m \in \mathbb{R}_0$

Cm la courbe représentative de f_m dans un RON du plan.

a) $e^x - m \neq 0 \iff e^x \neq m$ → Ejs vrai si $m \leq 0$

→ $\iff x \neq \ln m$ si $m > 0$

si $m > 0$

Dom $f_m = \mathbb{R} \setminus \{\ln m\}$

si $m \leq 0$

Dom $f_m = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln \underbrace{|e^x - m|}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|e^x - m|}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x - m} \cdot e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln|e^x - m| - x = \lim_{x \to +\infty} \ln \underbrace{\frac{|e^x - m|}{e^x}}_{\to 1}$$

$$= 0$$

A.O. d'équation $y = x$ en $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln|e^x - m| = \ln|m|$$

A.H d'équation $y = \ln|m|$ en $-\infty$

si $m \geq 0$,

calculons $\lim_{x \to \ln m} \ln|e^x - m| = -\infty$

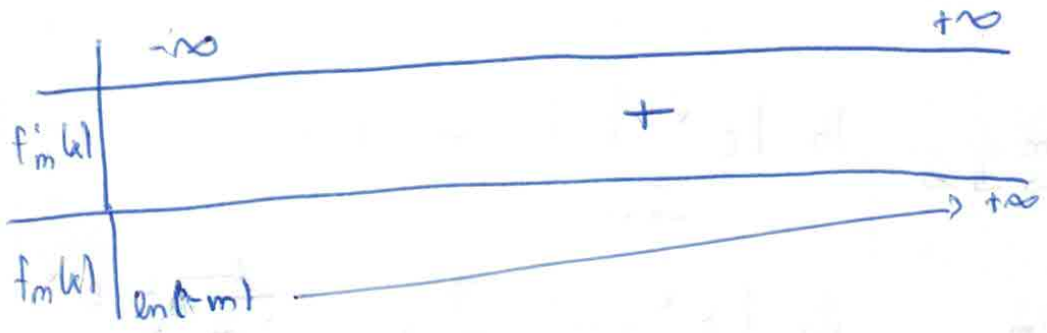
A. V. d'éq $x = \ln m$

fixons $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

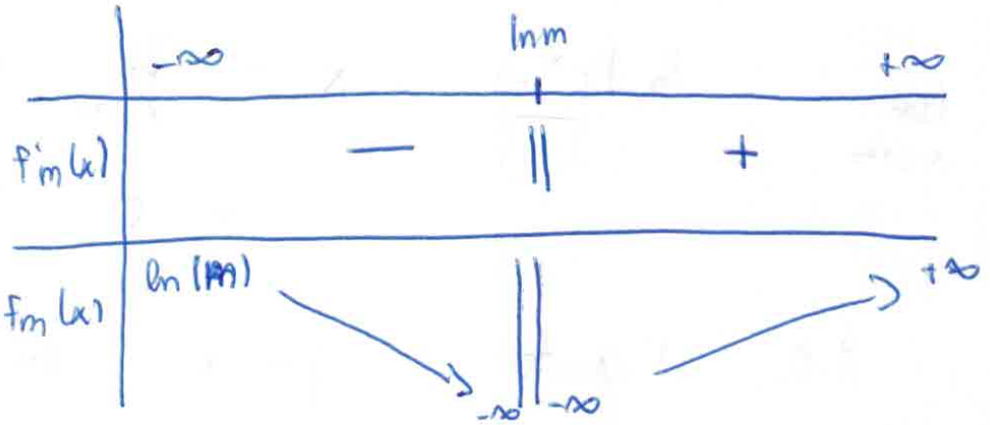
$\forall x \in D_m$, on a

$$f'_m(x) = \frac{1}{e^x - m} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x - m}$$

si $m < 0$



si $m > 0$



$e^x - m \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq m$

$\Leftrightarrow x \geq \ln m$

b) $f_1(x) = \ln|e^x - 1|$

Soit $q := f_1|_{]-\infty;0[}$ $\quad q' < 0$

$p = f_1|_{]0;+\infty[}$ $\quad p' > 0$ } voir a)

Comme q (resp. p) est continue et strictement décroissante (resp. str. croissante) donc injectif.

ainsi q est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $I =]-\infty;0[$

p est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{I} =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

$y = \ln|e^x - 1|$ $\quad x \in]-\infty;0[$

$\Leftrightarrow e^y = |e^x - 1|$

$\Leftrightarrow e^y = 1 - e^x$

$\Leftrightarrow ex = 1 - e^y$ avec $y \in]-\infty;0[$

$\Leftrightarrow x = \ln|e^y - 1|$

$q^{-1}(x) = \ln|e^x - 1|$

$e^y = e^x - 1$ pour $x \in]0;+\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^x = e^y + 1$

$\Leftrightarrow x = \ln|e^y + 1|$

$\Leftrightarrow p^{-1}(x) = f_1(x)$

Considérons $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_{-1}$

$\mathcal{C}_{f_1}$ est obtenue à partir de q et p

si on réflète q et p (soit f_1) par rapport à la 1ère bissectrice du plan, on obtient à nouveau q et f_{-1}

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_{-1}$ admet $y = x$ comme axe de symétrie.

2) Soit $g(x) = (1+e^{-x}) \ln(1+e^x)$

a) Posons $h(x) = \ln(x+1) - x \quad \forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$= \frac{1-x-1}{x+1}$$

$$= \frac{-x}{x+1}$$

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$-$	
$x+1$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	$\|\|$	$+$		$-$	
$h(x)$	$\|\|-\infty$	↗	$0 \|\| 0$	↘	$-\infty$

h sera toujours <0 en 0 sauf en 0, mais c'est prévu dans l'énoncé

b) $\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 1} \underbrace{\ln(1+e^{x})}_{\to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 1} \underbrace{\frac{\ln(1+e^{x})}{x}}_{\to 1} = 1$$

(H) $\frac{e^x}{1+e^x} \to 1$

$$\lim_{x \to +\infty} (1+e^{-x}) \ln(1+e^{x}) - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

(H)

$$= 0 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x} \cdot e^x}{e^x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x}$$

$$= 0$$

A.O en $+\infty$ d'éq. $y = x$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to +\infty} \underbrace{\ln(1+e^{x})}_{\to 0^+}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\frac{1}{1+e^{-x}}}$$

(H)

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{(1+e^{-x})^2} e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}(1+e^{-x})^2}{1+e^x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}(1+2e^{-x}+e^{-2x})}{1+e^x}$$

A.H en $-\infty$: $y = 1$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}+2e^x+1}{1+e^x} = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + (1+e^{-x}) \frac{e^x}{1+e^x}$

$= -e^{-x} \ln(1+e^x) + 1$

or $y = e^x > 0 \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $\ln(1+e^x) < e^x$

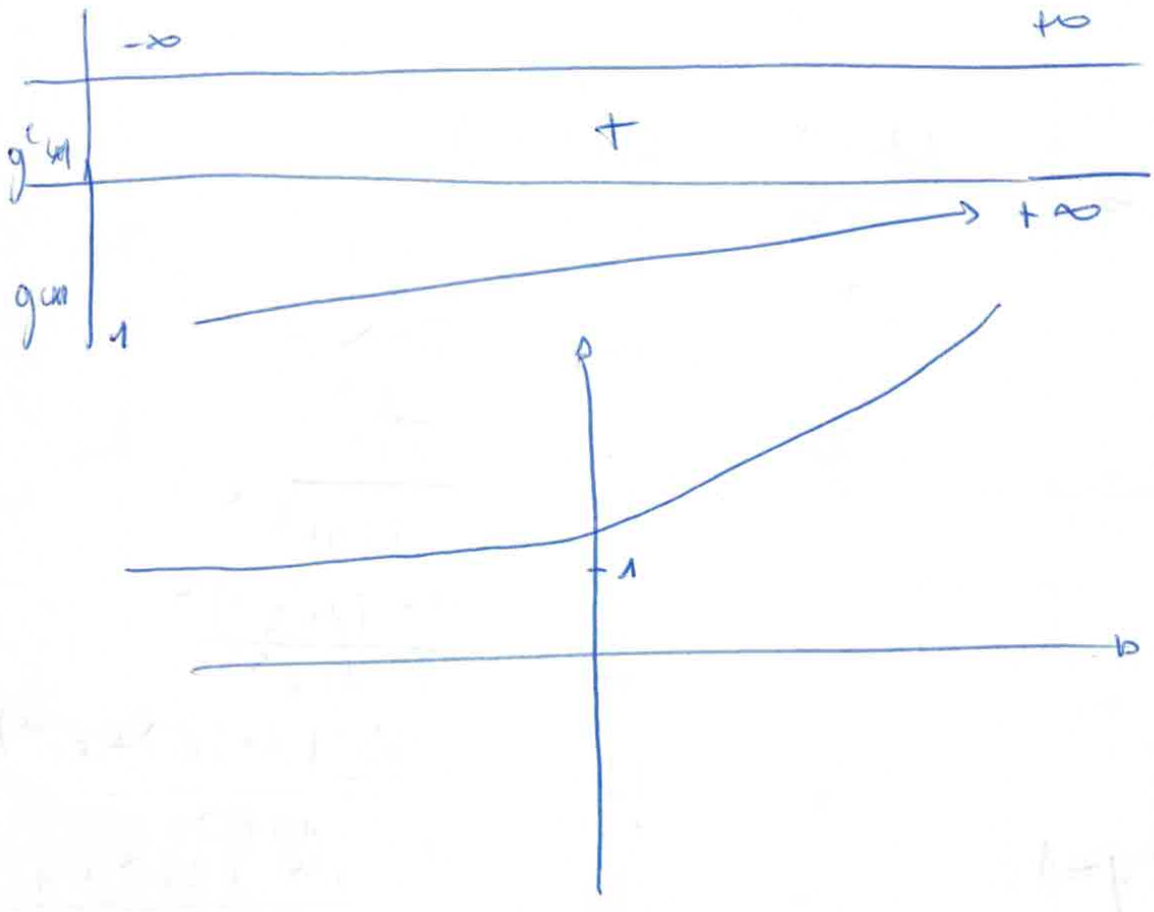
donc $g'(x) \geq \underbrace{-e^{-x}}_{<0} \ln(1+e^x) + 1$

$> -e^{-x} \cdot e^x + 1$

$\geq -1+1$

$= 0$

donc $g'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$



$$A(a) = \int_0^a \left[(1+e^{-x}) \ln(1+e^x) - \ln(1+e^x) \right]$$

$$= \int_0^a e^{-x} \ln(1+e^x)\, dx$$

$t = e^x$

$\ln(1+e^x)$	e^{-x}
$\frac{e^x}{1+e^x}$	$-e^{-x}$

$$= \left[-e^{-x} \ln(1+e^x) \right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+e^x}\, dx$$

$$= \text{———} + \int_1^{e^a} \frac{1}{t(t+1)}\, dt$$

$$= -e^{-a} \ln(1+e^a) + \ln(2) + \int_1^{e^a} \frac{1}{t} + \frac{-1}{t+1}$$

$$= -e^{-a} \ln(1+e^a) + \ln(2) + \left[\ln t \right]_1^{e^a} - \left[\ln|1+t| \right]_1^{e^a}$$

$$= -e^{-a} \ln(1+e^a) + \ln(2) + a - \ln(1+e^a) + \ln(2)$$

Q3

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(3x)\cos^5(3x)\,dx$$

poser $t = 3x \Leftrightarrow x = \frac{t}{3}$

$\Leftrightarrow dt = 3dx$

$x = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^2(t)\cos^5(t)$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^5(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^5(t)\,dt - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos^7(t)\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{18}\cos^6(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{24}\cos^8(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{72}$$

I $f(x) = (x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

1) $\mathrm{dom}\, f =]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[= \mathrm{dom}_c f$

$\lim_{x\to 1^+} \underbrace{(x+1)}_{\to 2}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 0^+,\ \frac{x+1}{x-1}\to 2} = +\infty$ $\quad$ A.V. ; $x=1$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 1} = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1}\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 1} = 1$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left[f(x)-x\right]}_{\text{f.i. } "(+\infty)-(+\infty)"} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2\cdot\frac{x+1}{x-1} - x^2}{(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(x+1)^3 - x^2(x-1)}{x-1}}{(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+1}{x-1}}{(x+1)\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2\left(4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x\cdot\underbrace{\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}_{\to 1} + 1\right]}_{\to 2}}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

A.O.D. : $y = x+2$

$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right] = 2$ $\quad$ A.O.G. : $y = x+2$ $\quad$ 2

f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$,

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$,

$$f'(x) = 1\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\underbrace{\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}}_{=-2}$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1} + \frac{-(x+1)}{(x-1)^2}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{x^2-1-x-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

dérivabilité à gauche en -1 :

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 0$$

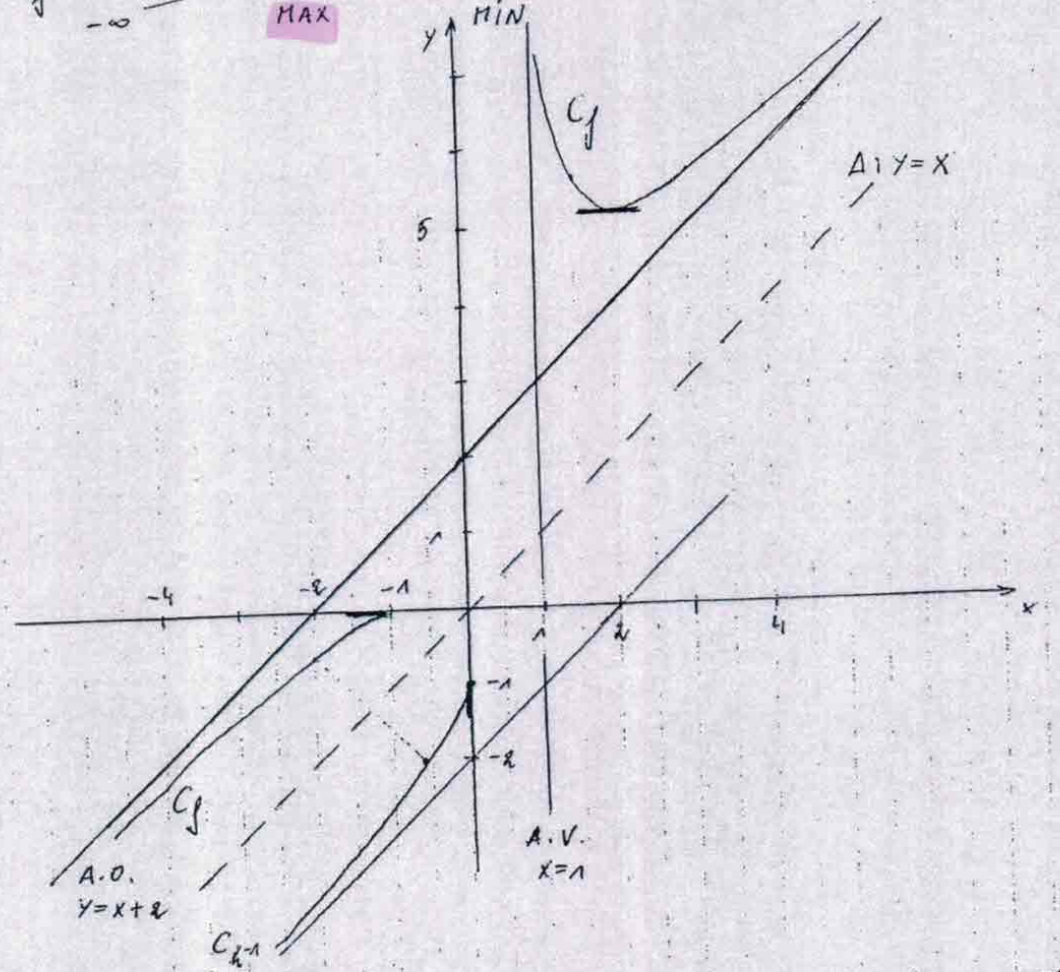
donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'(-1) = 0$.

tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	‖	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0 (MAX)	‖	$+\infty$ ‖	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

tableau de valeurs :

x	-4	-2	-1	$1,5$	2	3	4
$f(x)$	$-2,3$	$-0,6$	0	$5,6$	$5,2$	$5,7$	$6,5$



2) $h = f|_{]-\infty ; -1]}$. Comme h est une fonction continue (1)
et strictement croissante sur $]-\infty ; -1]$, h est une bijection
de $]-\infty ; -1]$ sur $]-\infty ; 0]$. (+ courbe représentative)

(2) h^{-1} n'est pas dérivable en 0 car son graphe admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0, image de la demi-tangente horizontale au graphe de h au point d'abscisse -1.

$h(-3) = (-2)\sqrt{\frac{-3-2}{-4}} = -\sqrt{2}$; $h'(-3) = \frac{10}{16}\sqrt{\frac{-4}{-2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

h^{-1} est dérivable sur $]-\infty ; 0[$ car h est dérivable sur $]-\infty ; -1[$
et h' ne s'annule pas sur $]-\infty ; -1[$.

justification

$(h^{-1})'(-\sqrt{2}) = \frac{1}{h'(-3)} = \frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$.

3) $V = \pi \int_{-3}^{-2} [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-3}^{-2} \frac{(x+1)^3}{x-1} \, dx = \pi \int_{-3}^{-2} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x-1} \, dx$

HORNER

	1	3	3	1
1		1	4	7
	1	4	7	8

$= \pi \int_{-3}^{-2} \left(x^2 + 4x + 7 + \frac{8}{x-1} \right) dx$

$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 7x + 8 \cdot \ln|x-1| \right]_{-3}^{-2}$

$= \pi \left(\left[\frac{-8}{3} + 8 - 14 + 8 \ln 3 \right] - \left[(-9) + 18 - 21 + 8 \ln 4 \right] \right)$

$= \pi \left(\frac{10}{3} + 8 \ln \frac{3}{4} \right) cm^3$

$\approx 3{,}2418 \, cm^3$

A, !

1) a) $f_m : x \longmapsto \ln|e^x - m|$ $\quad (m \in \mathbb{R})$

si $\boxed{m = 0}$, $f_0(x) = \ln|e^x| = x$ et $\mathrm{dom}\, f_0 = \mathbb{R}$.

Dans la suite, on considère les cas où $m \neq 0$.

C.E. : $e^x - m \neq 0 \iff e^x \neq m$

si $\boxed{m < 0}$, $\mathrm{dom}\, f_m = \mathbb{R}$

si $\boxed{m > 0}$, $\mathrm{dom}\, f_m = \mathbb{R} - \{\ln m\}$

Pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, f_m est dérivable sur $\mathrm{dom}\, f_m$ et $f'_m(x) = \dfrac{e^x}{e^x - m}$.

si $\boxed{m < 0}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f'_m		$+$	
f_m	$\ln\lvert m\rvert$	↗	$+\infty$

si $\boxed{m > 0}$:

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
f'_m		$-$	‖	$+$	
f_m	$\ln\lvert m\rvert$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln|e^x - m| = +\infty$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln|e^x - m| = \ln|m|$ $\quad (m \neq 0)$

A.H. : $y = \ln|m|$ en $-\infty$

si $m > 0$, $\lim\limits_{x \to \ln m} f_m(x) = -\infty$. A.V. : $x = \ln m$ $\quad (m > 0)$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln|e^x - m|}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln\left|1 - \frac{m}{e^x}\right|}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \underbrace{\dfrac{\ln\left|1 - \frac{m}{e^x}\right|}{x}}_{\to 0 \text{ car } \to 0}\right) = 1.$

si $m \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f_m(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left|1 - \frac{m}{e^x}\right|}{x} = 0.$

A.O. : $y = x$ en $+\infty$

b) Comme $q = f_{-1}|_{]-\infty;0[}$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$, q est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]-\infty;0[$.
De même, p est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

$\forall x \in]-\infty;0[$,
$\forall y \in]-\infty;0[$,

$y = q(x)$
$\Leftrightarrow y = \ln|e^x - 1|$
$\Leftrightarrow e^y = |e^x - 1|$ (str. négatif sur $]-\infty;0[$)
$\Leftrightarrow e^y = 1 - e^x$
$\Leftrightarrow e^x = 1 - e^y$
$\Leftrightarrow x = \ln(1 - e^y)$
$\Leftrightarrow x = \ln|e^y - 1|$

Ainsi $q^{-1}(x) = \ln|e^x - 1|$
$= q(x)$

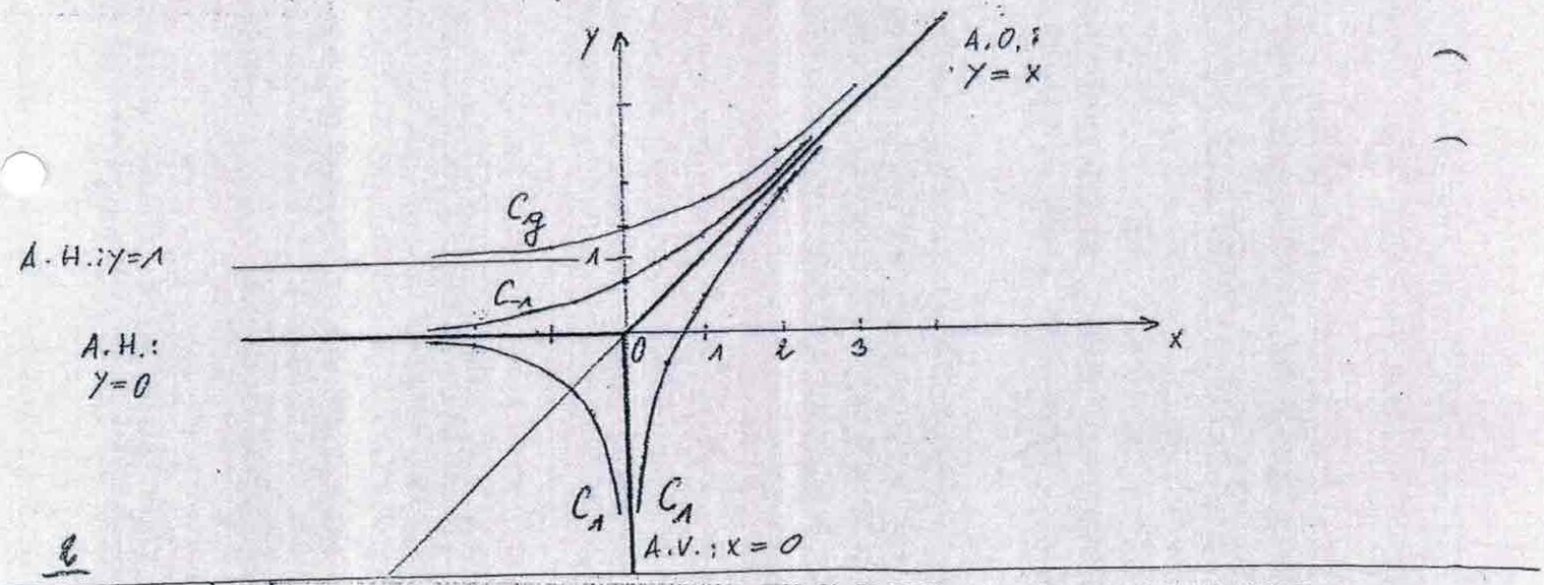
Donc $C_q = C_{q^{-1}}$ et C_q est symétrique par rapport à Δ d'éq. $y = x$ dans un repère orthonormé.

$\forall x \in]0,+\infty[$,
$\forall y \in \mathbb{R}$,

$y = p(x)$
$\Leftrightarrow y = \ln|e^x - 1|$
$\Leftrightarrow e^y = |e^x - 1|$ (str. positif sur $]0;+\infty[$)
$\Leftrightarrow e^y = e^x - 1$
$\Leftrightarrow e^x = e^y + 1$
$\Leftrightarrow x = \ln(e^y + 1)$
$\Leftrightarrow x = \ln|e^y + 1|$

Ainsi $p^{-1}(x) = \ln|e^x + 1|$
$= f_{-1}(x)$

Donc C_{-1} et C_p sont symétriques par rapport à Δ d'éq. $y = x$ dans un repère orthonormé.



c

2) a) Posons $h(x) = \ln(x+1) - x$. alors $h =]-1;+\infty[$

$\forall x \in \text{dom}\, h$, $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
h'	‖	‖	+	0	−	
h	‖	‖ ↗		0 (MAX)	↘	

Donc, pour tout $x \in \text{dom}\, h - \{0\}$, $h(x) < 0$
c'est-à-dire $\ln(x+1) < x$.

0,5

b) $g(x) = (1+e^{-x})\ln(1+e^x)$

$\text{dom } g = \mathbb{R} = \text{dom}_c\, g = \text{dom } g'$

$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to+\infty} \underbrace{\ln(1+e^x)}_{\to 0}$ f.i. "$(+\infty)\cdot 0$"

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{\frac{1}{1+e^{-x}}}$ $\to 0$ / $\to 0$ f.i. "$\frac{0}{0}$"

$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}(1+e^{-x})^2}{1+e^x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{(e^x+1)^2}{e^x+1} = \lim_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1$ A.H.G. : $y=1$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 0 \to 1} \underbrace{\ln(1+e^x)}_{\to+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1+e^{-x})}_{\to 1} \underbrace{\left(\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}\right)}_{\to 1} = 1$

en effet $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} [g(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[(1+e^{-x})\cdot\left(x+\ln(e^{-x}+1)\right) - x\right]$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} + \underbrace{\ln(e^{-x}+1)}_{\to 0} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\underbrace{\ln(e^{-x}+1)}_{\to 0} - x\right]$

$= 0$ A.O.D. $y = x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (-e^{-x})\cdot\ln(1+e^x) + (1+e^{-x})\cdot\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) > 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x}\ln(1+e^x) > -1$

$\Leftrightarrow e^{-x}\ln(1+e^x) < 1 \quad | \cdot e^x$ (str. positif)

$\Leftrightarrow \ln(1+e^x) < e^x$

vrai pour tout réel x, d'après 2)a).

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
g'		$+$	
g		↗	$+\infty$
	1		

3) Étudions la position relative de C_g et C_{-1}.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$g(x) > f_{-1}(x)$

$\Leftrightarrow (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) > \ln(e^x+1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}}_{\text{str. positif}} \cdot \underbrace{\ln(1+e^x)}_{\text{str. positif car } 1+e^x>1} > 0$ vrai pour tout réel x.

Ainsi C_g est situé au-dessus de C_{-1}.

$$A(a) = \int_0^a \left(g(x) - f_{-1}(x)\right) dx$$

$$= \int_0^a e^{-x} \ln(1+e^x)\, dx$$

Par parties :
$u(x) = \ln(1+e^x)$ $\quad v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^x)\right]_0^a + \int_0^a e^{-x}\cdot\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^x)\right]_0^a + \int_0^a \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^x)\right]_0^a + \int_0^a \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \left[-e^{-x}\ln(1+e^x)\right]_0^a + \left[x - \ln(1+e^x)\right]_0^a$$

$$= \left[x - (1+e^{-x})\ln(1+e^x)\right]_0^a$$

$$= \left[a - (1+e^{-a})\ln(1+e^a)\right] - \left[0 - 2\ln 2\right]$$

$$= \underline{\underline{a - (1+e^{-a})\ln(1+e^a) + 2\ln 2}}$$

$$= a - g(a) + 2\ln 2$$

2

$$\lim_{a\to+\infty} A(a) = \lim_{a\to+\infty} \text{Étude} \underbrace{-\left[g(a)-a\right]}_{\to 0 \text{ cf. étude}} = 2\ln 2$$

III $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(3x) \cdot \cos^5(3x)\, dx$ *

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\left(1-\cos^2(3x)\right) \cdot \cos^5(3x)\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\cos^5(3x)\sin(3x) - \cos^7(3x)\cdot\sin(3x)\right] dx$

$= \left[-\frac{1}{18}\cos^6(3x) + \frac{1}{24}\cos^8(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= \left(0+0\right) - \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right)$

$= \frac{4}{72} - \frac{3}{72}$

$= \frac{1}{72}$

* l'intégrale existe car $f : x \longrightarrow \sin^3(3x)\cdot\cos^5(3x)$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{6}]$.

2

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 2 février 2012

15H00 – 18H00

I. Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Etablir une équation de l'ellipse de foyers $F_1(5\ ;\ 2)$ et $F_2(5\ ;\ -4)$ et dont l'excentricité vaut ¾.

2) Etablir une équation de la tangente au point $P(2\ ;\ 0)$ à la conique d'équation $2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 16 = 0$

(4 points)

II. Soit un triangle équilatéral (ABC) de côté a ($a > 0$). Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

1) Montrer que $\forall M$: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD} + \dfrac{a^2}{2}$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}_1$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}^2$

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}_2$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \dfrac{a^2}{2}$.

4) Soit H le point d'intersection de $\mathcal{L}_1$ avec la droite (AD) et M un point d'intersection de $\mathcal{L}_1$ avec $\mathcal{L}_2$. Calculer HM.

(6 points)

III. 1) Démontrer la propriété suivante :

si I est le milieu de [BC], alors $\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$

2) Soit un triangle quelconque ABC. Désignons par a, b et c les longueurs des trois côtés. Montrer que

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

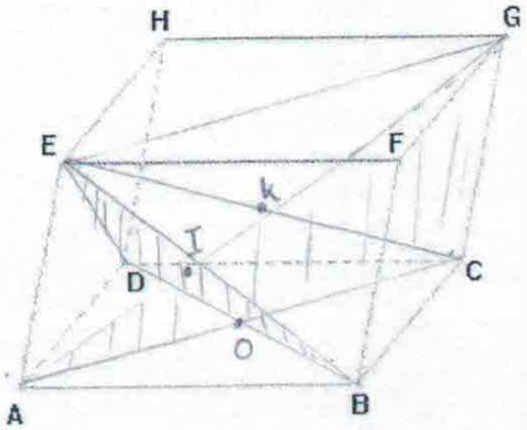
(4 points)

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 2 février 2012

15H00 – 18H00

IV. Soit ABCDEFGH un parallélépipède (voir figure).



La diagonale (AG) coupe le plan (EBD) en I. Le but de l'exercice est de démontrer que I est le centre de gravité du triangle (ACE). Soit O le point d'intersection des diagonales (BD) et (AC) du parallélogramme ABCD.

1) a) Démontrer que les points E, O et I appartiennent au plan (ACG).

   b) Démontrer que les points E, O et I appartiennent au plan (EDB).

   c) En déduire que les points E, O et I sont alignés.

2) Soit K le milieu de [EC]

   a) Représenter le parallélogramme (EACG) sur une figure en indiquant les points I, O et K.

   b) Expliquer pourquoi I est le centre de gravité du triangle (ACE).

(6 points)

Q1

$F_1(5;2)$

$F_2(5;-4)$

axe focal $x = 5$

$\mathcal{E} = \frac{3}{4}$

distance focale : $2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$ $\quad 2 = 3 - 1$

$-4 = -3 - 1$

$\frac{c}{b} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = 4$

$a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

équation de l'ellipse dans le repère $(S(5,-1); \vec{i}; \vec{j})$

$$\frac{X^2}{7} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

avec $X = x - 5$

$Y = y + 1$

dans $(O(0;0); \vec{i}, \vec{j})$

$$\frac{(x-5)^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Autre méthode

$M \in \mathcal{E}$

$\Leftrightarrow \quad MF + MF' = 2b$

$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 + (y-2)^2 + (x-5)^2 + (y+4)^2 = 2b$

$\Leftrightarrow \quad 2(x-5)^2 + y^2 - 4y + 4 + y^2 + 8y + 16 = 2b$

$\Leftrightarrow \quad 2(x-5)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) = 2b - 18$

$\Leftrightarrow \quad 2(x-5)^2 + 2(y+1)^2 = 2b - 18$

2) $2 \cdot 4 - 0 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$

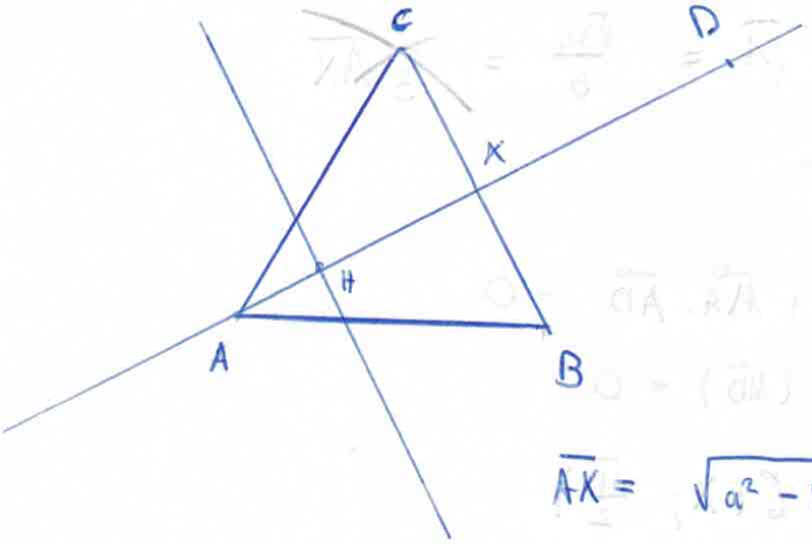
$P \in$ la conique

$2 \cdot 2x - 0 \cdot y + 2(x+2) + 2(y+0) - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x + 2x + 4 + 2y - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = -3x + 6$

Q2



$\overline{AX} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

1) Soit M un point qq. $\overline{AD} = \sqrt{3}a$

$$\vec{MB}\cdot\vec{MC} = (\vec{MA}+\vec{AB})\cdot(\vec{MA}+\vec{AC})$$
$$= \vec{MA}^2 + \vec{MA}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}\cdot\vec{MA} + \underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}_{\frac{a^2}{2}}$$
$$= \vec{MA}^2 + \vec{MA}\cdot\underbrace{(\vec{AC}+\vec{AB})}_{=\vec{AD}} + \frac{a^2}{2}$$

$\vec{AC}+\vec{AB} = 2\vec{AX} + \vec{XC} + \vec{XB}$ avec X=mil[BC]
$= 2\vec{AX}$ car ΔABC est equilatéral
$= \vec{AD}$ par déf de D

2) Ss : $\vec{MB}\cdot\vec{MC} = \vec{MA}^2$

$\Leftrightarrow \vec{MA}\cdot\vec{AD} + \frac{a^2}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{AD} = -\frac{a^2}{2}$

droite $\perp$ à (AD) projeté orthogonal de M sur (AD)
coupant (AD) en $\overline{H}$ situé sur [AD]
tq $\vec{AH}\cdot\vec{AD} = -\frac{a^2}{2}$ ou $\vec{AH}\cdot\vec{AD} = \overline{AH}\cdot(\sqrt{3}a)$

donc il faut que

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{1}{3}\overline{AX}$$

2) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MD}) = 0$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(X; \frac{\overline{AD}}{2})$

3) H tq $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$, ou $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AX}$

$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$: $\overline{MA}^2 = \frac{a^2}{2}$ (égalisant 2) et 3))

ainsi $\overline{MA} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

$\overline{AM}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{AH}^2$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{36}$

$= \frac{5}{12}a^2$

$HM = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{15}}{6}a$

Q3

1) Soit M un point quelconque du plan

Soit I tel que I = mil $[BC]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2$

$+ \quad = 0$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IC}^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + (\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})^2 + (\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$

2) $(\mathcal{L}) = 2\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$

$= 2\overrightarrow{MI_{BC}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{MI_{AB}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{MI_{AC}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2$

On $2\overrightarrow{MI_{AB}}^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$= 2\overrightarrow{MI_{AB}}^2 - 2\left(\overrightarrow{MI_{AB}}^2 + \overrightarrow{MI_{AB}}.\overrightarrow{I_{AB}B} + \overrightarrow{I_{AB}A}.\overrightarrow{MI_{AB}} + \overrightarrow{I_{AB}A}.\overrightarrow{I_{AB}B}\right)$ ($= 0$)

$= 2\overrightarrow{MI_{AB}}^2 - 2\overrightarrow{MI_{AB}}^2 - 2\,\overrightarrow{I_{AB}A}.\overrightarrow{I_{AB}B}$

$= \frac{c^2}{2}$ $\quad -\frac{c^2}{4}$

au total $\mathcal{A} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2$

En divisant par 2 les 2 membres de $\mathcal{A}$

on obtient l'égalité sous 2) !

Q IV

I centre de gravité du triangle (ACE). **À PROUVER**

1) a) comme $\vec{EG}$ et $\vec{AC}$ ∈ (ACG)

$E \in (ACG)$

$O \in (AC) \subset (ACG)$ donc $O \in (ACG)$

$I \in (AG) \subset (ACG)$ donc $I \in (ACG)$

b) $I \in (EDB)$ par construction

$E \in (EDB)$ par définition du plan (EDB)

$O \in (BD) \subset (EDB)$ donc $O \in (EDB)$

c) les plans (ACG) et (EDB) sont distincts et se coupent selon la droite (EO)

or $I \in (ACG) \cap (EDB) = (OE)$

car $I \in (OE)$, donc I, O et E sont alignés.

2) b) On va prouver que A, I et K sont alignés

alors (AK) et (EO) sont 2 médianes du Δ (ACE)

$(EO) \cap (AK) = I$

donc I est le centre de gravité du ΔAEC intersection des médianes

Or A, I K alignés est dit

en effet $I \in (AG)$ par déf.

et $K \in (AG)$ car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu

et $K = \text{mil}\,[EC]$

avec $E \in$ et (AG)

les diagonales du $\square EACG$

février 2012 GÉOMÉTRIE

I 1) centre : C = mil $[F_1, F_2]$ $\quad C(5,-1)$

$c = CF_1 = CF_2 = 3$ et $e = \frac{3}{4} = \frac{c}{b} \Rightarrow b = 4$

$a^2 = b^2 - c^2 = 7$

$(E) : \frac{(x-5)^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{16} - 1 = 0$

2) $(E') : 2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 16 = 0 \quad (1)$

$P(2,0) \in E$

$\Delta : y = mx + p \qquad P(2,0) \in \Delta \Rightarrow p = -2m$

$\Delta : y = mx - 2m \qquad (2)$

méthode si $P \notin E'$

Δ est tangente à $(E') \Leftrightarrow \Delta \cap (E')$ est un singleton.

(2) dans (1) :

$2x^2 - (mx - 2m)^2 + 4x + 4(mx - 2m) - 16 = 0$

$(2 - m^2)x^2 + (4m^2 + 4 + 4m)x + (-4m^2 - 8m - 16) = 0$

$\Delta = (4m^2 + 4 + 4m)^2 - 4(2 - m^2)(4m^2 - 8m - 16)$

$= 16[m^4 + 1 + m^2 + 2m^2 + 2m^3 + 2m + (2 - m^2)(m^2 + 2m + 4$

$= 16[\cancel{m^4} + \cancel{2m^3} + 3m^2 + 2m + 1 + 2m^2 + 4m + 8 - \cancel{m^4} - \cancel{2m^3} - 4$

$= 16[m^2 + 6m + 9]$

$= 16(m+3)^2$

$\Delta \cap (E')$ est un singleton $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Ainsi : $\Delta : y = -3x + 6$

III 1) $I = \text{mil}\,[BC]$

$$\vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2$$

$$= 2\vec{MI}^2 + \vec{MI}\cdot(\underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{\vec{0}}) + \underbrace{\vec{IB}^2}_{(\frac{1}{2}BC)^2} + \underbrace{\vec{IC}^2}_{(\frac{1}{2}BC)^2}$$

$$= 2\vec{MI}^2 + \frac{1}{2}\vec{BC}^2$$

2) $\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 - \vec{MA}\cdot\vec{MB} - \vec{MB}\cdot\vec{MC} - \vec{MC}\cdot\vec{MA}$

$$= \vec{MA}\cdot(\underbrace{\vec{MA} - \vec{MB}}_{\vec{BA}}) + \underbrace{\vec{MB}}_{\vec{MA}+\vec{AB}}\cdot(\underbrace{\vec{MB} - \vec{MC}}_{\vec{CB}}) + \underbrace{\vec{MC}}_{\vec{MA}+\vec{AC}}(\underbrace{\vec{MC} - \vec{MA}}_{\vec{AC}})$$

$$= \vec{MA}(\underbrace{\vec{BA} + \vec{CB} + \vec{AC}}_{\vec{0}}) + \vec{AB}\cdot\vec{CB} + \vec{AC}\cdot\vec{AC}$$

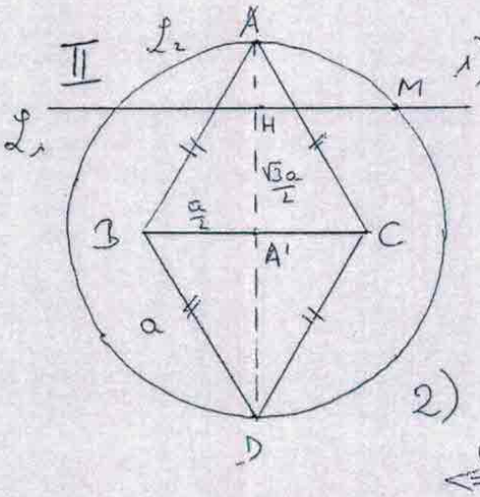
$$= -\vec{AB}\cdot\vec{BC} + \vec{AC}^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\|\underbrace{\vec{AB} + \vec{BC}}_{\vec{AC}}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2\right) + \vec{AC}^2$$

$$= \frac{1}{2}(\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$$

II



1) $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = (\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{MA} + \vec{AC})$

$= \vec{MA}^2 + \vec{MA} \cdot (\underbrace{\vec{AB} + \vec{AC}}_{\vec{AD}}) + \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}_{a \cdot a \cos\frac{\pi}{3}}$

$= \vec{MA}^2 + \vec{MA} \cdot \vec{AD} + \frac{a^2}{2}$ (*)

2) $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = \vec{MA}^2$

$\overset{(*)}{\iff} \vec{MA} \cdot \vec{AD} = -\frac{a^2}{2}$

$\iff \vec{AM} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$

Soit $H \in [AD]$ tel que $\vec{AH} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$

alors $AH \cdot \sqrt{3}a = \frac{a^2}{2}$

$AH = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{6} \left(= \frac{1}{3} AA'\right)$

$(\forall M \in \mathcal{P})$: $\vec{AM} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2} \iff (\vec{AH} + \vec{HM}) \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$

$\iff \vec{HM} \cdot \vec{AD} = 0$

$\iff M \in \underbrace{\text{perpendiculaire à } (AD) \text{ en } H}_{\mathcal{L}_1}$

3) $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = \frac{a^2}{2} \overset{(*)}{\iff} \vec{MA}^2 + \vec{MA} \cdot \vec{AD} = 0$

$\iff \vec{MA} \cdot (\vec{MA} + \vec{AD}) = 0$

$\iff \vec{MA} \cdot \vec{MD} = 0$

$\iff M \in \underbrace{\text{cercle de diamètre } [AD]}_{\mathcal{L}_2}$

4) $HM^2 = A'M^2 - A'H^2$ (Pythagore)

$= AA'^2 - \left(\frac{2}{3} AA'\right)^2$

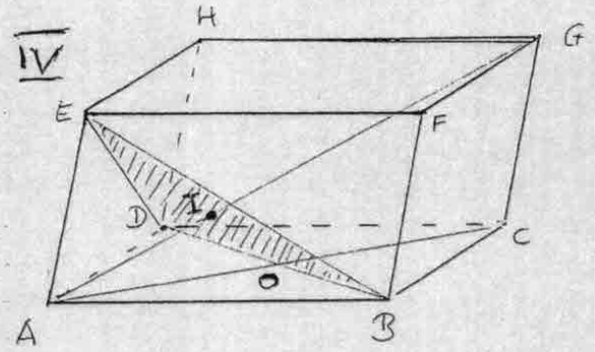
$= \frac{5}{9} AA'^2$

$= \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2$

$= \frac{15}{36} a^2$

D'où : $HM = \frac{\sqrt{15}}{6} a$

IV



$\{I\} = (AG) \cap (EBD)$

$\{O\} = (BD) \cap (AC)$

1) a) $(EA) // (FB) // (GC) \Rightarrow E, A, G, C$ coplanaires $\Rightarrow E \in (ACG)$

$O \in (AC) \Rightarrow O \in (ACG)$

$I \in (AG) \Rightarrow I \in (ACG)$

b) $I \in (EDB)$ par déf. de I

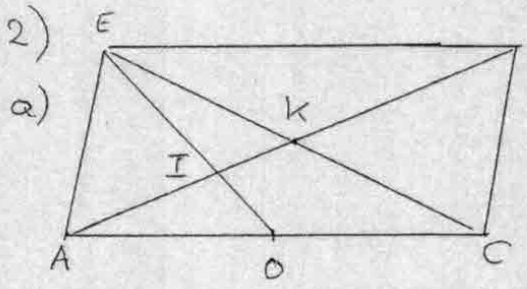
$E \in (EDB)$

$O \in (BD) \Rightarrow O \in (EDB)$

c) $(ACG) \cap (EDB)$ est une droite d.

Donc, d'après a) et b), E, O, I sont alignés

2) a)



b) $K = \text{mil}\,[EC]$

$= \text{mil}\,[AG]$ } propriété des $\#EACC_1$ et $ABCD$

$O = \text{mil}\,[AC]$ }

$I \in (AG) \cap (EO)$

↑ par déf. de I ; ↖ d'après 1

I est donc le point d'intersection des médianes (EO) et (AK) du $\triangle ACE$.

Donc I = centre de gravité du $\triangle ACE$.

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'algèbre et de probabilité

9 février 2012
15h-18h

I. 1. Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard en ville. Il se demande si trois personnes au moins acceptent de répondre. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie accepte de répondre est 0,1. L'employé interroge au hasard 50 personnes de manière indépendante. Calculer les probabilités des évènements A, B et C suivants :

A : « au moins une personne accepte de répondre. » 0,995

B : « moins de 3 personnes acceptent de répondre. 0,112

C : « Trois personnes ou plus acceptent de répondre. 0,888

N.B. Arrondir les résultats au millième.

2. Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On effectue trois tirages successifs d'une boule au hasard selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.

a. Calculer : P(X=0). $\left(\frac{4}{6}\right)^3 \approx 0,296$

b. Calculer la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage. $\frac{8}{45} \approx 0,172$

c. Calculer P(X=1). $\approx 0,539$

(6 points)

II. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}; \vec{v})$. On note A, B et C les points d'affixes respectives 3, 5-2i et 5+2i.

1. Etudier la nature du triangle ABC. rectangle, isocèle en A

2. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe : $\frac{z-3}{z-5+2i}$. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.]AB[$\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = (\vec{MA}; \vec{MB})$ $(x-4)^2 + (y+1)^2 < 2$ $x+y-3=0$ $x \neq 5$ $y \neq -2$

3. Soit (𝒞) le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe 2-i. Donner l'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'image du cercle (𝒞) par cette rotation. centre (3;-4), rayon 2 $z' = -iz + 3 + i$

(5 points)

III. Pour tout entier naturel non nul, on pose $u_n = \frac{2^n}{n!}$

1. Calculer : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. $\frac{2}{n+1}$
2. Prouver que pour tout n≥ 3: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n ≥3 , $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$
4. Etudier la convergence de la suite (u_n). converge vers 0

(4 points)

IV. Résoudre dans IR les inéquations trigonométriques suivantes :

1. $4sinx \cdot cosx - 2\sqrt{3}sinx + 2cosx - \sqrt{3} \leq 0 \quad x \in]-\pi;\pi[$ $\quad]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}] \cup \{-\frac{\pi}{6}\} \cup [\frac{\pi}{6} ; \pi[$
2. $sinx < cosx \quad x \in]-\pi;\pi[$ $\quad]-\frac{3\pi}{4} , \frac{\pi}{4}[$

(5 points)

Q I

1. Soit X la v.a. qui indique le nombre de personnes qui acceptent de répondre

Valeurs prises $\{0; \dots; 50\}$

50 épreuves indépendantes

probabilité qu'une personne réponde : $p = \frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(X=0) \\ &= 1 - C_{50}^{0}\, p^0 (1-p)^{50} \\ &= 0,995 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) \\ &= C_{50}^{0} p^0 (1-p)^{50} + C_{50}^{1} p^1 (1-p)^{49} + C_{50}^{2} p^2 (1-p)^{48} \\ &\simeq 0,112 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}(B) \\ &\simeq 0,888 \end{aligned}$$

2. 4 boules blanches
2 boules noires

X : va. égale au nombre de boules noires

a. $\mathbb{P}(X=0) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$

b. $\mathbb{P}(X=1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$

c. $\mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{304}{675}$

QII

A(3) B(5-2i) C(5+2i) O(0)

1. $\|\vec{AB}\| = |z_B - z_A| = |5-2i-3| = |2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\|\vec{AC}\| = |z_C - z_A| = |5+2i-3| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$

$\|\vec{BC}\| = |z_C - z_B| = |5+2i-5+2i| = |4i| = 4$

ΔABC : rectangle et isocèle en A

$\|AB\| = \|AC\|$

$\|\vec{BC}\|^2 = 16 = 8+8 = \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2$

(par la réciproque du thm. de Thalès)

2. Si on note M le point d'affixe z

alors $\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right)$

Il s'agit d'une mesure de l'angle orienté $(\vec{AM}, \vec{BM})$

Pour $z \neq z_B$, on a

$$\frac{z-3}{z-5+2i} = \frac{x+iy-3}{x+iy-5+2i} = \frac{x+iy-3}{(x-5)+i(y+2)}$$

$$= \frac{(x-3+iy)\,[(x-5)-i(y+2)]}{(x-5)^2+(y+2)^2}$$

$$= \frac{(x-3)(x-5)+y(y+2)}{(x-5)^2+(y+2)^2} + i\,\frac{-(x-3)(y+2)+y(x-5)}{(x-5)^2+(y+2)^2}$$

nombre réel strictement négatif

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x-3)(y+2) + y(x-5) = 0 \\ (x-3)(x-5) + y(y+2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -xy - 2x + 3y + 6 + xy - 5y = 0 \\ x^2 - 8x + 15 + y^2 + 2y < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 6 = 0 \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \quad (D) \\ (x-4)^2 + (y+1)^2 < 2 \quad (C) \end{cases} \quad \text{avec } x \neq 5 \text{ et } y \neq 2$$

(D) dans (C) : $(x-4)^2 + (3-x+1)^2 < 2$

$$\Leftrightarrow 2(x-4)^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x-4 < 1$$

$$\Leftrightarrow 3 < x < 5$$

alors $-2 < y < 0$

Autre méthode

$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi$

$\Leftrightarrow \widehat{BMA} = \pi$

$\Leftrightarrow M \in [AB]$ privé de A et B

il s'agit du segment $]AB[$

3. $\Omega(2-i)$

angle : $-\frac{\pi}{2}$

écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$:

$$z' - z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$$

$$z' = -i(z - z_\Omega) + z_\Omega$$
$$= -iz + (i+1)z_\Omega$$
$$= -iz + (i+1)(2-i)$$
$$= -iz + 2i + 1 + 2 - i$$
$$= -iz + 3 + i$$

$\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC
rectangle et croisé en A

d'où $\mathcal{C}$ (mit [BC], $\frac{1}{2}$ BC) = $\mathcal{C}(5; 2)$

$\mathcal{C}'$: image du cercle $\mathcal{C}(A; 2\sqrt{2})$

une distance reste invariante dans une transformation affine du plan : $r' = 2$

$$z_\Omega' = -iz_\Omega + 3 + i = -5i + 3 + i = 3 - 4i$$

$\mathcal{C}'$: cercle de centre $\Omega'(3; -4)$ et de rayon 2.

Q.III

$u_n = \frac{2^n}{n!}$

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n}$

$= \frac{2}{n+1}$

2. $n=3$

$u_3 = \frac{8}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\qquad \frac{1}{2} u_3 = \frac{2}{3}$

$u_4 = \frac{16}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$u_4 = \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} = \frac{1}{2} u_3$

Supposons qu'on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

et prouvons qu'on a $u_{n+2} \leq \frac{1}{2} u_{n+1}$

Soit $n \geq 3$ $\quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

$\Leftrightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 4 \leq n+1$ $\quad$ ce $\forall n \geq 3$

3. pour $n=3$ on a $0 \leq u_3 \leq u_3 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}}_{=1}$

Supposons que l'inégalité est vraie pour $n \geq 3$ et montrons qu'elle l'est encore pour $n+1$

$u_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \geq 0$

et $0 \leq u_{n+1} \overset{2.}{\leq} \frac{1}{2} u_n \leq u_3 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-3}$

4. Pour $n \geq 3$

$$0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

si $n \to +\infty$ ↓ 0 ; ↓ si $n \to +\infty$; $u_3 \cdot 0 = 0$

Par le thm. des gendarmes, $u_n \longrightarrow 0$ si $n \to +\infty$

Q IV

1. $4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$

$\Leftrightarrow 4\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{2t}{1+t^2} - 2\sqrt{3}\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\frac{2t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{8t - 8t^3 - 2\sqrt{3}(1-t^4) + 4t - \sqrt{3}(t^4+2t^2+1)}{(1+t^2)^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow 8t - 8t^3 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t^4 + 4t - \sqrt{3}t^4 - 2\sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} \leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}t^4 - 8t^3 - 2\sqrt{3}t^2 + 12t$

$4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\, 2\cos x + 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x + 1) - \sqrt{3}(2\sin x + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(2\sin x + 1)(2\cdot\cos x - \sqrt{3})}_{= P(x)} \leq 0$

	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		π
$2\sin x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2\cos x - \sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

$2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$S = \left]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{6}\right\} \cup \left[\frac{\pi}{6} ; \pi\right[$$

2) $\sin x < \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x > 0$$

Valeurs critiques $\cos x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ou} \quad 0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

impossible

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$\cos x - \sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-\frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right[$$

I.1

E : « la personne accepte de répondre à l'enquête »

$p(E) = 0,1$

$p(A) = 1 - p(\bar{A})$

$p(\bar{A}) = p(X=0)$

loi binomiale

$n = 50 \quad p = 0,1$

$= 1 - C_{50}^{0} \; 0,1^{0} \cdot 0,9^{50}$

$\simeq 0,995$

$p(B) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

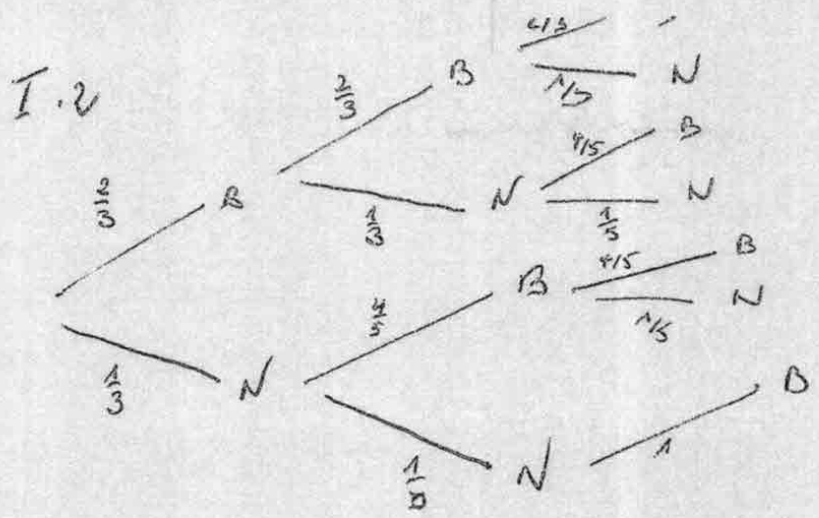
$= C_{50}^{0} \; 0,1^{0} \cdot 0,9^{50} + C_{50}^{1} \; 0,1^{1} \cdot 0,9^{49} + C_{50}^{2} \; 0,1^{2} \cdot 0,9^{48}$

$\simeq 0,112$

$p(C) = 1 - p(B)$

$\simeq 0,888$

I.2



Valeurs de X $\quad X \in \{0, 1, 2\}$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$p(BNB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$$

$$P(X=1) = p(NBB) + p(BNB) + p(BBN)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{8}{45} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{144 + 120 + 100}{27 \cdot 25}$$

$$= \frac{364}{675}$$

II

$z_A = 3 \quad z_B = 5-2i \quad z_C = 5+2i$

1.) $AB = |z_B - z_A| = |2-2i|$

$= 2|1-i|$

$= 2\sqrt{2}$

$AC = |z_C - z_A| = |2+2i|$

$= 2|1+i|$

$= 2\sqrt{2}$

$BC = |z_C - z_B| = |4i| = 4$

D'où : $AB = AC$; de plus $AB^2 + AC^2 = 8+8 = 16 = BC^2$

le triangle ABC est donc isocèle de sommet principal A et rectangle en A.

2. $\arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)$

$= \arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)$

$= \text{mes}(\vec{MB}, \vec{MA})\ (2\pi)$

$\frac{z-3}{z-5+2i} < 0 \iff \arg\left(\frac{z-3}{z-5+2i}\right) = \pi \ (\text{mod } 2\pi)$

$\iff \text{mes}(\vec{MB}, \vec{MA}) = \pi \ (\text{mod } 2\pi)$

$\iff M \in]A;B[$

3.) $z' - z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega)$

$\iff z' - 2 + i = -i(z - 2 + i)$

$\iff z' = -iz + 3 + i$

Comme le triangle ABC est isocèle de sommet principal A et rectangle en A, le cercle (C) a pour centre le milieu A' de [BC] d'affixe $\frac{z_B + z_C}{2} = 5$ et de rayon $\frac{1}{2}BC = 2$

L'image A'' de A' par la rotation r est donc

$$z_{A''} = -i z_{A'} + 3 + i$$

$$= -i \cdot 5 + 3 + i$$

$$= 3 - 4i$$

L'image de (C) est le cercle de centre $A''(3-4i)$ et de rayon $R = 2$.

III.

$u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ $(n \geq 1)$ donc $u_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1}$

2. $n \geq 3 \iff n+1 \geq 4$

Puisque $n+1 > 0$ et $4 > 0$ $\quad \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{4}$

$\iff \dfrac{2}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$

D'où : $\forall n \geq 3 \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ (car $u_n > 0$) (A)

Aussi : $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n \quad (n \geq 3)$ (A)

3. A prouver : $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} \quad (n \geq 3)$

L'inégalité est vraie pour $n = 3$, car on a bien

$0 \leq u_3 \leq u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

Supposons qu'au rang $k \geq 3$:

$0 \leq u_k \leq u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-3}$ (H)

Par (A) $\quad u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2} u_k$

$\leq \dfrac{1}{2} u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-3}$ (H)

$\leq u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{(k+1)-3}$

Ceci prouve la formule au rang $(k+1)$. Elle est donc vraie pour $n = 3, 4, \ldots$.

De plus : $u_n \geq 0$ pour $n \geq 3$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (théor. de l'encadrement)

IV.

1. $4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$ $\quad x \in]-\pi ; \pi[$

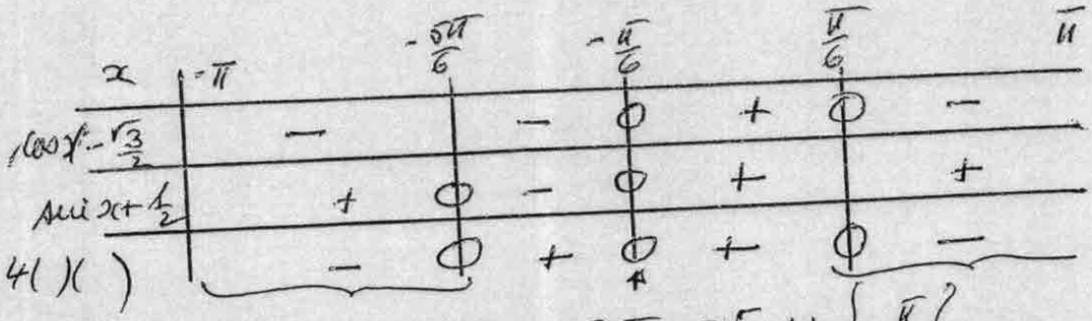
$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos x - \sqrt{3}) + (2\cos x - \sqrt{3}) \leq 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})(2\sin x + 1) \leq 0$

$\Leftrightarrow 4\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$

$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$



$S =]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6} ; \pi[\cup \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}$

2) $\sin x < \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x - \cos x < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Posons $X = x - \frac{\pi}{4}$

$-\pi < x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{4} < X \leq \frac{3\pi}{4}$

Il faut résoudre $\sin X < 0$

d'où $-\pi < x - \frac{\pi}{4} < 0 \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

Donc $S =]-\frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$

Concours de recrutement

Mathématiques

Épreuve d'analyse

Mercredi, le 23 janvier 2013

15h-18h

Question 1 **(2,5 + 0,5 + 2,5 + 1 + 1 + 2 + 1,5 = 11 points)**

Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=\sqrt{mx^2-2(m-1)x+m}$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 cm).

1) Déterminez le domaine de définition D_m de f_m suivant les valeurs du paramètre réel m. Si $f_m(x)$ admet deux racines réelles distinctes, comparez celles-ci et déterminez-en le signe.

2) Tracez C_0 et $C_{\frac{1}{2}}$.

3) Déterminez les équations des asymptotes obliques éventuelles à C_m suivant les valeurs du paramètre $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;\frac{1}{2}\}$.

4) Dressez le tableau de variation de f_m suivant les valeurs du paramètre $m\in\mathbb{R}\setminus\{0;\frac{1}{2}\}$.

5) Démontez que la droite T d'équation $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$ est tangente à toutes les courbes C_m $(m\in\mathbb{R})$.

6) Démontrez que C_{-1} est un demi-cercle. Calculez $\int_2^{3,5} f_{-1}(x)dx$.

7) Soit S la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x=2$, $x=4$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$ et la courbe C_0. Calculez l'aire A de la surface S. Calculez le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de la surface S autour de l'axe des abscisses.

Question 2 **(1 + 1,5 + 1,5 + 1,5 + 0,5 = 6 points)**

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(2+\sqrt[3]{e^{6x}-1}\right)$.

1) Déterminez $\mathrm{dom}\,f$ et étudiez la continuité de f.

2) Déterminez les asymptotes éventuelles au graphe de f.

3) Étudiez le sens de variation de f et déterminez le domaine de dérivabilité de f.

4) Démontrez que f définit une bijection de $\mathrm{dom} f$ sur un ensemble J à préciser.

Tracez le graphe de f et celui de f^{-1} dans un même repère orthonormé d'unité 2 cm.

5) Déterminez une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{\ln 2}{6}$.

Sans déterminer l'expression analytique de f^{-1}, calculez $\left(f^{-1}\right)'(\ln 3)$.

Question 3 **(1,5 + 1,5 = 3 points)**

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}}$.

Calculez $\int_1^{41} f(x)\,dx$ après avoir justifié son existence.

Indication : poser $t^4 = 2x-1$.

2) Démontrez que l'équation $2^x + 3^x = 4^x$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$. (On ne demande pas de déterminer la solution.)

Q1

$f_m(x) = \sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m}$, $m \in \mathbb{R}$

$\mathcal{C}_m$: la courbe rep. de f_m dans un RON de plan

1) C.E. $\forall m \in \mathbb{R}$, $mx^2 - 2(m-1)x + m \geq 0$

si $m=0$, $f_0 = -2(-1)x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 0$

$D_0 = [0; +\infty[$

si $m \neq 0$, $\Delta_m = 4(m-1)^2 - 4m \cdot m$

$= 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2$

$= 4 - 8m$

si $\Delta_m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$, alors $D_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R}$

	$-\infty$		$\frac{2(\frac{1}{2}-1)}{2-\frac{1}{2}} = -1$		$+\infty$
$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$		$+$	0	$+$	

si $\Delta_m < 0 \Leftrightarrow -8m + 4 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, alors $D_m = \mathbb{R}$

	$-\infty$		$+\infty$
$mx^2 - 2(m-1)x + m$		$+$ $(m > \frac{1}{2})$	

si $\Delta_m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$, alors

$$x_{1,m} = \frac{2(m-1) + \sqrt{4-8m}}{2m}$$

$$x_{2,m} = \frac{2(m-1) - \sqrt{4-8m}}{2m}$$

si $m \in]0; \frac{1}{2}[$, $x_{1,m} > x_{2,m}$

		$x_{2,m}$		$x_{1,m}$	
$mx^2-2(m-1)x+m$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_m =]-\infty ; x_{2,m}] \cup [x_{1,m}, +\infty[$$

si $m \in]-\infty; 0[$, $x_{1,m} < x_{2,m}$

		$x_{1,m}$		$x_{2,m}$	
$mx^2-2(m-1)x+m$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$D_m = [x_{1,m}, x_{2,m}]$$

Au total,

m	D_m
0	$[0, +\infty[$
$\frac{1}{2}$	$\mathbb{R}$
$]\frac{1}{2}, +\infty[$	$\mathbb{R}$
$]0; \frac{1}{2}[$	$]-\infty ; x_{2,m}] \cup [x_{1,m}, +\infty[$
$]-\infty; 0[$	$[x_{1,m}; x_{2,m}]$

si $m < \frac{1}{2}$ et $m \neq 0$, f_m admet 2 racines réelles distinctes

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{m} = 1 \Rightarrow P > 0$$ les racines sont de même signe

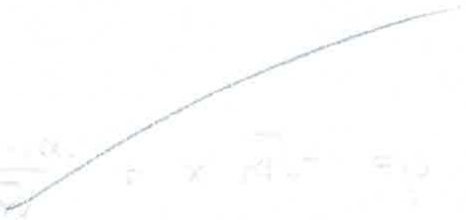
$$S = -\frac{b}{a} = \frac{2(m-1)}{m} = 2 - \frac{1}{m}$$

Ainsi

pour $m \in]0; \frac{1}{2}[$, $S < 0$ les 2 racines sont négatives

pour $m \in]-\infty; 0[$, $S > 0$ les 2 racines sont positives

2)



3) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{1}{2}\}$

si $m \geq 0$, limites en $\pm\infty$ (pas d'A.O. si $m < 0$)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{\dots \to m}}{x}$$

$$= \pm\sqrt{m}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_m(x) - \sqrt{m}\,x = \lim_{x \to +\infty} \frac{mx^2 - 2(m-1)x + m - mx^2}{\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} + \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2(m-1)x + m}{\sqrt{m}\,x \left| \sqrt{1 - \dots} \to 1 \right| + \sqrt{m}\,x}$$

$$= \frac{1-m}{\sqrt{m}}$$

A.O. curv. d'éq. $y = \sqrt{m}\,x + \frac{1-m}{\sqrt{m}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} + \sqrt{m}\, x$$

$$= - -$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2(m-1)x + m}{\sqrt{m}x \left(\sqrt{\quad} - 1 \right)} \quad \sqrt{\quad} \to -1$$

$$= \frac{m-1}{\sqrt{m}}$$

A.O en $-\infty$ d'éq. $y = -\sqrt{m}\, x + \frac{m-1}{\sqrt{m}}$

Si $m < 0$

$\lim_{x \to x_{1,m}} f_m(x) = 0$

$\lim_{x \to x_{2,m}} f_m(x) = 0$

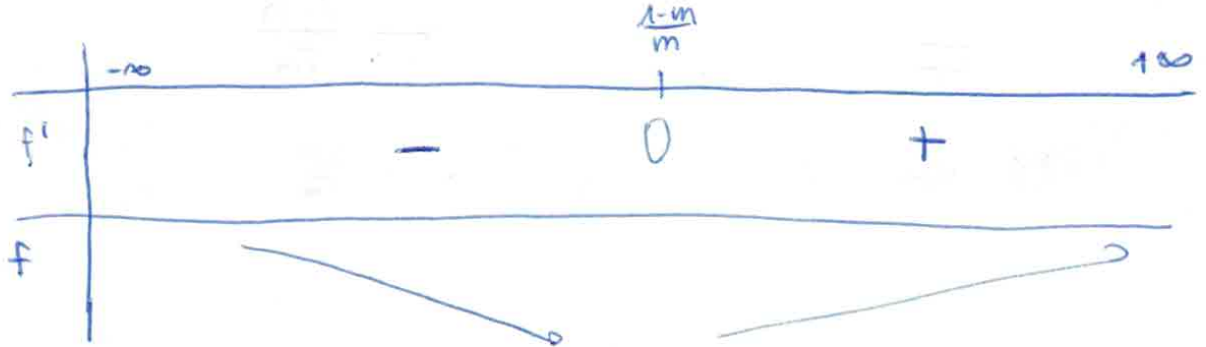
4) Si $m > \frac{1}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = \frac{1}{2\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m}} \cdot (2mx - 2m + 2)$

$$= \frac{1}{\sqrt{mx^2 - 2(m-1) + m}} \cdot (mx - m + 1)$$

Or $mx - m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x > \frac{m-1}{m}$



$$f_m\left(\frac{1-m}{m}\right) = \sqrt{\frac{(1-m)^2}{m} + 2\frac{(m-1)^2}{m} + m}$$

$$= \sqrt{\frac{3(m-1)^2 + m^2}{m}}$$

si $m \in]0; \frac{1}{2}[$

$\forall x \in]-\infty; x_{2,m}[\cup]x_{1,m}; +\infty[$, on obtient $f'_m(x)$, on a $\frac{m-1}{m} < 0$ et racines < 0

doit être entre $x_{1,m}$ et $x_{2,m}$

x	$-\infty$		$x_{2,m}$		$\frac{m-1}{m}$		$x_{1,m}$		$+\infty$
f'		−	‖	−	0	+	‖	+	
f	$-\infty$	↘	0	↘		↗	0	↗	$+\infty$

si $m \in]-\infty; 0[$, $\frac{m-1}{m} > 0$ et racines > 0

on obtient $f'_m(x)$

$\forall x \in]x_{1,m}; x_{2,m}[$

$x_{1,m} = \frac{m-1}{m} + \underbrace{\quad}_{<0} < \frac{m-1}{m}$

$x_{2,m} = \frac{m-1}{m} - \underbrace{\quad}_{<0} > \frac{m-1}{m}$

$mx - m + 1 > 0$

$\Leftrightarrow mx > m - 1$

$\Leftrightarrow x < \frac{m-1}{m}$

$m < 0$

x		$x_{1,m}$		$\frac{m-1}{m}$		$x_{2,m}$	
f'	‖		+	0	−	‖	
f	0	↗		max	↘	0	

5) Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé, alors $\forall x \in D_m$ on a

$(*)$: $\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) \iff mx^2 - 2(m-1)x + m = \frac{1}{2}(x+1)^2$ avec $x \geq -1$

$\iff (m - \frac{1}{2})x^2 - 2(m-\frac{1}{2})x + (m - \frac{1}{2}) = 0$ avec $x \geq -1$

$\iff m = \frac{1}{2}$ ou $x^2 - 2x + 1 = 0$ avec $x \geq -1$

$\iff m = \frac{1}{2}$ ou $x = 1$ avec $x \geq -1$

Si $m = 0$; $m \geq \frac{1}{2}$ on a $1 \in D_m$

Si $m \in]0 ; \frac{1}{2}[$, $1 \in [x_{1,m}, +\infty[$, car $x_{1,m} < 0$ et donc $1 \in D_m$ (et $1 \neq x_{1,m}$)

Si $m < 0$ $\quad \frac{2(m-1) + \sqrt{4-8m}}{2m} \leq 1 \leq \frac{2(m-1) - \sqrt{4-8m}}{2m}$

$\iff (m-1) + \sqrt{1-2m} \geq m \geq (m-1) - \sqrt{1-2m}$

$\iff \sqrt{1-2m} \geq 1 \geq -\sqrt{1-2m}$ — OK, car $m < 0$

(Ceci est trivialement vérifié pour $m < 0$)

$\Rightarrow \quad 1 \in]x_{1,m}, x_{2,m}[\subset D_m$

Ainsi pour tout m, $1 \in D_m$. (et on peut dériver f_m en 1).

En outre si $m = \frac{1}{2}$, $\sqrt{mx^2 - 2(m-1)x + m} = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|x+1|$

Ainsi pour $x = 1$, $f_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+1) = \sqrt{2}$ (abscisse commune à T et $f_{\frac{1}{2}}$).

Comme $f'_m(1) = \frac{1}{\sqrt{m - 2m + 2 + m}} \cdot 1 \cdot (m - m + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\frac{\sqrt{2}}{2}$ la pente de T, on déduit que T est tangent à $\mathcal{C}_m$ $\forall m$ au point $(1 ; \sqrt{2})$

6) $f_{-1}(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$ avec $x \in \left[\frac{-4 + \sqrt{12}}{-2} ; \frac{-4 - \sqrt{12}}{-2} \right]$

$[\, 2 - \sqrt{3} \, ; \, 2 + \sqrt{3} \,]$

Soit $y \geq 0$ tq

$y = \sqrt{-x^2 + 4x - 1}$, alors

$y^2 = -x^2 + 4x - 1$

$\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 3$

$\iff (x-2)^2 + y^2 = \sqrt{3}^2$ demi-cercle de centre $(2, 0)$ partie supérieure

$$\int_2^{3,5} f_{-1}(x)\,dx$$

$$= \int_2^{3,5} \sqrt{3 - (x-2)^2}\,dx$$

$$= \sqrt{3} \int_2^{3,5} \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx$$

On pose $\cos t = \frac{x-2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}\cos t + 2$

$dx = \sqrt{3}\sin t\,dt$

$\Leftrightarrow t = \arccos\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)$

si $x = 2$, $t = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

si $x = 3,5$, $t = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$= -3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t}$$

$$= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \underbrace{|\sin t|}_{\geq 0 \text{ sur } [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]}\,dt$$

$$= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t\,dt$$

$$= \frac{3}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

7) $$A = \int_2^4 \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2x}\ dx$$

calcul direct
= . —

$$V = \pi \int_2^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)\right)^2 - 2x\ dx$$

calcul direct
= . —

Q2

$$f(x) = \ln\left(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}\right)$$

1) $2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1} > 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{6x} - 1 > -8$

$\Leftrightarrow \quad e^{6x} > -7$ tjs vrai

$\text{dom } f = \text{dom}_c f = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(2 + \text{———}\right) = 0$ A.H : $y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}\right)}{x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}} \left(\sqrt[3]{e^{6x} - 1}\right)'}{1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(e^{6x} - 1)^2}} 6e^{6x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{6x}}{(e^{6x} - 1) + 2\sqrt[3]{(e^{6x} - 1)^2}}$$

$= 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(2 + \sqrt[3]{e^{6x} - 1}\right) - 2x$$

$$\ln(e^{2x})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\underbrace{\frac{2}{e^{2x}}}_{\to 0} + \sqrt[3]{\underbrace{\frac{e^{6x}-1}{e^{6x}}}_{\to 1}}\right)$$

$$= 0$$

A.O. d'éq. $y = 2x$

3) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2e^{6x}}{\underbrace{(e^{6x}-1)^{\frac{2}{3}}}_{>0} \underbrace{((e^{6x}-1)^{\frac{1}{3}} + 2)}_{>1}} > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$$

f n'est pas dérivable en 0

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\nearrow$	
			$+\infty$		$+\infty$

4) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Im} f$ est une bijection

car f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante

$y = \mathrm{Im} f =]0 ; +\infty[$

Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f en utilisant la 1ère bissectrice.

⋮

5) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ avec $x_0 = \frac{\ln 2}{6}$

⋮

avec $f\left(\frac{\ln 2}{6}\right) = \ln 3$ et $f'\left(\frac{\ln 2}{6}\right) = \frac{4}{3}$

$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow (f^{-1} \circ f)' = 1$

$\hookrightarrow (f^{-1})'|_{f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ $\rightarrow (f^{-1})'(\ln 3) = (f^{-1})'\left(f\left(\frac{\ln 2}{6}\right)\right)$

$= \frac{1}{f'\left(\frac{\ln 2}{6}\right)}$

$= \frac{3}{4}$

Q3

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}$

C.E. si $2x-1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$

si $\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\text{dom } f =]\frac{1}{2}; +\infty[= \text{dom}_c f$

f étant une fonction continue sur $[1;41]$ on peut calculer

$$\int_1^{41} f(x)\,dx = \int_1^{41} \frac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}\,dx$$

poser $t = \sqrt[4]{2x-1} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{t^4+1}{2} \qquad dx = 2t^3\,dt$

si $x = 1, \quad t = 1$

si $x = 41, \quad t = 3$

$$= \int_1^3 \frac{2t^3}{t^2+t}\,dt$$

$$= \int_1^3 \frac{2t^3}{t(t+1)}\,dt$$

$$= 2\int_1^3 \frac{t^2}{t+1}\,dt$$

$$= 2\int_1^3 t - 1 + \frac{1}{t+1}$$

$t^2 : t+1 = t-1$ reste 1

$t^2 = (t+1)(t-1) + 1$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1)\right]_1^3$$

$$= 2\left(\frac{9}{2} - 3 + \ln(4) - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2)\right)$$

$$= 2\left(2 + \ln(2)\right)$$

$$= 4 + \ln(4)$$

2) $2^x + 3^x = 4^x \qquad | \cdot 4^x > 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1 = 0$

$:= g(x)$

$g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^x \ln\left(\frac{3}{4}\right)}_{<0}$

<0

g est str. décroissante et continue sur $\mathbb{R}$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$

$\Rightarrow$ par le thm. des valeurs intermédiaires

il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = 0$.

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

mardi, le 29 janvier 2013

15H00 – 18H00

I. Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, soient le plan $\mathcal{P}_1 \equiv -x+y+z=3$ et les points A(0 ;–1 ;0), B(1 ;1 ;0) et C(0 ;3 ;2).

1) Déterminer une équation paramétrique de la droite Δ, intersection de $\mathcal{P}_1$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ passant par A, B et C.
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de Δ avec la droite (BC).

(4 points)

II. On considère deux droites d_1 et d_2 du plan qui se coupent en un point O. On considère une droite d_3 qui n'est parallèle ni à d_1 ni à d_2. Une droite d_4 parallèle à d_3 coupe d_1 en A et d_2 en B. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble que parcourt le milieu P du segment [AB] quand d_4 varie.
On demande de répondre à la question sans introduire un repère.

(3 points)

III. Soit un triangle équilatéral ABC de côté a (a > 0) . On donne $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC}$ où α et β sont deux réels non nuls.

1) Chercher une relation entre α et β si on sait que les droites (CM) et (AN) sont perpendiculaires.
2) Chercher les valeurs de α et β pour que les droites (CM) et (AN) soient perpendiculaires et pour que le point B soit équidistant des points M et N.

(5 points)

IV. Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On donne le point $H\left(6;\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ situé sur l'hyperbole de foyers F(5 ;0) et F'(–5 ;0).

1) Etablir une équation de cette hyperbole.
2) Montrer que la tangente au point H est l'une des bissectrices des angles formés par les droites (HF) et (HF')

(4 points)

V. On considère un triangle ABC dont les angles sont inférieurs à 120°. On construit les triangles équilatéraux ABC', BCA' et ACB' extérieurs à ABC. On note I le point d'intersection des droites (AA') et (CC').

1) Démontrer que AA' = BB' = CC'
2) Démontrer que $\widehat{BIC}=\widehat{BIA}=120°$
3) Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

(4 points)

Q1

Espace muni d'un RON

$P_1 \equiv -x+y+z=3$ plan

$O(0;0;0)$ $A(0;-1;0)$, $B(1;1;0)$ et $C(0;3;2)$ $\notin P_1$

1) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Equation param. de P_2 :

$$\begin{cases} x = 0 + 1\alpha + 0\beta = \alpha \\ y = -1 + 2\alpha + 2\beta = -1 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 0 + 0\alpha + 1\beta = \beta \end{cases}$$

$P_1 \cap P_2$:

$$-\alpha + (-1+2\alpha+2\beta) + \beta = 3$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 3\beta = 4$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 4 - 3\beta$$

Éq. param de Δ :

$$\begin{cases} x = 4 - 3\beta \\ y = -1 + 8 - 6\beta + 2\beta = 7 - 4\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

2) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(BC) \equiv \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = 2k \end{cases}$$

$$(BC) \cap \Delta \iff \begin{cases} 4 - 3\beta = 1 - k & (1) \\ 7 - 4\beta = 1 + 2k & (2) \\ \beta = 2k & (3) \end{cases}$$

(3) dans (2) : $7 - 8k = 1 + 2k$

$\iff 6 = 10k$

$\iff k = \frac{3}{5}$

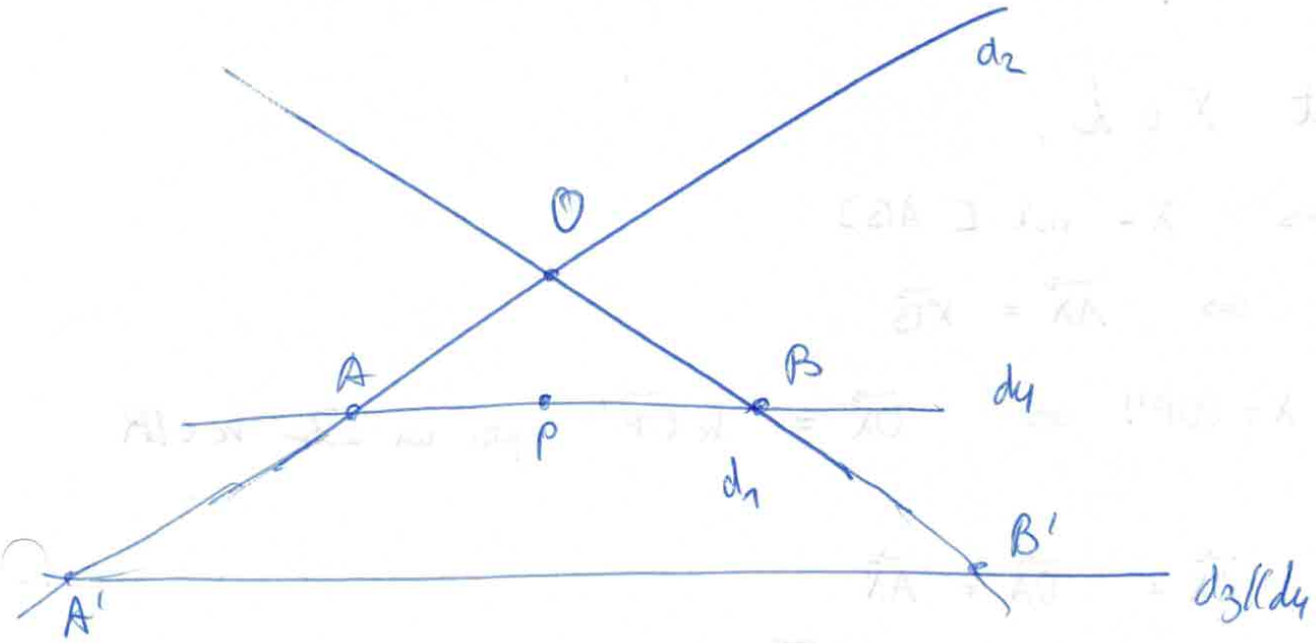
(3) : $\beta = \frac{6}{5}$

vérification dans (1) : $4 - 3\frac{6}{5} = \frac{20}{5} - \frac{18}{5} = \frac{2}{5}$

et $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$]

$$I\left(1 - \frac{3}{5} ; 1 + \frac{6}{5} ; \frac{6}{5}\right) = I\left(\frac{2}{5} ; \frac{11}{5} ; \frac{6}{5}\right)$$

Q2



$d_1 \not\parallel d_2$

$d_3 \not\parallel d_1 \rightarrow d_3 \cap d_1 : A'$

$d_3 \not\parallel d_2 \quad d_3 \cap d_2 = B'$

$P' = \text{mil}\,[A', B']$

$P'\left(\frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} ; \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2}\right)$

Si $\overrightarrow{OA} = k\,\overrightarrow{OA'}$

Thalès : $\overrightarrow{OB} = k\,\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}\overrightarrow{A'B'}$

Lieu recherché droite (OP')

Lieu cherché

éq. cartésienne ⟶ sans repère ?
impossible

$\mathcal{L} = (OP')$

⇒ Soit $X \in \mathcal{L}$,

alors $X = \text{mil}\,[AB]$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$

$X \in (OP') \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OX} = k\overrightarrow{OP'}$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \\
&= k\overrightarrow{OA'} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= k\overrightarrow{OA'} + \tfrac{1}{2}k\overrightarrow{A'B'} \\
&= k\overrightarrow{OA'} + k\overrightarrow{A'P'} \\
&= k\overrightarrow{OP'}
\end{aligned}$$

(par Thalès le même k ; en $P' = \text{mil}\,[A'B']$)

⇐ Soit $M \in (OP')$

Traçons la parallèle à $(A'B')$ passant par M,
elle coupe d_1 en A et d_2 en B

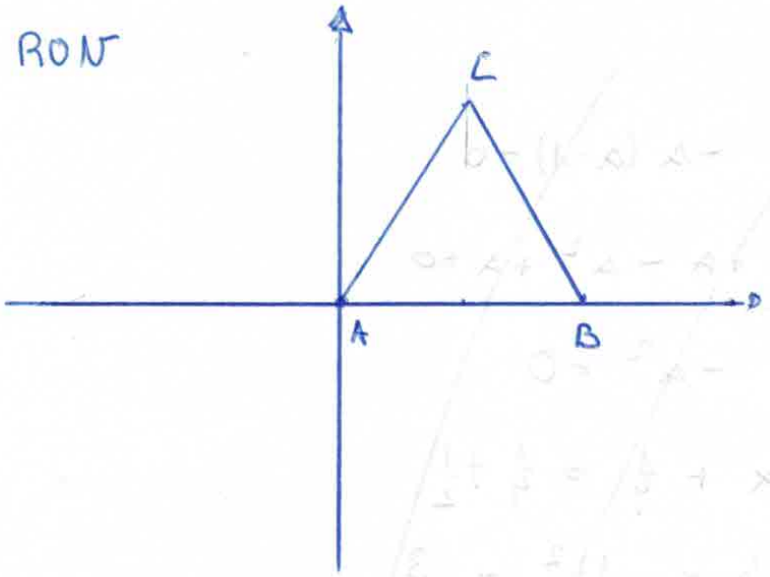
a-t-on que $\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ($\Leftrightarrow M = \text{mil}\,[AB]$)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \\
&= k\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OP'} \\
&= k\overrightarrow{AP'} \\
&= \tfrac{k}{2}\overrightarrow{A'B'} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

(par Thalès même k ; par Thalès)

Q3

RON



pas besoin

$\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$

A(0;0)

B(a;0)

$C\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

1) $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BN} = \beta \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \beta \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \alpha \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \alpha\beta \overrightarrow{BA} \cdot$

$\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2} - \beta \frac{a^2}{2} + \alpha a^2 - \alpha\beta \frac{a^2}{2} = 0$

$a>0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \alpha - \frac{\alpha\beta}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -1 - \beta + 2\alpha - \alpha\beta = 0$ (x)

2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}$ $\quad \beta^2 a^2$

$a^2 - 2\alpha \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \alpha^2 a^2$

$a^2 - 2\alpha a^2 + \alpha^2 a^2$

$a>0$

$\Leftrightarrow \beta^2 = (\alpha - 1)^2$

$\Leftrightarrow \beta = \alpha - 1$ ou $\beta = 1 - \alpha$

(1) (2)

1ère pers.

(1) de (α)

$$-\frac{1}{2} - (\alpha - 1) + \alpha - \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + 1 - \alpha + \alpha - \alpha^2 + \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha - \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\text{ou } \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\beta_2 = -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

2e pers.

(2) de (α) : $-\frac{1}{2} - (1-\alpha) + \beta - \alpha(1-\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} + \beta + \beta - \alpha + \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \tfrac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \qquad \beta_3 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{ou } \alpha_4 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \qquad \beta_4 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

$S = \{(\alpha_1; \beta_1) ; (\alpha_2; \beta_2) ;$

cas où $\alpha = 1$

$$-1 - (\alpha - 1) + 2\alpha - \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 - \alpha + 1 + 2\alpha - \alpha^2 + \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 0 \text{ ou } \alpha_2 = 2$$

$$\beta_1 = -1 \qquad \beta_2 = 1$$

cas où $\alpha \neq 1$

$$-1 - 1 + \alpha + 2\alpha - \alpha + \alpha^2 = 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha + 1)^2 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_3 = \sqrt{3} - 1 \quad \text{ou} \quad \alpha_4 = -\sqrt{3} - 1$$

$$\beta_3 = 2 - \sqrt{3} \qquad \beta_4 = 2 + \sqrt{3}$$

Les couples de val. pour (α, β) sont

(α_1, β_1) ; (α_2, β_2) $(\alpha_3; \beta_3)$ et $(\alpha_4; \beta_4)$

Q4

Hyperbole de foyers $F(5;0)$ $F'(-5;0)$

axe focal $(O;\vec{i})$

$c = 5$

$$\begin{cases} \mathcal{H}: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 25 \quad \text{et} \quad a^2, b^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$M \in \mathcal{H} \iff \frac{36}{a^2} - \frac{45}{4b^2} = 1$$

$$\iff \frac{144\,b^2 - 45a^2 - 4a^2b^2 = 0}{4a^2b^2}$$

$$\iff 144(25 - a^2) - 45a^2 - 4a^2(25 - a^2) = 0$$

$$\iff 3600 - 144a^2 - 45a^2 - 100a^2 + 4a^4 = 0$$

$$\iff 4a^4 - 289a^2 + 3600 = 0$$

$$\iff a^2 = \frac{225}{4} > 25 \quad \text{ou} \quad a^2 = 16$$

à rejeter

$a^2 = 16$ et $b^2 = 25 - 16 = 9$

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

2) éq réduite de la tangente à $\mathcal{H}$:

$$\frac{6x}{16} - \frac{3\sqrt{5}}{18}y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}}{6}y = -\frac{6x}{16} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{36}{16\sqrt{5}}x + \frac{6}{\sqrt{5}}$$

vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{3\sqrt{5}}{18} ; \frac{6}{16}\right)$ ou $\left(\frac{3\sqrt{5}}{9} ; \frac{6}{8}\right)$ ou $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{9} ; -\frac{6}{8}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3} ; \frac{3}{4}\right)$ ou $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3} ; -\frac{3}{4}\right)$

$(-1 ; -\frac{3\sqrt{5}}{2})$

$$\overrightarrow{HF} \cdot \vec{u} = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{9\sqrt{5}}{8} = \frac{35\sqrt{5}}{24}$$

$$\| \qquad \| \qquad \cos(\ ) = 0{,}88113$$

$$\sqrt{1 + \frac{45}{4}}\ \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{9}{16}}$$

$$\| \qquad \cos(\ )$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{161}}{12}$$

$(-11 ; -\frac{3\sqrt{5}}{2})$

$$\| \qquad \| \qquad \cos(\ ) = 0{,}88113$$

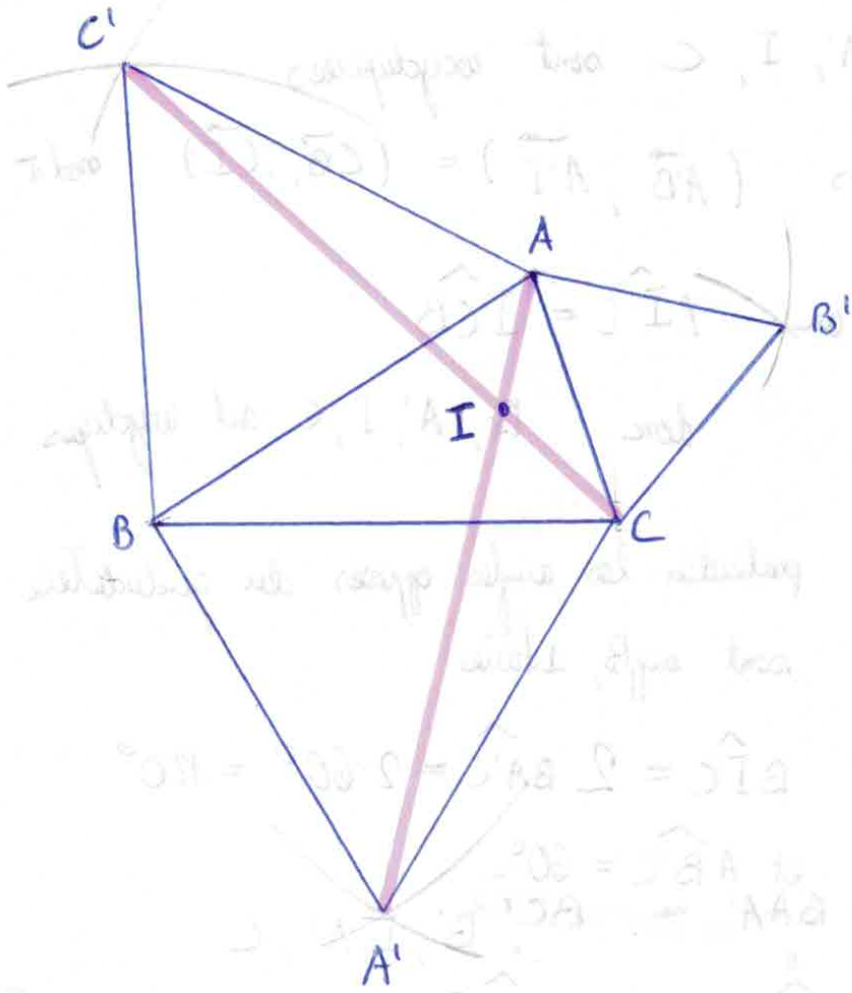
$$\overrightarrow{HF'} \cdot \vec{u} = \frac{11\sqrt{5}}{3} + \frac{9\sqrt{5}}{8} = \frac{115\sqrt{5}}{24}$$

$$\| \qquad \cos(\ )$$

$$\sqrt{121 + \frac{45}{4}}\ \sqrt{\frac{5}{9} + \frac{9}{16}}$$

Les 2 angles ont les mêmes !

Q5



1) $BAB' \overset{iso}{\sim} CAC'$, car

$B'A = CA$

$C'A = BA$

et $\widehat{C'AC} = 60° + \widehat{BAC}$

$\widehat{BAB'} = 60° + \widehat{BAC}$ $\Big]$ =

Par le critère CAC, $BAB' \overset{iso}{\sim} CAC'$,

donc $BB' = CC'$

de même $ACA' \overset{iso}{\sim} B'CB$

$AC = B'C$

$CA' = CB$

et $\widehat{ACA'} = \widehat{ACB} + 60°$

$\widehat{B'CB} = \widehat{ACB} + 60°$ $\Big]$ =

d'où $AA' = BB'$

2) $C'BC \overset{iso}{\sim} ABA'$: critère CCC : $AB = C'B$, $CC' = AA'$, $BA' = BC$

donc $\widehat{BA'A} = \widehat{C'CB}$

$\widehat{BA'I} \quad \widehat{ICB}$

Or B, A', I, C sont cocycliques

corde commune $[A'I]$ $\Leftrightarrow (\vec{A'B}, \vec{A'I}) = (\vec{CB}, \vec{CI})$ mod π

ou $\widehat{A'BI} = \widehat{ICB}$

donc B, A', I, C sont cocycliques

En particulier les angles opposés du quadrilatère sont supplémentaires

$$\widehat{BIC} = 2\,\widehat{BA'C} = 2 \cdot 60° = 120°$$

De même $\widehat{BAA'} = \widehat{BC'C}$

$\widehat{BAI}$ $\qquad$ $\widehat{BC'I}$ $\Rightarrow$ B, A, C', I sont cocycliques

donc les angles opposés sont supplémentaires

$$\widehat{BIA} = 2\,\widehat{BC'A} = 2 \cdot 60° = 120°$$

3) $I \notin (BB')$ $\qquad$ $\widehat{AIC} = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$ $\qquad$ A, I, C, B' sont cocycliques

et $\widehat{AB'C} = 60°$

$I \in (AA') \cap (BC')$

donc $\widehat{B'IC} = \widehat{B'AC} = 60°$ (même côté de l'arc $[B'C]$)

aussi $\widehat{BIC} + \widehat{B'IC} = 120° + 60° = 180°$

Concours de recrutement

5 février 2013
15h00 à 18h00

EPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1-z^2)\cdot(i+1)-(z^6-1)\cdot(i-1)=0$$

(4 points)

2) Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe i. Dans le quart de tour direct de centre O, le point M d'affixe z a pour image le point M' d'affixe z'. Quel est le lieu des points M tels que les points A, M et M' sont alignés ? Illustrer l'exercice par une figure.

(4 points)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos9x-2cos6x=2$

(4 points)

4) On considère les suites $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ définies par :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2, u_o=1$$
$$v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$$

a) Calculer u_1, u_2, u_3
b) Démontrer que pour tout entier naturel n $\geq$4,
$u_n \geq 0$. *En déduire*: $u_n \geq n-3$ *pour tout entier naturel* $n \geq 5$.
c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in IN}$.
d) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. En déduire l'expression de u_n et $S_n=\sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de n.

(4 points)

5) *La fête nationale*
Le 23 juin, il fait beau 8 fois sur 10.
Le comité des fêtes dispose de 2 sources de prévisions météorologiques indépendantes :
- la météo nationale, qui se trompe 2 fois sur 100 et
- une grenouille verte, qui se trompe une fois sur 20.
La météo annonce de la pluie, alors que le comportement de la grenouille laisse prévoir du beau temps. On définit les événements suivants :
A : « il fait beau » B : « la météo annonce de la pluie et la grenouille du beau temps »
G : « la grenouille a raison » M : « la météo a raison »

a) Calculer $P(B|A)$ et $P(B|\overline{A})$ et en déduire $P(B)$
b) Déterminer la probabilité pour qu'il fasse beau.
c) Quel sera le temps le plus probable ?

(4 points)

Q1

$$(1-z^2)(i+1) + (1-z^6)\cdot(i-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-z^2)(i+1) + (1-z^3)(1+z^3)\cdot(i-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-z^2)(i+1) + (1-z)(1+z+z^2)(1+z)(1-z+z^2)\cdot(i-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-z^2)\left[(i+1) + (1+z+z^2)(1-z+z^2)\cdot(i-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \underbrace{(i+1) + (1+z+z^2)(1-z+z^2)\cdot(i-1) = 0}_{(*)}$$

$$\Leftrightarrow z = \pm 1 \quad \text{ou} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow (i+1) + (1 - z + z^2 + z - z^2 + z^3 + z^2 - z^3 + z^4)(i-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (i+1) + (1 + z^2 + z^4)(i-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (i-1)z^4 + (i-1)z^2 + 2i = 0 \qquad (E_*)$$

posons $t = z^2 \in \mathbb{C}$,

alors (E_*) devient

$$(i-1)t^2 + (i-1)t + 2i = 0$$

$$\Delta = (i-1)^2 - 4\cdot(i-1)\cdot 2i$$

$$= -2i + 8i + 8$$

$$= 6i + 8$$

racines carré de Δ : $(x+iy)^2 = 8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = 6 \rightarrow x \text{ et } y \text{ même signe} \\ x^2+y^2 = 10 \end{cases}$$

$|x+iy|^2 = |8+6i|$

$2x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3$

$2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$

$\delta_1 = 3+i$ et $\delta_2 = -3-i$

D'où

$$t_1 = \frac{-(i-1)+3+i}{2(i-1)} = \frac{4}{2(i-1)} = \frac{-2}{(1-i)} = \frac{-2(1+i)}{2} = -(1+i)$$

$$t_2 = \frac{-(i-1)-3-i}{2(i-1)} = \frac{-2-2i}{2(i-1)} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

Ainsi tout revient à déterminer les racines carrés de

$-1-i$ et i

Pour i : ⊙ nous que c'est

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

et $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$(x+iy)^2 = -1-i$

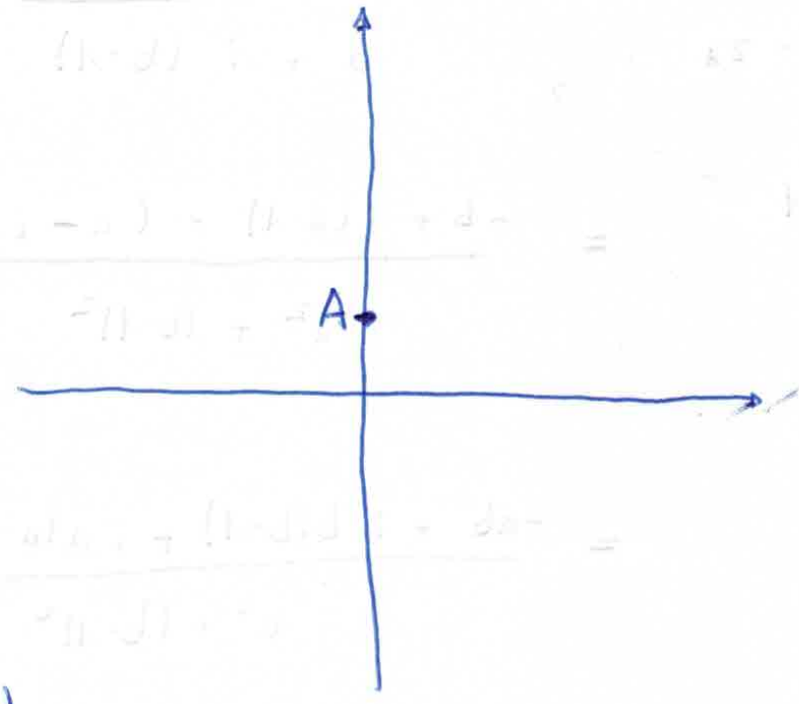
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = -1 \\ 2xy = -1 \Rightarrow x \text{ et } y \text{ de signe opposé} \\ x^2+y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$x^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ $\quad y^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$S = \{1, -1, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ $\quad z_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\,i$

$z_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$

Q2



A (i)

M (z)

M'(z') est l'image du quart de tour direct de M

↳ $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$

$= iz$

si $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

alors $z' = -b + ia$

A, M et M' sont alignés

$\Leftrightarrow$ A = M ou $\arg\left(\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z = i$ ou $\frac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A}$ est réel

Or $\dfrac{z_{M'} - z_A}{z_M - z_A} = \dfrac{-b + i(a-1)}{a + i(b-1)}$

si $M = A$
$\Leftrightarrow a \neq 0$ et $b \neq 1$

$$= \frac{-b + i(a-1) \cdot (a - i(b-1))}{a^2 + (b-1)^2}$$

$$= \frac{-ab + i\,b(b-1) + i\,a(a-1) + (a-1)(b-1)}{a^2 + (b-1)^2}$$

$$= \quad + i \frac{a(a-1) + b(b-1)}{a^2 + (b-1)^2}$$

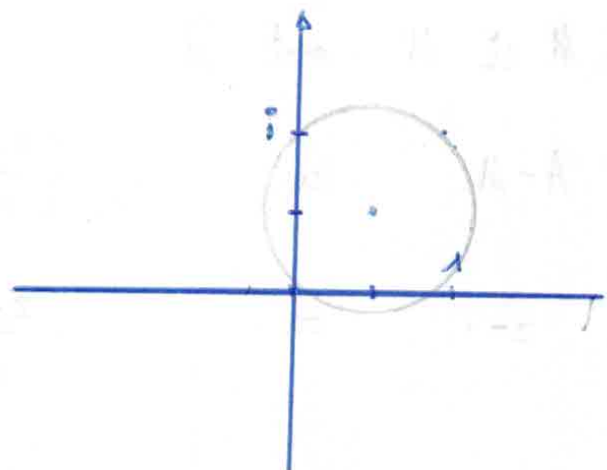
A, M, M' alignés $\Leftrightarrow$ $a(a-1) + b(b-1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}a + \frac{1}{4} + b^2 - 2\cdot\frac{1}{2}b + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

cercle de centre $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$
contenant le point $A(0;1)$

$\mathcal{L} = \mathcal{C}\left(\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Q3

$\cos 9x - 2\cos 6x = 2$ Domaine d'étude : $\mathbb{R}$

$t = 3x$

$\Leftrightarrow \cos 3t - 2\cos 2t = 2$

$\Leftrightarrow \cos 3t = 2(1+\cos 2t) = 4\cos^2 t$

$\Leftrightarrow -3\cos t + 4\cos^3 t = 4\cos^2 t$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 4\cos^2 t - 3\cos t = 0$

$\Leftrightarrow \cos t\,(4\cos^2 t - 4\cos t - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cos 3x = 0}_{(1)}$ ou $\underbrace{4\cos^2 3x - 4\cos 3x - 3 = 0}_{(2)}$

Résolution de (1)

$\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $3x = -\frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$

Résolution de (2) :

Posons $y = \cos 3x \in [-1;1]$

$4y^2 - 4y - 3 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$

$y_1 = \frac{4+8}{} = \frac{3}{} \notin [-1,1]$, à rejeter

$$y_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$$

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} ; \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \right\}$$

Q4

a) $u_1 = u_{0+1} = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$

$u_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$

$u_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{14}{9}\right) + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$

b) Soit $n \geq 4$,

alors $u_4 = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{14}{27}\right) + 3 - 2 = \frac{67}{81} \geq 0$

Cas de base : $u_4 \geq 0$

Prouvons que si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq 0$ (avec $n \geq 4$)

On $u_{n+1} = \frac{1}{3}\underbrace{u_n}_{\geq 0} + \underbrace{n-2}_{\geq 0 \text{ car } n \geq 4} \geq n - 2 \geq 0$

ainsi $u_{n+1} \geq 0$

Par récurrence, on obtient que $u_n \geq 0$ si $n \geq 4$.

Soit $n \geq 5$

$u_5 = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{67}{81}}_{\substack{\geq 0 \\ < 1}} + \underbrace{\frac{4-2}{2}}_{1} \geq 1 = 5 - 3$

Cas de base $u_5 \geq 5 - 3$

Prouvons que si $u_n \geq n - 3$, alors $u_{n+1} \geq (n+1) - 3 = n - 2$

On $u_{n+1} = \frac{1}{3}\underbrace{u_n}_{\geq 0} + n - 2 \geq n - 2$

Ainsi, par récurrence $u_n \geq n - 3 \quad \forall n \geq 5$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

car pour n suffisamment grand ($n \geq 5$, ou car $n \to +\infty$)

on a $u_n \geqslant \underbrace{n-3}_{\to +\infty \text{ si } n \to +\infty}$

d) $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$$

$$= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n - \frac{15}{2}$$

$$= -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}v_n$$

$$v_0 = -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$$

Définition récurrente : $\begin{cases} v_0 = -\frac{25}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \end{cases}$

suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $-\frac{25}{2}$

Définition explicite $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0$

$$2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = -\frac{v_n}{2} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$S_n = \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{i=0}^{n} \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{25}{2}\right) \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + (n+1)\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)$$

$$= \frac{25}{4} \quad \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(n+1)\left(n - \frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2}(n+1)\left(n - \frac{7}{2}\right)$$

Q3

b) $P(A|B)$

$P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$P(M) = \frac{98}{100} = \frac{49}{50}$

$P(G) = \frac{19}{20}$

M et G sont indépendants

a) $B|A$ ~~probabilité que~~ ~~la météo se trompe et le grenouille a raison~~.

$P(B|A) = P(G|A)\ P(\bar{M}|A)$ évén. indép

$= P(G)\ P(\bar{M})$

$= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{50}$

$= \frac{19}{1000}$

que le grenouille se trompe est indép du temps que la météo

même raisonnement

$P(B|\bar{A}) = P(M)\ P(\bar{G})$

$= \frac{49}{1000}$

$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A})\ P(\bar{A})$

$= \frac{19}{1000} \cdot \frac{4}{5} + \frac{49}{1000} \cdot \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{40}$

b) $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{19}{1000} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{1}{40}}$

$= \frac{76}{}$

c) $P(A|B) > \frac{1}{2}$

Ainsi, avec les prévisions, on peut s'attendre à ce qu'il fasse beau.

Exemple

Le jour de grève, la météo nationale assure un service minimum avec deux grenouilles aux comportements indépendants quel que soit le temps. En mai, il pleut en moyenne 2 jours sur 5.
Quand il va pleuvoir, chaque grenouille annonce la pluie 8 fois sur 10 et elles annoncent simultanément le beau temps une fois sur 25. Quand il va faire beau, chacune annonce le beau temps 9 fois sur 10.
Le 13 mai, jour de grève, elles annoncent toutes les 2 qu'il va faire beau. Calculer la proba pour qu'il pleuve.

B = il va faire beau $\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{2}{5}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{5}$

G_i = la i^e grenouille annonce du beau temps (des grenouilles lorsqu'il pleut)
on considère qu'il y a également indép. du comportement $\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | C) \neq \mathbb{P}(G_1|C) \cdot \mathbb{P}(G_2|C)$

$\mathbb{P}(\overline{G_1} | \overline{B}) = \frac{8}{10} = \mathbb{P}(\overline{G_2} | \overline{B})$ car $= \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$

$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | \overline{B}) = \frac{1}{25} = \mathbb{P}(G_1|\overline{B})\,\mathbb{P}(G_2|\overline{B}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$ $= \frac{\mathbb{P}((G_1 \cap C) \cap (G_2 \cap C))}{\mathbb{P}(C)}$

$\mathbb{P}(G_1 | B) = \mathbb{P}(G_2 | B) = \frac{9}{10}$ $\Rightarrow$ il faut $(G_1 \cap C) \perp\!\!\!\perp (G_2 \cap C)$

$$\mathbb{P}(\overline{B} \mid G_1 \cap G_2) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)} = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B})}{\mathbb{P}(G_1)\,\mathbb{P}(G_2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 | \overline{B}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B})}{\left(\mathbb{P}(G_1|\overline{B})\,\mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(G_1|B)\,\mathbb{P}(B)\right)\left(\mathbb{P}(G_2|\overline{B})\,\mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(G_2|B)\,\mathbb{P}(B)\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{125} \cdot 1}{\left(\frac{4}{50} + \frac{27}{50}\right)^2} = \frac{2}{125} \cdot \frac{50^2}{31^2}$$

$= \frac{40}{961}$ FAUX

Alg Proba 2013

$$\mathbb{P}(\bar{B} \mid G_1 \cap G_2) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}$$

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)$$

$$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_1 \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G_1 \mid \bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{31}{50}$$

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_2 \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G_2 \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B})$$
$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{31}{50}$$

$$\mathbb{P}(G_1) \cdot \mathbb{P}(G_2) = \frac{961}{2500}$$

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})$$

$$\mathbb{P}(G_1 \mid B) = \frac{9}{10} = \mathbb{P}(G_2 \mid B)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(G_1 \mid B)\,\mathbb{P}(G_2 \mid B) = \frac{81}{100} \overset{?}{=} \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid B)$$

$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B}) = \mathbb{P}(G_1 \mid B) \cdot \mathbb{P}(G_2 \mid B)$ par G_i indep qqe soit le temps.

$$\mathbb{P}(\bar{B} \mid G_1 \cap G_2) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid B)\,\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(G_1 \mid \bar{B}) \cdot \mathbb{P}(G_2 \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(G_1 \mid B)\,\mathbb{P}(G_2 \mid B)\,\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{8}{251}$$

$\mathbb{P}$ B : il fait beau $\quad P(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ $\quad P(B) = \frac{3}{5}$

G_i : prévoir l'annonce du beau temps

$\mathbb{P}(\overline{G_i} \mid \bar{B}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\quad \mathbb{P}(G_i \mid \bar{B}) = \frac{1}{5}$

$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B}) = \frac{1}{25} = \mathbb{P}(G_1 \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(G_2 \mid \bar{B})$ (comp. indép. : quelque soit le temps)

$\mathbb{P}(G_i \mid B) = \frac{9}{10}$

$$\mathbb{P}(\bar{B} \mid G_1 \cap G_2) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B})}{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{2}{5}}{\mathbb{P}(G_1 \cap G_2)}$$

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid \bar{B})\,\mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \mid B)\,\mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{2}{5} + \mathbb{P}(G_1 \mid B)\,\mathbb{P}(G_2 \mid B)\,\mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{2}{125} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{251}{500}$$

D'où $\quad \mathbb{P}(\bar{B} \mid G_1 \cap G_2) = \dfrac{\frac{2}{125}}{\frac{251}{500}} = \frac{8}{251}$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHEMATIQUES

EPREUVE D'ANALYSE

Mardi, le 21 janvier 2014 de 15h00 à 18h00

QUESTION I : 8 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x+1)ln|x+1|$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$.

1) Faire une étude complète de f. (domaine de définition, domaine de continuité, limites, branches infinies, domaine de dérivabilité et dérivée première, dérivée seconde, tableau des variations, intersections de la courbe C_f avec les axes de coordonnées)

2) Tracer C_f, la représentation graphique de f, dans un RON$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.(unité : 2 cm)

3) **a)** Déterminer, lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = (x+1)^2 ln|x+1|$

b) α étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$, calculer l'aire $A(\alpha)$ de la surface $S(\alpha)$ ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $-1+\alpha \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

c) Calculer $\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$.

QUESTION II : 5 points

Discuter le nombre de solutions de l'équation suivante selon les valeurs du paramètre réel m et résoudre l'équation aux cas où elle admet une solution unique.

$$(E) \equiv (4-m)(0{,}2)^x + (2m-6)\sqrt{(0{,}2)^x} - 4m + 12 = 0$$

QUESTION III : 4 points

Un flotteur a la forme d'un solide de révolution engendré par la rotation autour de (Ox) de la surface délimitée par (Ox) et la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = sin^2\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer la valeur exacte du volume du flotteur.

QUESTION IV : 3 points

On donne la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} a - b^x & si\ x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & si\ x \geq 0 \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \epsilon \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x = 0$.

Q1

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\ln|x+1| & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

Continuité

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que composée de fonctions continues

Continuité en -1 :

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \underbrace{(x+1)}_{\to 0^+} \underbrace{\ln(x+1)}_{\to +\infty}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \quad \begin{matrix} \to +\infty \\ \to +\infty \end{matrix}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to (-1)^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} -(x+1)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} \underbrace{(x+1)}_{\to 0^-} \underbrace{\ln(-x-1)}_{\to +\infty}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to (-1)^-} -(x+1)$$

$$= 0$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = 0$,

c'est-à-dire la limite en -1 de f existe et vaut 0 : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

Comme $f(-1) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

c'est-à-dire f est continue en -1 :

$$\text{dom}_c f = \mathbb{R}$$

Limites aux bornes du domaine

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{(x+1)}{x}}_{\to 1} \underbrace{\ln(x+1)}_{\to +\infty} = +\infty$$

$\mathcal{C}_f$ admet (en $+\infty$) une branche parabolique de direction (Oy).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to -\infty} \underbrace{\ln(-x-1)}_{\to +\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{(x+1)}{x}}_{\to 1} \underbrace{\ln(-x-1)}_{\to +\infty} = +\infty$$

$\mathcal{C}_f$ admet (en $-\infty$) une branche parabolique de direction (Oy)

dérivabilité

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f'(x) = \ln|x+1| + (x+1)\frac{1}{x+1}$$

$$= \ln|x+1| + 1$$

$0 \leq |x+1| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq x+1 \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$

dérivabilité en -1

$$\lim_{x \to (-1)^+} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} [\ln(x+1)+1] = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^-} [\ln(x+1)+1] = -\infty$$

Ainsi f n'est pas dérivable en -1 et

$(-1;0)$ est un point d'inflexion à tangente verticale.

(Autre méthode : regarder $\lim_{x \to (-1)^+}$ et $\lim_{x \to (-1)^-}$ de $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

$$\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \text{dom } f''$$

Dérivée seconde

$$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

et $\forall x \in \text{dom } f''$, $f''(x) = \frac{1}{x+1}$.

Tableau $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln|x+1| = \ln e^{-1}$

$\Leftrightarrow |x+1| = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}-1$ ou $x = -\frac{1}{e}-1$

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{e}$		-1		$-1+\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$+\infty$
				$-\infty$	$-\infty$				
$f''(x)$		$-$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	max	↘	0	↘	min	↗	$+\infty$
concavité de f		∩		∩		∪		∪	

maximum local : $f\left(-1-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left|\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e}$

$I_1\left(-1-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

minimum local : $f\left(-1+\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln\left|\frac{1}{e}\right| = -\frac{1}{e}$

$I_2\left(-1+\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$

Intersection avec les axes

$\mathcal{C}_f \cap O_x \Leftrightarrow (x+1)\ln|x+1| = 0 \quad \forall x \in D_f$

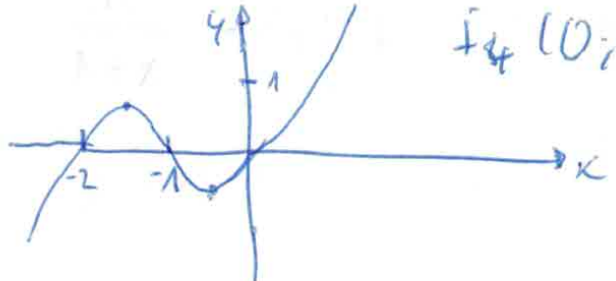
$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=0$ ou $x=-2$

$I_3(-1;0)$; $I_4(0,0)$; $I_5(-2;0)$

$\mathcal{C}_f \cap O_y$: $f(0) = 1 \ln|1| = 0$

$I_4(0;0)$.

2)



3) a) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = 2(x+1)\ln|x+1| + (x+1)^2 \frac{1}{(x+1)}$$

$$= 2(x+1)\ln|x+1| + (x+1)$$

$$= (x+1)\left(2\ln|x+1| + 1\right)$$

$$\lim_{x \to (-1)^+} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \frac{2\ln(x+1) + 1}{\frac{1}{(x+1)}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to (-1)^+} \frac{\frac{2}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \to (-1)^+} -2(x+1)$$

$$= 0$$

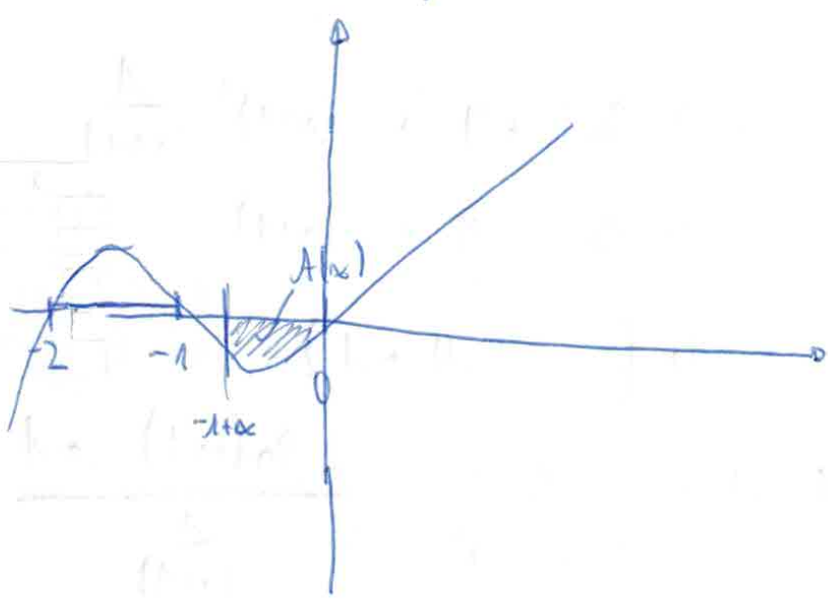
$$\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \ldots = 0$$

Ainsi $\lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} f'(x)$

mais f n'est pas dérivable en -1, vu que f n'est pas définie en -1.

A On a $f_g'(-1) = 0 = f_d'(-1) = 0$

b) Soit $\alpha \in]0;1[$



sur $[-1+\alpha, 0]$ $\quad x+1$ est positif : $x+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

≥ -1

$$A(\alpha) \int_{-1+\alpha}^{0} -f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1+\alpha}^{0} -(x+1)\ln(x+1)\,dx$$

$\ln(x+1)$ $\quad$ $(x+1)$

$\frac{1}{x+1}$ $\quad$ $\frac{1}{2}(x+1)^2$

$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1)\right]_{-1+\alpha}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-1+\alpha}^{0} x+1\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)\right]_{-1+\alpha}^{0} + \frac{1}{4}\left[(x+1)^2\right]_{-1+\alpha}^{0}$$

$$= 0 + \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) + \frac{1}{4}(1-\alpha^2)$$

$\to 0$

c) $\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \frac{1}{2}\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\ln(\alpha)}{\frac{1}{\alpha^2}} + \frac{1}{4}$ $\quad$ (H) $= \frac{1}{2}\lim \frac{\frac{1}{\alpha}}{-2\frac{1}{\alpha^3}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Q2

$(E) \equiv (4-m)(0,2)^x + (2m-6)\sqrt{(0,2)^x} - 4m+12 = 0$

$Dom = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, posons $t = (0,2)^{\frac{x}{2}} > 0$, alors (E) s'écrit

$(E_{mod}) \equiv (4-m)t^2 + (2m-6)t - 4m+12 = 0$

si $\underline{m=4}$, on obtient

$$2t - 16 + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 2$$
$$\Leftrightarrow (0,2)^{\frac{x}{2}} = 2$$
$$\Leftrightarrow x = 2\log_{0,2} 2 \quad \text{(solution unique)}$$

si $\underline{m \neq 4}$, calculons $\Delta_m = (2m-6)^2 - 4(4-m)(-4m+12)$

$$= -12m^2 + 88m - 156$$

$\Delta_m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ ou $m = \frac{13}{3}$

	$-\infty$		3		$\frac{13}{3}$	
Δ_m		$-$	0	$+$	0	$-$

si $m = 3$ $\Delta_m = 0$

$t = \frac{6-2m}{2(4-m)} = 0$ ↯ car $t > 0$ pas de solution

si $m = \frac{13}{3}$ $\Delta_m = 0$ $t = \frac{6-2m}{2(4-m)} = 4 \Leftrightarrow (0,2)^{\frac{x}{2}} = 4$

$\Leftrightarrow \quad (0,2)^{\frac{x}{2}} = 0,2^{\log_{0,2} 4}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \log_{0,2} 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 4 \log_{0,2} 2$

Au total,

si $m \in]-\infty ; 3] \cup]\frac{13}{3}, +\infty[$, (E) n'admet pas de solutions

si $m \in]3;4[\cup]4;\frac{13}{3}[$, (E) admet 2 solutions (*)

si $m = 3$, (E) admet la solution unique $4 \log_{0,2} 2$

si $m = 4$, (E) admet la solution unique $2 \log_{0,2} 2$.

(*) Il faut étudier le signe de t_1 et t_2 car $t > 0$

On considère le produit P et la somme S des 2 solutions

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-4m+12}{4-m} = \frac{12-4m}{4-m} = \frac{4(3-m)}{4-m}$$

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{(2m-6)}{4-m} = \frac{6-2m}{4-m} = \frac{2(3-m)}{4-m}$$

	3		4		$\frac{13}{3}$
P	0	$-$	$\|\|$	$+$	
S	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Une solution est >0 et l'autre <0.

Les 2 solutions sont >0

Conclusion : si $m \in]3,4[$ (E) admet une solution unique

pour $m \in]3;4[$

$$t_{1/2} = \frac{\overbrace{6-2m}^{<0} \pm \sqrt{-12m^2+88m-156}}{\underbrace{2(4-m)}_{>0}}$$

donc la solution positive est

$$t_1 = \frac{3-m + \sqrt{-3m^2+22m-39}}{(4-m)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (0,2)^{\frac{x}{2}} = \text{———————}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \log_{0,2} \frac{3-m+\sqrt{-3m^2+22m-39}}{4-m}$$

QIII :

Posons

$f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad$ $\text{dom } f = \mathbb{R} = \text{dom}_c f$

De plus $\forall x \in [0;\pi]$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$$

Volume du plateau

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left[\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\left(1-\cos(x)\right)^2 \frac{1}{2}\left(1+\cos(x)\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \left(1-\cos(x)\right)\underbrace{\left(1-\cos^2(x)\right)}_{\sin^2(x)} dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx - \int_0^{\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx - \underbrace{\frac{1}{3}\left[\sin^3(x)\right]_0^{\pi}}_{=0}\right]$$

$$= \frac{\pi}{16}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \text{ u.V.}$$

Q IV

$$f(x) = \begin{cases} a - b^x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}, \ b > 0 \text{ et } b \neq 1$$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

continuité de f en 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a - b^x = a - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 - 2x^2 + x = 0$$

f est continue en $0 \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\iff a - 1 = 0$

$\iff a = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -b^x \ln(b) & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\ln(b)$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$

* $\lim_{x \to a} f(x) = k$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = k$

dérivabilité en 0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - b^x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - b^x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-b^x \ln(b)}{1} = -\ln(b)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} x^2 - 2x + 1 = 1$$

Or f est dérivable en 0

$\Leftrightarrow$ dérivées à droite et à gauche $\exists$ et coïncident

$\Leftrightarrow -\ln(b) = 1$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{e}$

ainsi $a = 1$ et $b = \frac{1}{e}$

et $$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

lundi, le 27 janvier 2014

15H00 – 18H00

I. Soient A et B deux points distincts du plan et d la médiatrice du segment [AB]. Soient M un point de d, d_1 la médiatrice de [BM] et d_2 la droite passant par M et parallèle à la droite (AB). Notons L le point d'intersection des droites d_1 et d_2.

1) Chercher le lieu $\mathbb{L}$ décrit par le point L quand M parcourt la droite d. Indiquer les éléments caractéristiques de ce lieu $\mathbb{L}$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A(0 ; 7) et B(0 ; –5). Chercher une équation du lieu $\mathbb{L}$.

(5 points)

II. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points A(–4 ; –2 ; 2) et B(–4 ; 2 ; 4) ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

On note d_1 la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et d_2 la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Chercher une équation de la sphère de centre Ω tangente aux droites d_1 et d_2 sachant que Ω et les points de contact T_1 et T_2 sont alignés.

(5 points)

III. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A(1 ; 1), B(2 ; 3), A'(–2 ; 4) et B'(9 ; 6).

1) Donner la forme complexe de la similitude f qui transforme A en A' et B en B'.
2) Chercher le rapport k et le centre I de cette similitude.
3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{1}{5}$ et s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $d \equiv x + y = 0$. Chercher l'expression analytique de la composée $g = f \circ h \circ s$.

(5 points)

IV. Soient A, B, C et D quatre points du plan, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

1) Sous quelle condition peut-on avoir I = J ?
2) On suppose I ≠ J. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.
3) On suppose I ≠ J et AB = CD. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

(5 points)

Q1

Choix du RON :

A : l'origine

droite // d et passant par A : axe des abscisses

droite (AB) : axe des ordonnées

Ainsi $A(0;0)$

$B(0;y_B)$ avec $y_B \neq 0$ car $A \neq B$

la médiatrice de [AB] a pour équation : $d : y = \frac{y_B}{2}$

$M \in d \Leftrightarrow M\left(\lambda ; \frac{y_B}{2}\right)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit X = mil [BM], alors $X\left(\frac{\lambda}{2} ; \frac{y_B + \frac{y_B}{2}}{2}\right) = X\left(\frac{\lambda}{2} ; \frac{3y_B}{4}\right)$

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \lambda - 0 \\ \frac{y_B}{2} - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \lambda \\ -\frac{y_B}{2} \end{pmatrix}$$

vecteur directeur de d_1 : $\overrightarrow{d_1}\begin{pmatrix} \frac{y_B}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$

$S(x;y) \in d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{XS} // \overrightarrow{d_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{\lambda}{2} & \frac{y_B}{2} \\ y - \frac{3y_B}{4} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(x - \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{y_B}{2}\left(y - \frac{3y_B}{4}\right) = 0$$

($M \in d_2$ et $M \parallel Oy$) :

$d_2 \equiv x = 6$

$d_1 \cap d_2$: $x\left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{y_B}{2}\left(y - \frac{3y_B}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 = y_B\left(y - \frac{3y_B}{4}\right)$

parabole : ...

2) dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$ avec $A(0;7)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\mathcal{L} \equiv X^2 = Y_B\left(Y - \frac{3Y_B}{4}\right)$

ce qu'on aurait trouvé

dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\begin{cases} x = X + 0 \\ y = Y + 7 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_B = X_B \\ y_B = Y_B + 7 \end{cases}$

l'équation devient $x^2 = (y_B - 7)\left((y-7) - \frac{3(y_B-7)}{4}\right)$

avec $y_B = -5$

soit $y_B - 7 = -12$

$x^2 = -12\left(y - 7 + 9\right)$

$= -12(y+2)$

La droite (T_1T_2) est $\perp$ à d_1 et d_2

II

Or d_1 et d_2 ne sont pas parallèles car vecteurs directeurs non colinéaires, donc il s'ensuit par existence et unicité de la perpendiculaire commune que

(T_1T_2) est la perpendiculaire commune à d_1

$$d(d_1,d_2) = \frac{|(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= (1;\ 2;\ -1)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}1&0\\1&-1\end{matrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$d(d_1,d_2) = \frac{|8-2|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$r_S = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Il faut encore déterminer T_1 et T_2, puis calculer $\Omega = \text{mil}[T_1$

On a pour équation de la perpendiculaire commune

éq. cart. du plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{u}\wedge\vec{v})$

$M(x;y;z) \in \mathcal{P}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+4 & 1 & 1\\ y+2 & 0 & 2\\ z-2 & 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+4) - (-2)(y+2) + 2(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+4-(y+2)-(z-2) =$$

$$\Leftrightarrow x-y-z+4=0$$

$M(x,y,z) \in P' \left(B; \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z-4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+4) - 0 + 3(z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+4+z-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+z = 0$$

$$(T_1T_2) = \begin{cases} x-4+z+4 = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$$

$$d_1 \cap (T_1T_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4+k \\ y = -2 \\ z = 2+k \\ x-4-z+4 = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$$

$-2+2k = 0$
$\Leftrightarrow k = 1$
$\Rightarrow x = -3$
$z = 3$

Vérif. : $-3+2-3+4 \stackrel{!}{=} 0$

d'où $T_1(-3; -2; 3)$

$$d_2 \cap (T_1T_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4+k \\ y = 2-k \\ z = 4-k \\ x-4-z+4 = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$$

$-4+k-2+k-4+k+4$
$= -6+3k$
$= 0$
$\Leftrightarrow k = 2$

d'où $T_2(-2; 0; 2)$

$\Omega = \left(\frac{-5}{2}; \frac{-2}{2}; \frac{5}{2}\right)$

$\mathcal{S}(\Omega, r) \equiv \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z-\frac{5}{2}\right)^2$
$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Q3

$A(1;1)$; $B(2;3)$; $A'(-2;4)$; $B'(9;6)$

$A(1+i)$ $B(2+3i)$ $A'(-2+4i)$ $B'(9+6i)$

1) Expression complexe de la transformation affine : similitude directe

$f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

ici : $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = \dfrac{9+6i-(-2+4i)}{2+3i-(1+i)} = \dfrac{11+2i}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i}$

$= \dfrac{11-22i+2i+4}{5}$

$= 3-4i$

Comme $a \neq 1$, il s'agit effectivement d'une similitude directe.

$b = -2+4i-(3-4i)(1+i)$

$= -2+4i-(3+3i-4i+4)$

$= -9+5i$

Ainsi $f(z) = (3-4i)z + (-9+5i)$

2) rapport : $|a| = \sqrt{9+16} = 5$

$\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-9+5i}{1-(3-4i)} = \dfrac{-9+5i}{-2+4i} \cdot \dfrac{-2-4i}{-2-4i} = \dfrac{18+36i-10i+20}{20}$

$= \dfrac{38}{20} + \dfrac{26}{20}i$

$= \dfrac{19}{10} + \dfrac{13}{10}i$

centre : $\Omega\left(\dfrac{19}{10}; \dfrac{13}{10}\right)$

3)

h : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5} x \\ y' = \frac{1}{5} y \end{cases}$ $\qquad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

s : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ $\qquad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

↳ réflexion y. à la droite $y = -x$

f : $\begin{cases} x' - \frac{19}{10} = \cos(\arg(u))\left(x - \frac{19}{10}\right) - \sin(\arg(u))\left(y - \frac{13}{10}\right) \\ y' - \frac{13}{10} = \sin(\arg(u))\left(x - \frac{19}{10}\right) + \cos(\arg(u))\left(y - \frac{13}{10}\right) \end{cases}$

$\arg(u)$ = $\arg(3-4i)$ ≈ $-53{,}13°$

$(x', y') = g(x, y) = f(h(s(x, y))) = f(h(-x, -y))$

$= f\left(-\frac{1}{5}x, -\frac{1}{5}y\right)$

$= \begin{cases} \cos(\arg(u))\left(-\frac{1}{5}x - \frac{19}{10}\right) - \sin(\arg(u))\left(-\frac{1}{5}y - \frac{13}{10}\right) + \frac{19}{10} \\ \sin(\arg(u))\left(-\frac{1}{5}x - \frac{19}{10}\right) - \sin(\arg(u))\left(-\frac{1}{5}y - \frac{13}{10}\right) + \frac{13}{10} \end{cases}$

Q4

2) $\| \vec{MI} + \vec{IA} + \vec{MI} + \vec{IB} \| = \| 2\vec{MJ} + \vec{JC} + \vec{JD} \|$

$\Leftrightarrow \| 2\vec{MI} \| = \| 2\vec{MJ} \|$ 1:2

$\Leftrightarrow \| \vec{MI} \| = \| \vec{MJ} \|$

$\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment $[IJ]$

3) $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

$\Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MA} + \dots$

$\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = (\vec{MJ} + \vec{JC})^2 + (\vec{MJ} + \vec{JD})^2$

$\Leftrightarrow MI^2 + 2\vec{MI}.\vec{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\vec{MI}.\vec{IB} + IB^2$

$= MJ^2 + 2MJ.\vec{JC} + JC^2 + MJ^2 + 2\vec{MJ}.\vec{JD} + JD^2$

$\vec{IA} = -\vec{IB}$ E S

$\Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2$

$\Leftrightarrow 2MI^2 = 2MJ^2$ ($IA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = JC$)

$\Leftrightarrow MI^2 = MJ^2$

$\Leftrightarrow MI = MJ$

$\mathcal{E} = J$

1) Soit A est confondu avec C (resp. D) et B est confondu avec D (resp.

Soit $\vec{AC} = \pm \vec{BD}$, c'est-à-dire le quadrilatère ACBD doit former un parallélogramme

De même

$$\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$$

ainsi $I = J$ est l'isobarycentre du quadrilatère $ACBD$ qui doit être forcément un parallélogramme.

Concours de recrutement
Mathématiques

4 février 2014
15h-18h

Epreuve d'algèbre et de probabilités

I. **1.** Un service de maintenance effectue l'entretien des machines et les interventions en cas de panne. Dans ce dernier cas, une alarme est prévue.

Des études ont montré que :

- la probabilité qu'une panne se produise et égale à 0,04
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003
- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.

Calculer :

a. la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche

b. la probabilité que l'alarme se déclenche

c. la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

2. Une épidémie touche 5% de la population luxembourgeoise. Un institut de sondage choisit au hasard et de façon indépendante 20 personnes de la population luxembourgeoise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de malades parmi ces 20 personnes.

a. Calculer la probabilité que 5 personnes soient malades

b. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

(5 points)

II. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2,\ z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_C = \overline{z_B},\ z_D = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\ \ z_E = -2i \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1. Démontrer que les points A, B, C, D et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle et placer les 5 points en question.

2. Etudier la nature du triangle BCD.

(4 points)

III. Soit la suite numérique (u_n) définie sur IN par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel n : } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. Calculer les quatre premiers termes qui suivent u_0 et en déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. Prouver que pour tout entier naturel n: $u_n \leq n + 3$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n : u_{n+1}-$u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
   En déduire une validation de la conjecture sub 1)

4. On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n = u_n$ - n. Donner la nature de la suite (v_n) et l'expression explicite de son terme général. En déduire une expression explicite du terme général de la suite (u_n).

5. Etudier la convergence de la suite (u_n).

6. Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

Exprimer $S_n$en fonction de n et en déduire la limite de la suite (T_n).

(7 points)

IV. Résoudre dans IR : $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{\cos x}$

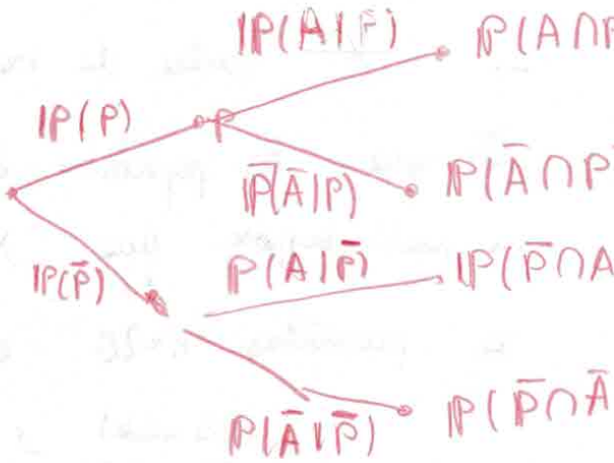
(4 points)

Q1

1. événements

P : une panne se produit

A : alarme se déclenche



Données : $\mathbb{P}(P) = 0,04$ $\quad \mathbb{P}(\bar{P}) = 0,96$

$\mathbb{P}(P \cap \bar{A}) = 0,003$

$\mathbb{P}(\bar{P} \cap A) = 0,002$

a. $\mathbb{P}(A \cap P) = \mathbb{P}(A|P) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(P)}_{\text{connu}} = 0,925 \cdot 0,04 = 0,037$

or $\mathbb{P}(A|P) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}|P) = 0,925$

avec $\mathbb{P}(\bar{A}|P) = \dfrac{\mathbb{P}(P \cap \bar{A})}{\mathbb{P}(P)} = \dfrac{0,003}{0,04} = 0,075$

b. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap P) + \mathbb{P}(A \cap \bar{P})$

$= 0,037 + 0,002$

$= 0,039$

c. $\mathbb{P}(P|A) = \dfrac{\mathbb{P}(P \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0,037}{0,039} \simeq 0,9487$

2. X : nombre de malades parmi 20

Vu que la population luxembourgeoise est suffisamment large, on peut supposer que X poserle (à peu près) la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

succès (être malade) : $p = \frac{1}{20}$

échec : $q = 1-p = \frac{19}{20}$

a. $\mathbb{P}(X=5) = C_{20}^{5} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^5 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{15} = \dots$

b. $\mathbb{E}(X) = 20 \cdot \frac{1}{20} = 1$

Le nombre de « malades » espéré vaut donc 1.

Q2

$z_A = 2$, $z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $z_C = \overline{z_B} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$z_D = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_E = -2ie^{i\frac{\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\boxed{-1 = e^{i\pi}}$ $= -2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

1. Vu que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a que $|e^{ix}| = 1$, e^{ix} est un point du cercle unité, cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

ensemble des nombres complexes de module 1

Il décrit de la forme particulière de z_D et z_E que le seul cercle en question est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 2.

Méthode 1 :

$\mathcal{C}(O;2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$

$= \{z \in \mathbb{C} \mid z = 2e^{ix} \text{ pour } x \in \mathbb{R}\}$

$|z_A| = 2$

$|z_B| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$

$|z_C| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2$

$|z_D| = 2$

$|z_E| = 2$

ou $z_A = 2 = 2e^{i0}$

$z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$z_D = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

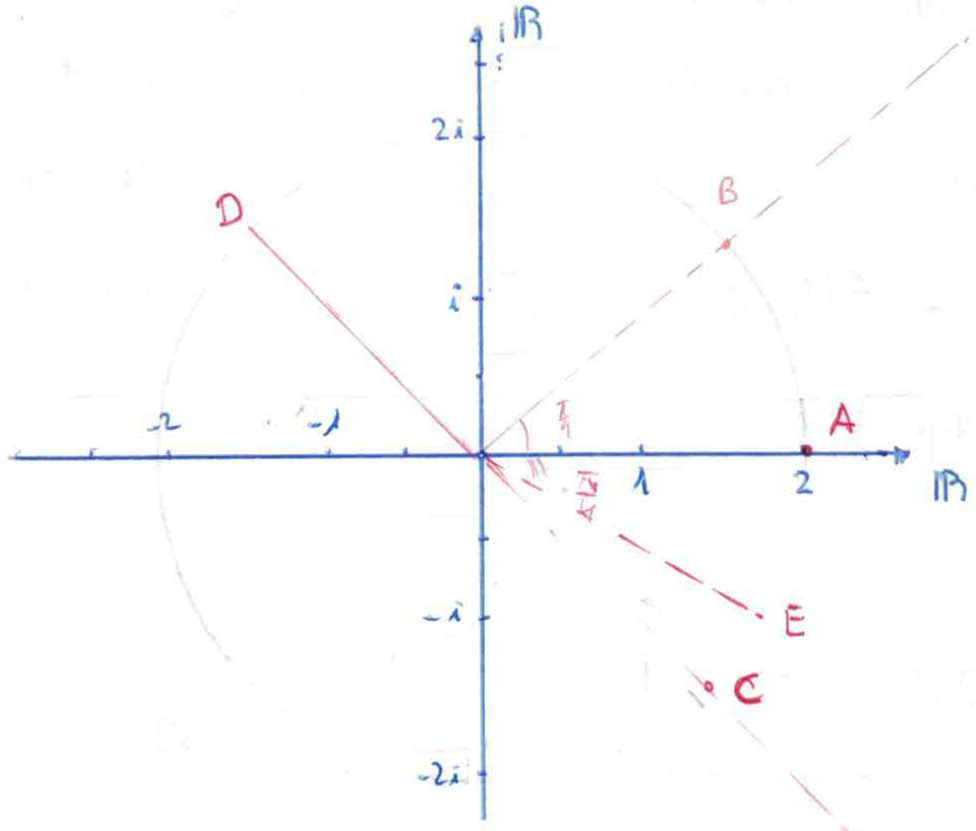
$z_E = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

Méthode 2 (en décomposant les points du plan complexe de Gauss en partie réelle et imaginaire)

$$\mathcal{C}(O;2) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \}$$

$x_A = 2$ $y_A = 0$ et $x_A^2 + y_A^2 = 4 + 0 = 4$ ✓

$x_B = \sqrt{2}$ $y_B = \sqrt{2}$



2. BCD : triangle isocèle et rectangle en B :

$$\|\vec{BD}\| = |z_D - z_B| = |-\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\|\vec{BC}\| = |z_C - z_B| = |\sqrt{2} - i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Δ BCD isocèle en B

$$\|\vec{DC}\| = |z_C - z_D| = |\sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4$$

ainsi comme $BD^2 + BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2 = DC^2$

on conclut par la réciproque du thm de Pythagore que Δ BCD est aussi rectangle en B (donc [CD] est un diamètre du cercle et

Q3

$u_0 = 2$

$u_1 = u_{0+1} = \frac{2}{3} u_0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$

$u_2 = u_{1+1} = \frac{2}{3} u_1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{18}{3} = 6$

$u_3 = u_{2+1}$

$u_4 = u_{3+1}$

2. $u_0 = 2 \leq 0 + 3 = 3$

$u_1 = \frac{7}{3} \leq 1 + 3 = 4$

Supposons que c'est vrai pour n, est-il vrai pour $n+1$.

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3} n + 1$$
$$= \frac{2}{3} n + 2 + \frac{1}{3} n + 1$$
$$= n + 3$$
$$\leq (n+1) + 3$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} u_n - u_n + \frac{1}{3} n + 1$$
$$= \left(\frac{2}{3} - 1\right) u_n + \frac{1}{3} n + 1$$
$$= \frac{1}{3} n + \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} u_n$$
$$= \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n$

$\geq \frac{1}{3}(n+3-(n+3))$

≥ 0

$u_{n+1} \geq u_n$ ↗

$v_n = u_n \cdot n$

$v_0 = 0$

$v_1 = u_1 = \frac{7}{3} = v_0 + 1 \cdot \frac{7}{3}$

$v_2 = 2 \cdot u_2 = 12 =$

$v_2 - v_1 = \frac{36}{3} - \frac{7}{3} =$

~~$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n^2 + 3n - u_n)$~~

~~$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n^2 + n$~~

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}(u_n - n)$ ~~$\frac{2}{3}u_n$~~ $= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

$= \frac{2}{3}(u_n - 1)$

$= \frac{2}{3}v_n$

v_n est une suite géométrique de raison

$q = \frac{2}{3}$

$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0$ avec $v_0 = 2 - 0 = 2$

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= u_n - n$

$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

$u_n \longrightarrow +\infty$

5.

$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2\left(\frac{2}{3}\right)^k + k$

$= \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} k$ $= \sum_{a}^{n} k$

$= 2 \underbrace{\frac{v_0 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}}{\to 6}} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\to +\infty}$

$T_n = \underbrace{\frac{1}{n^2}\left(S_n\right)}_{\to 0 + \frac{1}{2}}$

Q4

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{\cos x} \iff \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} > 0$$

Période : 2π

Domaine :

- $\sin \cos \neq 0 \iff x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \cos \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$\text{Dom} = \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

Étudions donc l'inéquation sur $I =]0; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi[\cup]\pi; \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$

On a $\forall x \in I \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} > 0$

$$\iff Q(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x} > 0$$

valeur critiques : - $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ par le dénominateur

- $\cos x - \sin x = 0$

$\iff \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\iff x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ (impossible)

Valeurs critiques dans $I = 0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$

Tableau des signes

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x - \sin x$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	1
$\sin x \cos x$	0	$+$	$\frac{1}{4}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-\frac{1}{4}$	$+$	0	$-$	0
$Q(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$

Solution dans I de l'inéquation

$$S_I =]0 ; \tfrac{\pi}{4}[\cup]\tfrac{\pi}{2} ; \pi[\cup]\tfrac{5\pi}{4} ; \tfrac{3\pi}{2}[$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big( ]k 2\pi ; \tfrac{\pi}{4} + k2\pi[\cup]\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi[\cup]\tfrac{5\pi}{4} + k\pi ; \tfrac{3\pi}{2} + k\pi[$$

CONCOURS DE RECRUTEMENT EN MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE

jeudi, le 22 janvier 2015
15H00 – 18H00

I. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère la famille de plans $(\mathscr{P}_m)$ définie par l'équation générale $\mathscr{P}_m \equiv mx + y + (1-m)z + m + 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

1) Chercher une équation de la droite commune à tous les plans de la famille $(\mathscr{P}_m)$.

2) Soit un réel m_1. Sous quelle condition existe-t-il un réel m_2 tel que $\mathscr{P}_{m_1}$ soit orthogonal au plan $\mathscr{P}_{m_2}$? Exprimer alors m_2 en fonction de m_1.

(4 points)

II. On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Caractériser et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M(x,y) tels que

$$25x|x| + 4y|y| = 36$$

2) Déterminer une équation de chacune des tangentes à $\mathscr{E}$ passant par le point A(0;4).

(7 points)

III. Dans le plan, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] et l'ensemble $\mathscr{E} = \mathscr{C} \setminus \{A,B\}$.
Soit M un point de $\mathscr{E}$ et P le symétrique du point A par rapport au point M.
Soit G le centre de gravité du triangle ABP.

1) Caractériser le lieu $\mathscr{L}$ décrit par le point G lorsque M parcourt $\mathscr{E}$.

2) Etablir une équation du lieu $\mathscr{L}$ pour A(4;0) et B(1;6).

(5 points)

IV. Soit ABC un triangle et BAE et ACD deux triangles équilatéraux situés à l'extérieur du triangle ABC. On note AB = c, AC = b et BC = a. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

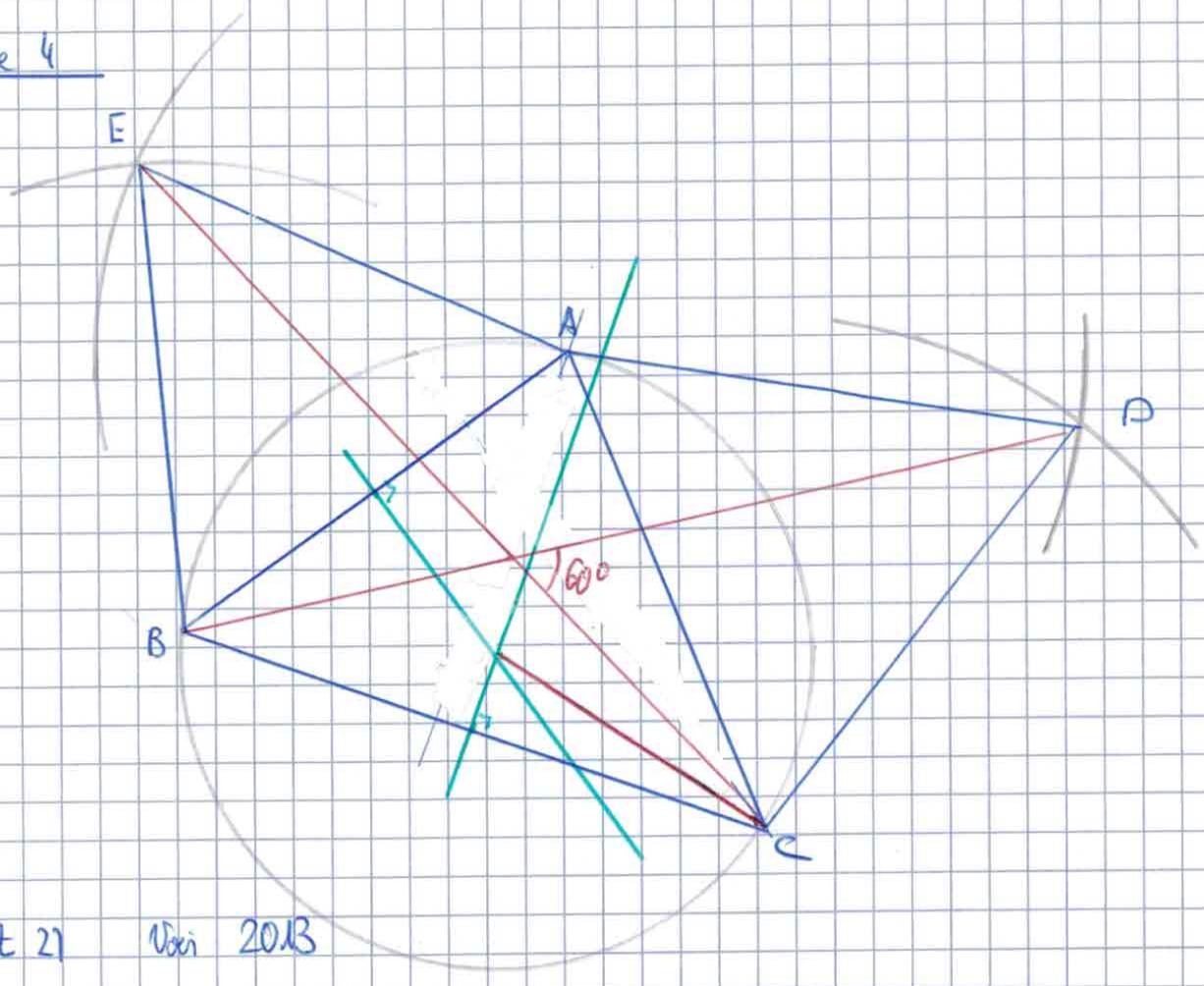
1) Démontrer que CE = BD.

2) Montrer qu'une mesure de l'angle des droites (EC) et (BD) est 60°.

3) Vérifier que $EC^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}abc}{2R}$

(4 points)

Exercice 4



1) et 2) Voir 2013

3) $EC^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(60° + \beta)$

Al-Kashi

$\cos 60° \cos\beta - \sin 60° \sin\beta$

$= a^2 + c^2 - 2ac \left(\frac{1}{2} \cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\beta \right)$

$= a^2 + c^2 - ac \cos\beta + \sqrt{3} ac \sin\beta$ $\quad \frac{b}{2R}$ Loi des sin

Al-Kashi $= \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}$

$= \frac{2a^2 + 2c^2 + b^2 - a^2 - c^2}{2} + \frac{\sqrt{3} abc}{2}$

$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{\sqrt{3} abc}{2R}$

EPREUVE D'ALGÈBRE ET DE PROBABILITÉS

EXERCICE 1 (3 points)

Quand on téléphone entre 18 heures et 19 heures chez Paul, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique, lorsqu'il est là, deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre à des importuns. Quand il est absent, il l'utilise toujours.

1) Calculer la probabilité pour que Paul soit là entre 18 heures et 19 heures.
2) On tombe sur le répondeur. Quelle est alors la probabilité pour que Paul soit présent ?

EXERCICE 2 (3 points)

Lors du festival automobile, un client emprunte 30'000 € à la banque au taux mensuel $i = 0{,}5\ \%$. Chaque mois, la banque augmente donc le solde restant dû de 0,5 %. Ce prêt est remboursé en 4 ans. Calculer la mensualité à payer, ainsi que la somme totale remboursée après 4 ans.

EXERCICE 3 (3 points)

Montrer que $\boxed{\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81° = 4}$

EXERCICE 4 (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\boxed{5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x \geq 0}$ $\left[-\frac{\pi}{2} ; \arctan\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$

EXERCICE 5 (3 points)

Déterminer les coefficients du polynôme P(x) $\left(x \in \mathbb{R}\right)$ sachant que

(a) il est du quatrième degré,
(b) la somme des racines est égale à 6,
(c) le produit des racines est égal à -24,
(d) $P\left(x\right)$ est divisible par $x^2 - 2x - 8$ et
(e) le reste de la division de $P\left(x\right)$ par $x - 2$ est 8.

Trouver ensuite les racines de P(x).

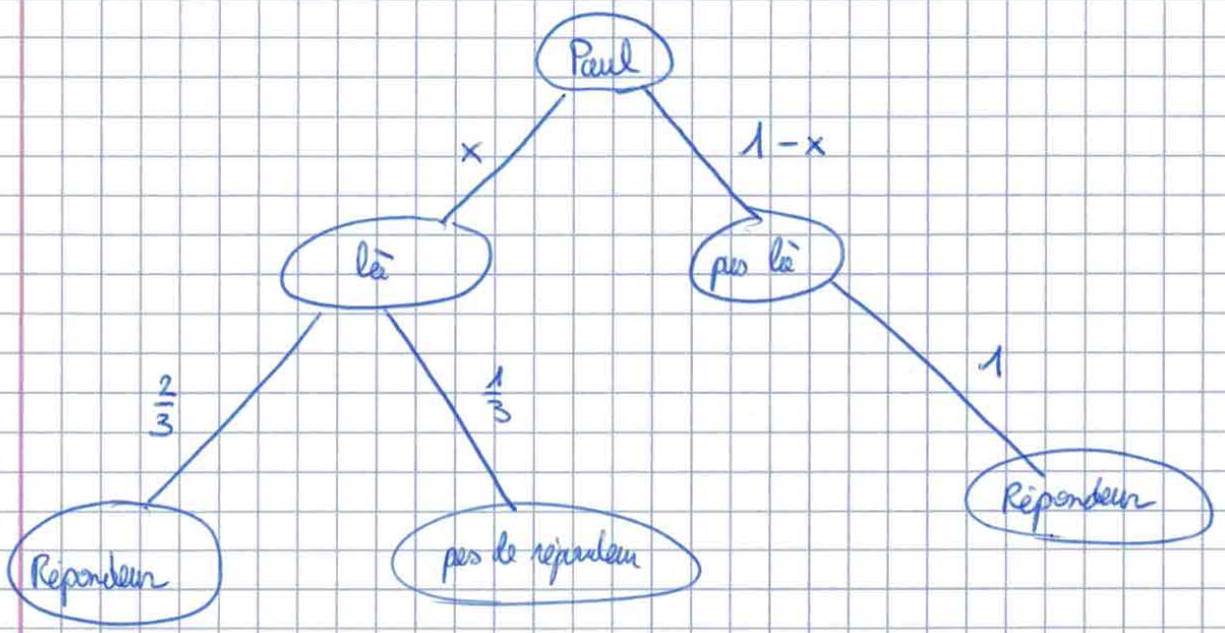
EXERCICE 6 (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boxed{\dfrac{z^2 + i}{z^2 - i} = 3\dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1}}$.

Les solutions seront données sous forme trigonométrique.

Exercice 1

Soit x la probabilité que Paul soit là



1) $\mathbb{P}(\text{répondeur}) = \frac{9}{10}$

On $\mathbb{P}(\text{répondeur}) = \frac{2}{3} \cdot x + 1 - x = \frac{9}{10}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{10} = 0{,}3$

2) $\mathbb{P}(\text{là} \mid \text{Répondeur}) = \dfrac{\mathbb{P}(\text{Répondeur} \mid \text{là})\,\mathbb{P}(\text{là})}{\mathbb{P}(\text{répondeur})}$

$= \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}$

$= \frac{2}{9}$

Exercice 2

Emprunte : 30.000 €

Taux mensuel : $i = 0{,}5\% = 0{,}005$

durée : 4 ans = 48 mois

Soit S_n la somme qui reste à payer après le n^e remboursement alors la somme qui reste à payer après le $(n+1)^e$ remboursement

$$\begin{cases} S_{n+1} = (1+0{,}005) S_n - M & \text{où } M \text{ est la mensualité} \\ S_0 = 30.000 \end{cases}$$

Pour évaluer une telle suite, on passe par une suite auxiliaire V_n

$S_n = V_n + a$ et on choisit astucieusement a pour que

$$V_n = S_n - a \quad \text{soit géométrique}$$

ici $V_{n+1} = S_{n+1} - a = \frac{201}{200} S_n - M - a$

$$= \frac{201}{200} S_n - \frac{201}{200} a + \frac{201}{200} a - M - a$$

$$= \frac{201}{200} V_n + \frac{1}{200} a - M$$

$(V_n)_n$ est géométrique si et seulement si $\frac{1}{200} a - M = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a = 200 M$$

Donc soit $a = 200M$,

dans ce cas $V_n = V_0 \left(\frac{201}{200}\right)^n$ avec $V_0 = S_0 - 200M$

Ainsi $S_n = (S_0 - 200M) \cdot \left(\frac{201}{200}\right)^n + 200M$

1) Le prêt est au 48 mois, d'où $S_{48} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (30\,000 - 200M) \left(\frac{201}{200}\right)^{48} + 200M = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 30\,000 \cdot \left(\frac{201}{200}\right)^{48} + 200M \left(1 - \left(\frac{201}{200}\right)^{48}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{30\,000 \left(\frac{201}{200}\right)^{48}}{-200 \left(1 - \left(\frac{201}{200}\right)^{48}\right)} \simeq 704{,}55 \text{ €}$$

21 Emprunte : 30.000 €

En fait on rembourse 48 · 704,55 = 33 818,44 €

Ainsi la somme totale remboursée après 4 ans est 33 818,44 €, ceci le coût total du crédit est

33818,44 − 30000 = 3818,44 €.

Exercice 3

$$\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$$

$$= \tan 9° + \tan 81° - (\tan 27° + \tan 63°)$$

$$= \frac{\sin 90°}{\cos 9° \cos 81°} - \frac{\sin 90°}{\cos 27° \cos 63°}$$

$$= \frac{1}{\cos 9° \cos 81°} - \frac{1}{\cos 27° \cos 63°}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 90° + \cos 72°)} - \frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 90° + \cos 36°)}$$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$$= \frac{2}{\cos 72°} - \frac{2}{\cos 36°}$$

$$= 2\,\frac{(\cos 36° - \cos 72°)}{\cos 72° \cos 36°}$$

Il reste à prouver que $\dfrac{\cos 36° - \cos 72°}{\cos 72° \cos 36°} = 2$

or $2 \cos 72° \cos 36° = \cos(108°) + \cos(36°)$

$= \cos(180° - 72°) + \cos 36°$

$= -\cos 72° + \cos 36°$

$= \cos 36° - \cos 72°$

En d'autres mots $\dfrac{\cos 36° - \cos 72°}{\cos 72° \cos 36°} = 2$

□