EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

PROBLEME

Le problème a pour but l'étude de la famille des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_m(x) = x + m\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad m \in \mathbb{R}^*$$

et des courbes C_m d'équation $y = f_m(x)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra 2 cm pour unité graphique)

Soit

$$\varphi : \mathbb{R}_+ - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2 - 1}$$

1) Faire l'étude de la fonction φ. (Branches infinies, dérivée, table de variations)

2) Représenter graphiquement la fonction φ.
Discuter graphiquement suivant les valeurs de m $(m \in \mathbb{R}^*)$ le signe de $\varphi(x) - m$.
(la discussion mettra en évidence, entre autres, le nombre $\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$ que l'on désignera par m_o)

3) Etudier les variations des fonctions f_m. L'étude du signe de la dérivée utilisera la fonction φ. Donner les tableaux de variations

4) Montrer que les courbes C_m admettent une même asymptote Δ et étudier la position de C_m par rapport à Δ.

5) Représenter sur un même graphique C_1, C_{m_o}, C_4, C_{-1} et C_{-3}.

6) Démontrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ : \ (1 - x^2)f_m(x) = x\,f'_m(x) - x^3 \qquad (R)$$

7) Soit L l'ensemble des points des courbes C_m quand m décrit $\mathbb{R}^*$ où la tangente à la courbe est parallèle à $(O, \vec{\imath})$.
Montrer, en utilisant la relation (R), que L est une partie d'une courbe Γ dont on donnera une équation cartésienne. Etudier brièvement la fonction dont L est la courbe représentative (asympto dérivée, tableau de variations) et construire L sur le graphique précédent.

8) Que deviennent les courbes C_m si f_m est définie sur $\mathbb{R}$? (au lieu d'être définie sur $\mathbb{R}_+$)

Concours de recrutement 1997

Mathématiques

EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

Problème

Soit m un paramètre pouvant prendre toute valeur réelle. Pour chaque valeur de m on considère la fonction f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_m(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m|+m}$$

A 1) Déterminer suivant les valeurs de m

- l'ensemble D_m des points où f_m est définie
- l'ensemble C_m des points où f_m est continue
- l'ensemble F_m des points où f_m est dérivable

2) Soit Γ_m la courbe représentative de f_m dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé.

a) Quelles sont les asymptotes de Γ_m ?
b) La courbe admet-elle un centre de symétrie ?
c) Etudier les variations de f_m.
d) Représenter graphiquement Γ_{-1}, Γ_0, et Γ_1.

3) a) Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes Γ_m correspondant aux m strictement positifs.

b) Montrer que, pour chaque m strictement positif, il existe une application affine transformant Γ_1 en Γ_m et Γ_{-1} en Γ_{-m}.

B Dans cette partie m est strictement positif.

1) a) Calculer l'intégrale $\int_0^a [2-f_m(x)]dx$, où a est un réel vérifiant $0<m\leq a$.

b) En déduire que, a étant fixé, cette intégrale tend vers une limite lorsque m tend vers 0 par valeurs positives.

2) Soit un entier $p\geq 2$:

a) Montrer que, pour chaque $m>0$: $\int_0^m [2-f_m(x)]^p dx \leq 3^p m$

(sans chercher à calculer l'intégrale)

b) Calculer $\int_m^a [2-f_m(x)]^p dx$ lorsque $0<m\leq a$

c) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{m\to 0^+} \int_0^a [2-f_m(x)]^p dx$

/

Concours de recrutement en mathématiques 12 novembre 1998

Epreuve d'analyse

Exercice 1

Soit la fonction f_a, définie $\forall x \in IR_+^*$ de la façon suivante:

$$f_a(x) = \left(1+x^a\right)^{\frac{1}{a}} \qquad \text{avec} \quad a \in IR^*.$$

C_a est la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1) Etude des limites de f_a aux bornes du domaine, des asymptotes et des branches infinies de C_a.
2) Montrer que f_a peut être prolongée par continuité en x = 0 par une fonction g_a. Dérivabilité de g_a au point x = 0.
3) Variations de f_a.
4) Représenter sur le même graphique les courbes C_{-2} , C_2 , C_1 et $C_{\frac{1}{2}}$.

(10 pts)

Exercice 2

1) Calculer et discuter suivant les valeurs des paramètres p et q :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin px}{x-\sin qx} \qquad \text{sachant que } (p,q) \in IN^2$$

2) Calculer l'intégrale suivante:

$$A = \int_{1}^{64} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

3) Soit la fonction f définie de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x} & si \quad x \leq 1 \\ ax + b & si \quad x > 1 \end{cases} \quad et\ (a;b) \in IR^{2}$$

Déterminer a et b pour que f soit dérivable au point x = 1.

(4 + 3 + 3 pts)

Concours de recrutement 1999

Mathématiques

EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

I. Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité = 2 cm)

Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = x - e^{nx}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et soit C_n sa courbe représentative dans le plan P.

1) Etudier f_n : branches infinies, variations; construire C_1 .

2) Etudier la position de C_{n+1} par rapport à C_n ; montrer qu'il existe un seul point commun à toutes les courbes C_n ; tracer C_2 sur le même graphique que C_1 .

3) α étant un nombre réel donné non nul, calculer, en cm^2, l'aire (géométrique) $\mathcal{A}(\alpha)$ de la portion du plan comprise entre les courbes C_n et C_{n+1} et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$;
déterminer ensuite en fonction de n : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}(\alpha)$

4) A chaque point M d'abscisse x de C_n on associe le point N, de même abscisse, situé sur la droite D d'équation $y = x$.

On pose $\overline{MN} = g_n(x)$. Exprimer $g_n(x)$ en fonction de x et calculer
$S_n(k) = g_n(0) + g_n(-1) + g_n(-2) + \cdots + g_n(-k)$ $(k \in \mathbb{N})$

Déterminer, en fonction de n, $\lim\limits_{k \to +\infty} S_n(k)$

11 points sur 20

II. 1) Définir la fonction Arc sin et montrer que la dérivée de cette fonction est :

$$(\text{Arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{avec } |x| < 1$$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \text{Arc sin } \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

* déterminer le domaine de f et celui de f'
* calculer f'(x)

3) Evaluer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$

4) Simplifier l'expression de la fonction g définie par $g(x) = \text{Arc sin } (\cos x)$ si $x \in [0, 2\pi]$

Indication : on pourrait calculer g'(x) = ...

9 points sur 20

Concours de recrutement en mathématiques
10 novembre 2000 ($14^{30} - 17^{30}$)
EPREUVE ECRITE I (ANALYSE)

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x\cdot|x|}$ si $x \in [-1;0[\cup]0;1]$ et $f(0) = 0$.
1) Etudier la parité de f , la continuité de f et la dérivabilité de f.
2) Déterminer le sens de variation de f .
3) Démontrer que f définit une bijection de $[-1;1]$sur $[-1;1]$.
Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in]0;1[$.
4) Montrer que pour tout $y \in [-1;1]$, $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.
En déduire l'expression de $f^{-1}(y)$pour $y \in]-1;0[$.
5) Déterminer l'intégrale $\int_{-1}^{+1} f(x)dx$ après avoir justifié son existence.

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x - x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$sur $]0;+\infty[$ et h la fonction définie par $h(x) = \ln x - 1$ sur $]0;+\infty[$.
1) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[, 0 \leq x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq 1$.
(On peut utiliser l' inégalité: $\forall x \in]0;+\infty[, \ln(x) \leq x - 1$).
En déduire l'encadrement: $\forall x \in]0;+\infty[, h(x) \leq f(x) \leq \ln x$.
2) Calculer la dérivée et la dérivée seconde de f et les limites de la dérivée en 0 et en $+\infty$.En déduire le sens de variation de f.
3) Soit I et J deux intervalles inclus dans $I\!R$, u et v deux fonctions continues,strictement croissantes sur I et telles que $J = u(I) = v(I)$ et pour tout $x \in I, u(x) \leq v(x)$.
Démontrer que: $\forall y \in J, v^{-1}(y) \leq u^{-1}(y)$.
(On pourra p.ex. comparer $u^{-1}(u(x))$; $v^{-1}(v(x))$ et $v^{-1}(u(x))$ pour $x \in I$.)
4) Utiliser les résultats établis sous 1) et 3), pour montrer que: $\forall y \in I\!R, e^y \leq f^{-1}(y) \leq e^{y+1}$.
En déduire un encadrement de $f^{-1}(\ln 10)$.
5) Démontrer que pour tout $a \in]0;+\infty[, a^{a+1} > 10\cdot(a+1)^a \Leftrightarrow a > f^{-1}(\ln 10)$.
6) Soit pour tout réel $a > e, g_a$ la fonction définie sur $[a;+\infty[$ par $g_a(x) = a^x \cdot x^{-a}$.Démontrer que g_a est strictement croissante sur $[a;+\infty[$.
7) Démontrer que pour tous les entiers naturels a et x, si $a \geq 28$ et $x \geq 28$ et les écritures décimales de a^x et x^a ont le même nombre de chiffres alors $x = a$.

Répartition des points: 9 ; 11

Concours de recrutement en mathématiques

Epreuve d'analyse

7 novembre 2001

(14h30-17h30)

I. *Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie par:*

$$f(x)=\frac{1}{8}\ln x - x\ln x + x$$

1. Etudier f (ensemble de définition, limites, branches infinies de la courbe représentative (C_f),, fonction dérivée (*),sens de variation, tableau de variation).

(*)On montrera que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique notée x_o . Justifier $1<x_o<1,2$. Pour étudier le signe de f', on pourra utiliser f".

2. Prouver que:

$$0\leq f(x_o)-f(1)\leq (x_o-1)\cdot f'(1)\leq 0,2\cdot f'(1).$$

En déduire un encadrement de $f(x_o)$.

II. 1. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$

Déduire de l'étude des variations de φ le signe de φ.

2. Soit g la fonction définie par:$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en $x_o=0$.

b) Donner le sens de variation de g et préciser les branches infinies de (C_g).

c) Représenter graphiquement la fonction g.

III. Pour tout entier naturel n, on note h_n l'application de [0;1] dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$h_n(x)=\begin{cases} x^n\cdot\sqrt{1-x} & \text{si } n\in\mathbb{N}^* \\ \sqrt{1-x} & \text{si } n=0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de h_n.

2. Donner, suivant les valeurs de n, le tableau de variation de h_n.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes (C_o), (C_1) et (C_2) représentatives de h_o , h_1 et h_2 .

Concours de recrutement en mathématiques
10 avril 2002 (15.00 –18.00)
ÉPREUVE ÉCRITE I (ANALYSE)

I.

Partie A (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.
a) Étudier g (limites, variations, tableau de variation).
b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution λ et vérifier que $1{,}8<\lambda<1{,}9$.
c) Déterminer le signe de g(x).

2) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.
a) Étudier h (limites, asymptotes, variations, tableau de variation).
b) Montrer que $h(\lambda) = \dfrac{1}{2\lambda^2}$. En déduire un encadrement de $h(\lambda)$.
c) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthogonal en adoptant 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 4 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B (6 points)

Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on pose: $H(x) = \int_1^x h(t)dt$, avec $h(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2}$.
On ne cherchera en aucune manière de calculer $H(x)$.

1) Préciser $H'(x)$ après avoir justifié l'existence de $H(x)$.
Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = H\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$. En déduire que pour tout $x > 0$, $H(x) = H\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) Démontrer que: $\forall t \geq 1, \quad \dfrac{\ln t}{(1+t)^2} \leq h(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^2}$.

Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on pose: $U(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{t^2}dt$ et $V(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}dt$.
Calculer $U(x)$ et $V(x)$ après en avoir justifié l'existence.
En déduire un encadrement de $H(2)$.

3) Calculer une valeur approchée de $H\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en calculant $\int_1^{\frac{1}{2}} p(t)dt$, p étant la fonction affine définie par $p(1) = h(1)$ et $p\left(\dfrac{1}{2}\right) = h\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

<u>Épreuve d'analyse du 10 avril 2002</u>

<u>Exercice ~~II~~ A</u>

1. $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a) $D_g = \mathbb{R}_0^+$

<u>Limites:</u>

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2\ln x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 + \underbrace{x^2}_{\to 0} - \underbrace{2x \cdot x \ln x}_{\to 0} = 1$$

<u>Dérivée:</u>

$$g'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= -4x \ln x$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

<u>tableau de variation</u>

x		0		1	
$-4x$	+	0			−
$\ln x$	−		−	0	+
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	↘	1	↗	2	↘ $-\infty$

b) $g(x)$ est strictement positif sur $[0;1]$. Donc $g(x) = 0$ est exclu.

$g(x)$ est strictement décroissant sur $[1; +\infty[$ et $g(1) > 0$ alors que $\lim_{x \to +\infty} g(x) < 0$. D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists \lambda \in [1; +\infty[$ tq $g(\lambda) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 2 > 0 \\ g(2) = -0{,}54\ldots < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 < \lambda < 2$$

$g(1{,}5) = 0{,}817\ldots > 0 \quad \Rightarrow \quad 1{,}5 < \lambda < 2$

$\vdots$

c) signe de $g(x)$:

x	0		1		λ		$+\infty$
$g(x)$		$+$			0	$-$	

2. $h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

a) $D_h = \mathbb{R}_0^+$

Limites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\to 0} = 0 \quad \text{A.H. d'équation } y=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$$

A.V. d'équation $x=0$.

Dérivée sur $]0;+\infty[$:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2) - \ln x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x\cdot(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x\cdot\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}}$$

$$\left(= \frac{1+x^2(1-2\ln x)}{x\,(1+x^2)^2}\right)$$

Tableau de variations:

x	0		λ		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{\ln\lambda}{1+\lambda^2}$	$\searrow$	0

b) $h(\lambda) = \frac{\ln\lambda}{1+\lambda^2}$

$1+\lambda^2 - 2\lambda^2\ln\lambda = 0$

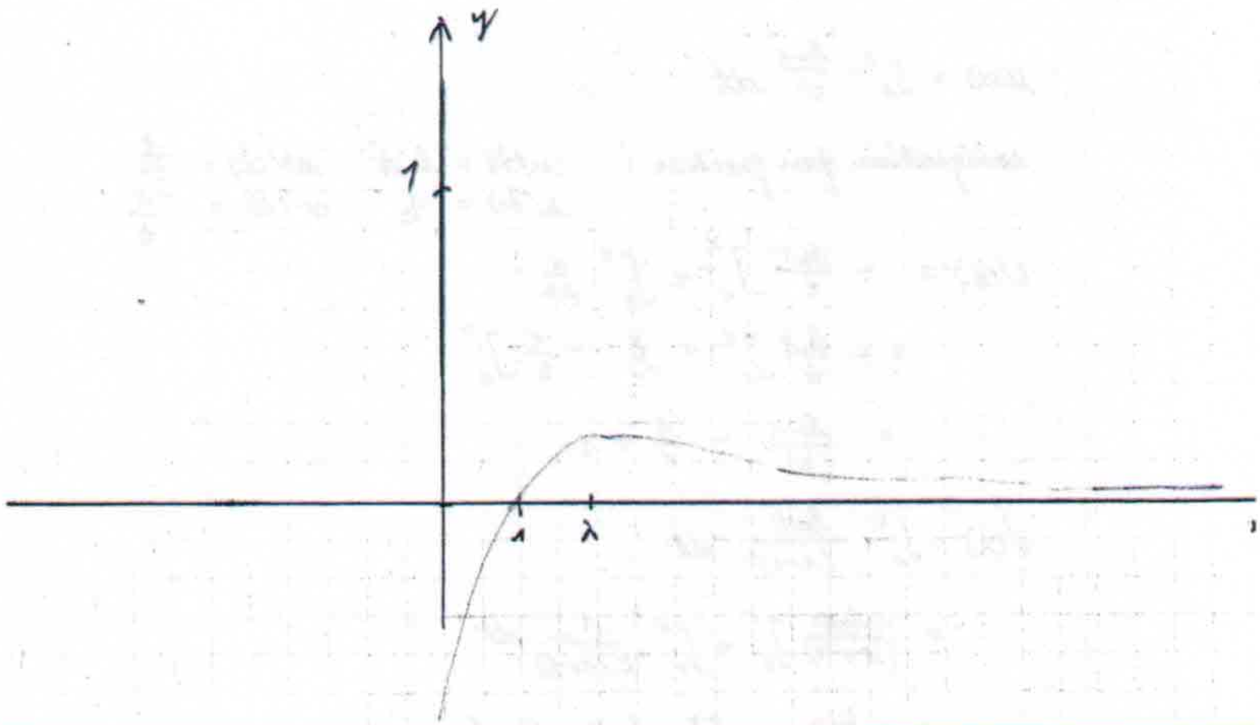
$\Leftrightarrow \quad \lambda^2(1-2\ln\lambda) = -1$

$\Leftrightarrow \quad 1-2\ln\lambda = -\frac{1}{\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \quad -2\ln\lambda = \frac{-1-\lambda^2}{\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\lambda = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda^2}$

$\Leftrightarrow \quad \ln\lambda = 1$ [illegible] $\quad h(\lambda) = \frac{1}{[illegible]2}$



Partie B

$H(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$

1) La fonction $\frac{\ln t}{1+t^2}$ est définie sur $]0;+\infty[$. Donc en particulier pour $]1;x[$ $x \in]0;+\infty[$.

$H'(x) = \frac{\ln t}{1+t^2}$

$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln x}{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-x^2 \ln x}{x^2+1}\,dx$

$F'(x) = \frac{-x^2 \ln x}{x^2+1}$

$H'(x) - F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{x^2 \ln x}{x^2+1}$

$= \frac{\ln x\,(1+x^2)}{(1+x^2)} = \ln x$

$F'(x) = H'(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = h\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{x^2 \ln x}{1+x^2}\;\frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{1+x^2}$

2) $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq h(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$h(x) = \ln t$ on a $(1+t)^2 \geq 1+t^2$

$\frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ $|\cdot \ln t > 0$ car $t \in]1;+\infty[$

$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2}$

on a $1+t^2 \geq t^2$

$\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

$\frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq h(x) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

$U(x) = \int_1^x \frac{\ln x}{t^2}\,dt$

intégration par parties : $u(t) = \ln t \quad v'(t) = \frac{1}{t^2}$
$u'(x) = \frac{1}{t} \quad v(t) = \frac{-1}{t}$

$U(x) = \left.-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}$

$= \left.-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \left.-\frac{1}{t}\right]_1^x$

$= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$

$V(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$

$= \left.\frac{-\ln t}{(1+t)}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\,dt$

$= \frac{-\ln x}{1+x} + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt$

$= \frac{-\ln x}{1+x} + \ln t\Big]_1^x - \ln|1+t|\Big]_1^x$

$= \frac{-\ln x}{1+x} + \ln x - \ln|1+x| + \ln 2$

On a $V(2) \leq H(2) \leq U(2)$

$0{,}0566 \leq \quad \vdots \quad \leq 0{,}1534$

3) $p(x) = \frac{-8\ln 2}{15}x + \frac{8\ln 2}{15}$

$\int_1^{1/2} p(t)\,dt = \left.\frac{-8\ln 2}{15}\,\frac{x^2}{2}\right]_1^{1/2} - \left.\frac{8\ln 2}{15}x\right]_1^{1/2}$

$= \frac{7\ln 2}{15}$

23 64 00 64

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'analyse

Mercredi, le 6 novembre 2002-10-30
15h-18H

I. Soit :

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$f_0 : x \mapsto f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. a) Pour n entier naturel non nul, étudier la parité, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et le sens de variation de f_n.

b) Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Donner la nature des branches infinies des courbes (C_n) représentatives des fonctions f_n (n entier naturel non nul).

c) Etudier l'existence de points fixes aux courbes (C_n) (n entier naturel non nul).

d) Construire les courbes $(C_1),(C_2),(C_3)$ (unité : 2cm)

2. On note $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ (n entier naturel)

   a) Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est une primitive de f_0. En déduire I_0.

   b) Calculer I_1.

   ? c) Démontrer que, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 :

   $$n \cdot I_n = \sqrt{2} - (n-1) \cdot I_{n-2}$$ normal + $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

   En déduire I_2 et I_3.

3. Pour n entier naturel non nul, on note g_n la restriction de f_n à l'intervalle [0 ;1].

   a) Etudier l'existence de l'application réciproque de g_n.

   b) Construire les courbes représentatives des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1}.

   c) Déterminer g_1^{-1} et g_2^{-1}.

(10 points)

II. Soit h la fonction définie par $h(x)=4^x - 2^{x+1}$.

1. Etudier h (ensemble de définition, limites de h aux bornes de l'ensemble de définition, branches infinies de la courbe (C_h) représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé. fonction dérivée et tableau de variation ; tracé de (C_h).

2. Déterminer graphiquement et algébriquement le nombre de solutions de l'équation h(x)-a=0.

(5 points)

III. Soit φ la fonction de variable réelle x définie par :

$$\varphi(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{t+1}\cdot e^{-t}dt \quad x\in[-1;+\infty[$$

(N.B. On ne cherchera pas à calculer $\varphi(x)$.)

On note Γ la courbe représentative de φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Déterminer φ'. Donner le sens de variation de φ.
2. Démontrer que si $t\in[-1;+\infty[$, alors $\sqrt{t+1}\leq\dfrac{t+3}{2\sqrt{2}}$

   En déduire que :

   $(\forall x\in[-1;+\infty[)\quad \varphi(x)\leq k(x)$ avec $k(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^{x}(t+3)e^{-t}dt$

   Déterminer k(x) et en déduire que : $k(x)\leq\dfrac{3e}{2\sqrt{2}}$ $\quad(\forall x\in[-1;+\infty[)$
3. Donner l'allure de la courbe Γ et préciser sa demi-tangente en $x_0=-1$ à droite.

(5 points)

Epreuve Analyse 6/11/02

I $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \qquad f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1) a) Parité : $\quad f_n(-x) = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{x^2+1}}$

si n pair $\quad f_n(-x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ paire

si n impair $\quad f_n(x) = \dfrac{-x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ impaire

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\, x^{n-1}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Sens de variation :

$$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - x^n \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^{n-1}\left(n\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^{n-1}\left(n\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$f_n'(x) \geq 0$ ssi $\quad = \dfrac{x^{n-1}\left(n(x^2+1) - x^2\right)}{x^2+1 \cdot \sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow x^{n-1}\left(nx^2 + n - x^2\right) > 0$

$\Leftrightarrow x^{n-1}\left(\underbrace{x^2(n-1) + n}_{>0}\right) > 0$

$\rightarrow f_n'(x)$ a le signe de x^{n-1}

$x < 0 \rightarrow f_n'(x) > 0$ si n impair

$f_n'(x) < 0$ si n pair

$x > 0 \quad f_n'(x) > 0$

n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_n'		$-$		$+$	
f_n		↘		↗	

n impair

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		$+$	
f_n		↗	

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{n-2}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= +\infty$

$\Rightarrow$ branche parabolique Oy

si $n=1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ A.H $x=0$

si $n=2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} - x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n - x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\left(\cancel{= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(x^{n-2} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}} \right.$

$\left. \cancel{= +\infty} \right)$

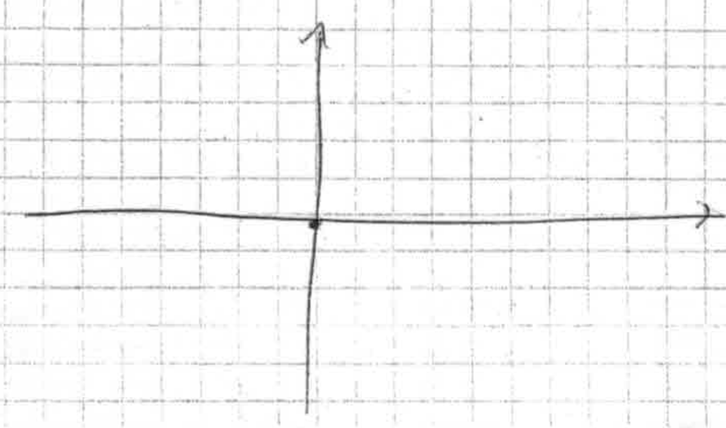
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$

$f_n(x) = f_{n'}(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^{n'}}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Leftrightarrow x^n = x^{n'} \Rightarrow n = n'$ ou $x=0$

$\Leftrightarrow x^n - x^{n'} = 0$



2) $I_n = \int_0^1 f_n(x)$

a) $\int_{1}^{x} f_0(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\quad}$

$$F(x)' = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1} \cdot 2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{(x+\sqrt{x^2+1}) \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{x\sqrt{x^2+1} + x^2+1}$$

$$=$$

$$= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$I_0 = \int_0^1 f_0(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}).$$

b) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \cancel{\frac{1}{2}\left[\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2}$

$$= \frac{2}{2}\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

$2\sqrt{x}$ $\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad = \sqrt{2}-1$

c) $n I_n = \sqrt{2} - (n-1) I_{n-2}$

$1 \cdot I_1 = \sqrt{2}$

Épreuve d'analyse du 6 novembre 2002

Exercice I.

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \qquad f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) a) Domaine de définition: $D_{f_n} = \mathbb{R}$ et $D_{f_0} = \mathbb{R}$

Parité: ~~n pair fo~~:

• pour f_0: $f_0(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f_0(x)$

→ f_0 est une fonction paire

• pour f_n (n pair):

$$f_n(-x) = \frac{(-x)^n}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = f_n(x)$$

→ f_n est une fonction paire pour n pair

• pour f_n (n impair):

$$f_n(-x) = \frac{(-x)^n}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{-x^n}{\sqrt{x^2+1}} = -f_n(x)$$

→ f_n est une fonction impaire pour n impair.

Limites:

• pour f_0:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to+\infty}} = 0 \qquad \text{A.V. d'équation } y=0$$

• pour $n=1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \qquad \text{A.V. d'équation } y=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1 \qquad \text{A.V. d'équation } y=-1$$

• pour n pair ($n \neq 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\cancel{x}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^{n-1}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{\to 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

: pour n impair

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm\infty$$

• Sens de ~~fn~~ variation

$$f_n'(x) = \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+1} - x^n \frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^{n-1}\cdot n\cdot(x^2+1) - x^{n+1}}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{n\cdot x^{n+1} + n x^{n-1} - x^{n+1}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n\cdot x^2 + n - x^2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^{n-1}\left[(n-1)x^2+n\right]}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f_n'(x)=0 \iff x^{n-1}=0$ ou $(n-1)x^2+n=0$

$\iff x=0$ $\qquad \iff x^2 = \frac{-n}{(n-1)}$ impossible

Tableau de variation

Pour n pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Pour n impair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{\underbrace{1+\frac{1}{x^2}}_{\to 1}}} = +\infty$ branche parabolique de direction Oy

Pour $n=1$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

Pour $n=2$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ asymptote d'équation $y=x$.

$$\lim \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x = \lim \frac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^4-x^2}{[illegible]} = 0$$

c) Points fixes au courbes C_n:

$f_n(x) = f_m(x)$

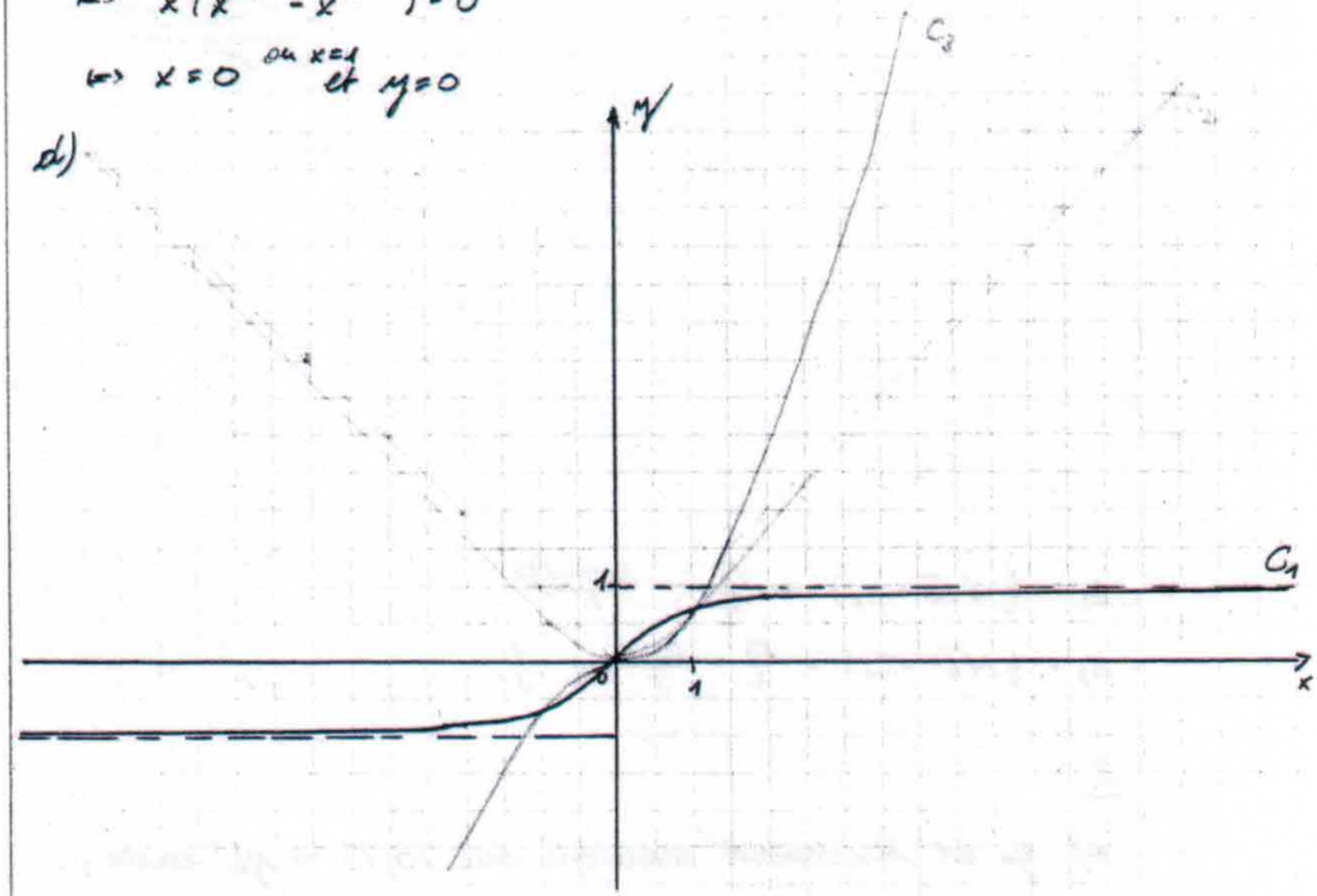
$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^m - x^n}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \qquad\qquad \dfrac{x^n\,(x^{m-n}-1)}{\dots} = 0$

$x=0$ ou $x=1$

$\Leftrightarrow \quad x\,(x^{m-1} - x^{n-1}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x=1$ et $y = 0$

d)



2.

a) $F(x)$ est une primitive de $f_0(x) \Leftrightarrow F'(x) = f_0(x)$

$$F'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x+\sqrt{x^2+1})\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f_0(x)$$

Donc $F(x)$ est bien une primitive de $f_0(x)$.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big]_0^1$$

$$= \ln(1+\sqrt{1^2+1}) - \ln(0+\sqrt{0^2+1})$$

$$= \ln(1+\sqrt{2})$$

b) $$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}\Big]_0^1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

c) $n I_n = \sqrt{2} - (n-1) I_{n-2}$

$$n \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} + (n-1) \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2}$$

$$\int \frac{n x^n + (n-1) x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$\sqrt{x^{2n}}$

$I_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - I_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2}$

$I_3 = \frac{1}{3} (\sqrt{2} - I_1) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}-1}{3} = \frac{1}{3}$

3.

a) g_n est strictement monotone sur $[0;1] \Rightarrow g_n^{-1}$ existe...

b) $\rightarrow$ sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice

c) $g_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow y \cdot \sqrt{x^2+1} = x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 (x^2+1) = x^4$$

$$\Leftrightarrow y^2 x^2 + y^2 = x^4$$

$$\Leftrightarrow y^2 x^2 - x^4 = -y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 (y^2-1) = -y^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-y^2}{y^2-1}}$$

$g_{-1}(x) = \sqrt{\frac{-x^2}{x^2-1}}$ pour $x \in [0;1]$

$g_{-2}(x) = \sqrt{}$ ... eq du 2e degré...

Exercice II

$h(x) = 4^x - 2^{x+1}$

1.

• Domaine de définition: $D_h = \mathbb{R}$

• Limites:

$\lim_{x \to +\infty} 4^x - 2^{x+1} = \lim_{x \to +\infty} 2^{2x} - 2^{x+1}$

$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{2^x}_{\to +\infty} \underbrace{(2^x - 2)}_{\to +\infty} = +\infty$ branche infinie

$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{2^x}_{\to 0} \underbrace{(2^x - 2)}_{\to -2} = 0$ A.H. d'équation $y = 0$

• Dérivée: sur $\mathbb{R}$:

$h'(x) = e^{x \ln 4} \cdot \ln 4 - e^{(x+1)\ln 2} \cdot \ln 2$

$= e^{2x \ln 2} \cdot 2 \ln 2 - e^{(x+1)\ln 2} \ln 2$

$= \ln 2 \, (2 \cdot 4^x - 2^{x+1})$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 e^{2x \ln 2} = e^{(x+1)\ln 2}$ | exp( ) fct str. monotone

$\Leftrightarrow \ln 2 + 2x \ln 2 = (x+1) \ln 2$

$\Leftrightarrow \cancel{\ln 2} + 2x \cancel{\ln 2} = x \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2}$

$\Leftrightarrow x = 0$

(plus facile :

$2 \cdot 4^x - 2^x \cdot 2 = 0$

$2^{2x} - 2^x = 0$

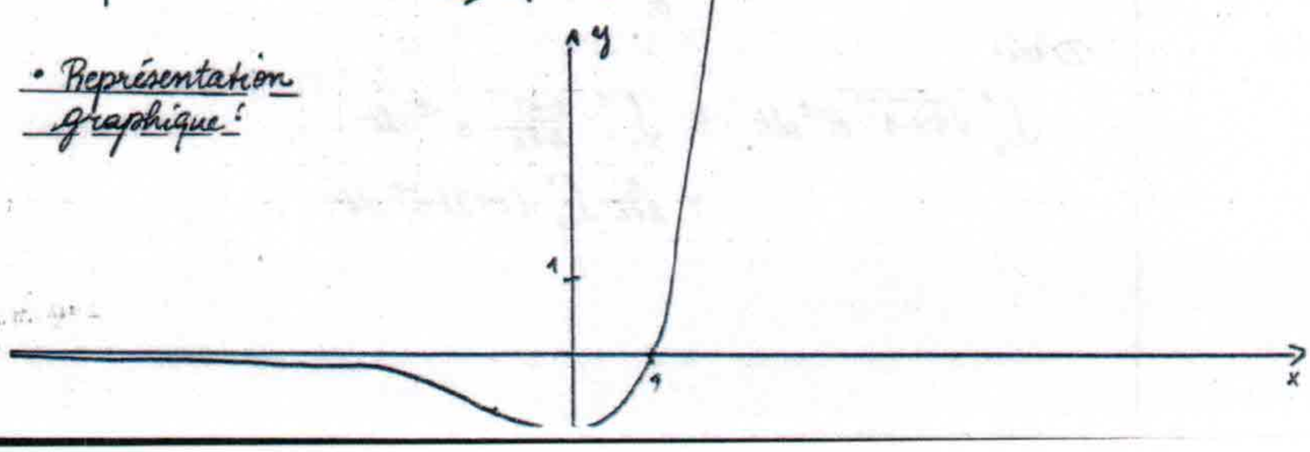
$\Leftrightarrow 2x - x = 0$

⋮

• Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• Représentation graphique:



2.
$h(x)-a=0 \Leftrightarrow h(x)=a$

· <u>graphiquement</u>

Pour $a=-1$ il existe une seule solution $x=-1$

Pour $a \in]0;-1[$ il existe deux solutions pour x

Pour $a \in [0;+\infty[$ il existe une seule solution pour x

car h est strictement croissante de $[1;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$.

Pour $a<-1$ aucune solution

· <u>algébriquement</u>

$h(x)=a \Leftrightarrow \quad 2^{2x}-2^{x-1}=a$

$(2^x)^2-2(2^x)-a=0$

$\Delta = 4+4a$

· $\Delta<0 \Leftrightarrow 4(1+a)<0 \Leftrightarrow a<-1$ → aucune solution

· $\Delta=0 \Leftrightarrow 4(1+a)=0 \Leftrightarrow a=-1$ → solution unique

· $\Delta>0 \Leftrightarrow 4(1+a)>0 \Leftrightarrow a>-1$ → 2 solutions

---

Exercice III.

1. $\varphi'(t)=\sqrt{t+1}\,e^{-t}>0$

Donc $\varphi(t)$ est croissante

2. $t\in[-1;+\infty[\Rightarrow \sqrt{t+1}\leq \frac{t+3}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \quad t+1 \leq \frac{t^2+6t+9}{8}$

$\Leftrightarrow \quad 8t+8 \leq t^2+6t+9$

$\Leftrightarrow \quad 0\leq t^2-2t+1$

$\Leftrightarrow \quad 0\leq (t-1)^2$ toujours vrai!

D'où

$$\int_{-1}^{x}\sqrt{t+1}\,e^{-t}dt \leq \int_{-1}^{x}\frac{t+3}{2\sqrt{2}}\,e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{x}(t+3)e^{-t}dt.$$

$$k(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-1}^{x} (t+3)\, e^{-t}\, dt}_{J(x)}$$

$$J(x) = \int_{-1}^{x} t \cdot e^{-t} + \int_{-1}^{x} 3 e^{-t}\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{x} t \cdot e^{-t}}_{I(x)} + 3 \cdot \left(-e^{-t}\right]_{-1}^{x}$$

intégration par parties pour $I(x)$:

$u(x) = t \qquad v'(x) = e^{-t}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-t}$

$$I(x) = -t \cdot e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt$$

$$J(x) = -t \cdot e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + \int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt + 3 \int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt$$

$$= -t e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + 4 \int_{-1}^{x} e^{-t}\, dt$$

$$= -t e^{-t}\Big]_{-1}^{x} + 4 \cdot -e^{-t}\Big]_{1}^{x}$$

D'où :

$$k(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-x \cdot e^{-x} - e + 4\left(-e^{-x} + e\right) \right)$$

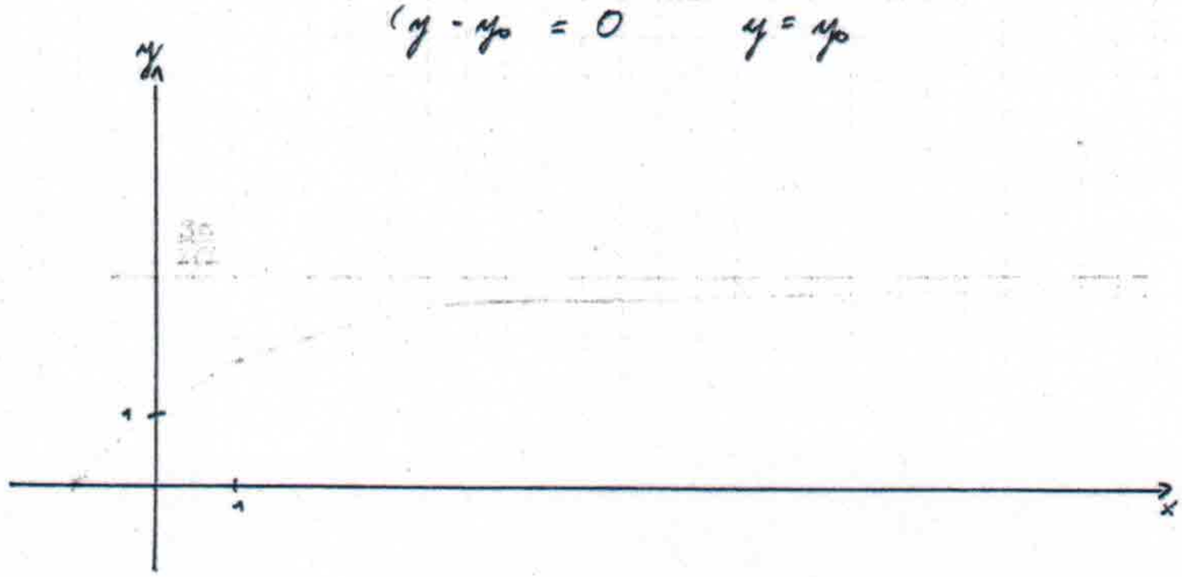
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{-x}(-x-4) + 3e \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\; e^{-x}\left(3\, e^{x+1} - x - 4\right)}{4}$$

$$\leq \frac{3e}{2\sqrt{2}}$$

<u>3.</u> tangente en x_0 : $(y - y_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0)$

$(y - y_0 = 0 \qquad y = y_0$



$\frac{1+m+1}{m+1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{1+m}{m}$ $\frac{1}{2}$ [illegible]

Concours de recrutement en mathématiques

Épreuve d'analyse

22 avril 2003

(15h-18h)

I. On considère les fonctions f_m définies par $f_m(x) = \sqrt{1+m-mx}$, où m est un paramètre réel.

1) Montrer de deux manières différentes qu'il existe un seul point P appartenant à toutes les courbes représentatives C_m de f_m dans un repère orthonormé. Étudier le sens de variation de f_m. Construire C_{-1}, C_0, C_1, C_2.

2) Soit $m > 0$. Calculer l'aire géométrique $A(m)$ du domaine limité par C_m et les axes du repère orthonormé. Montrer que parmi les C_m envisagées il existe une courbe limitant un domaine d'aire minimale.

3) Soit $m > 0$. Quel doit être m' pour que C_m et $C_{m'}$ se coupent à angle droit ? Calculer l'aire géométrique $B(m)$ du domaine limité par C_m, $C_{m'}$ et l'axe des abscisses du repère orthonormé. Pour quelle valeur de m l'aire $B(m)$ est-elle minimale ? $1 + (x-1)\frac{-m}{2}$

II. 1) Soit $I_0 = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt$ et pour tout $k \in IN^*$, $I_k = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt$:

a) Calculer I_0 et I_k pour tout $k \in IN^*$.

?

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)c_n(t)\,dt$

où $c_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ pour tout $t \in [0;\pi]$.

2) a) Démontrer que pour tous réels a et b, $2\cdot\cos a\cdot\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in IN^*$ et tout $t \in [0;\pi]$, $\left(\frac{1+m}{m}\right)$

$c_n(t)\cdot 2\cdot\sin\frac{t}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2})\cdot t\right)$.

c) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, la fonction de $]0;\pi]$ dans IR qui à t associe

$\dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\cdot t\right)}{2\cdot\sin\frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction s_n continue sur $[0;\pi]$.

d) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)s_n(t)\,dt$.

$\frac{1+m}{m}$

III. 1) ~~a)~~ Démontrer que l'application de $\left]0;\pi\right[$ dans IR qui à x associe $\dfrac{x}{\sin x}$ peut être prolongée en une fonction f continue sur $\left[0;\pi\right[$.

b) Démontrer que pour tout $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{x}{1+\cos x}$.

En déduire la limite de f' en 0.

2) ~~a)~~ Soit g la fonction définie sur $\left[0;\pi\right]$ par $g(t) = \left(\dfrac{t}{2\pi} - 1\right) \cdot f(\dfrac{t}{2})$.

Après avoir justifié que g est dérivable sur $\left]0;\pi\right]$, exprimer $g'(t)$ en fonction de $f(\dfrac{t}{2})$ et $f'(\dfrac{t}{2})$ pour tout $t \in \left]0;\pi\right]$ et calculer $\lim\limits_{t \to 0} g'(t)$.

En déduire que g est dérivable sur $\left[0;\pi\right]$.

b) Démontrer que pour tout $t \in \left[0;\pi\right]$, $\left|g'(t)\right| \leq \dfrac{\pi+1}{4}$.

3) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $\left| \int_0^\pi g(t) \cdot \sin\left((n+\dfrac{1}{2}) \cdot t \right) dt \right| \leq \dfrac{10}{2n+1}$.

? $\rightarrow$ *Aide :* Utiliser le résultat établi sous 2b.

Répartition des points : 8 =4,5+1,5+2 ; **5** =2+3 ; **7** =2,5+2+2,5

Épreuve d'analyse du 22 avril 2003

Exercice I.

$f_m(x) = \sqrt{1+m-mx} \quad m \in \mathbb{R}.$

$D_{fm} = \mathbb{R}$ si $m=0$

$D_{fm} =]-\infty \,;\, \frac{1+m}{m}]$ pour $m>0$

$D_{fm} = [\frac{1+m}{m} \,;\, +\infty[$ pour $m<0$

1) Point P

1ère méthode :

Soient m_1 et $m_2 \in \mathbb{R}$ et $m_1 \neq m_2$: $f_{m_1}(x) = f_{m_2}(x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+m_1-m_1x} = \sqrt{1+m_2-m_2x}$

$\Leftrightarrow 1+m_1-m_1x = 1+m_2-m_2x$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2) - x(m_1-m_2) = 0$

$\Leftrightarrow (m_1-m_2)(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

$P(1;1)$

$\frac{\partial}{\partial m} f_m = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{1+m-mx}} (1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2e méthode : $y^2 = 1+m-mx$

$(y^2-1) + (m-mx) = 0$

$(y^2-1) + m(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-1=0 \\ 1-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=+1 \text{ ou } -1 \text{ à écarter car } f_m(x) \geq 0. \\ x=1 \end{cases}$

$P(1;1) \in \mathscr{C}_m \ \forall m \in \mathbb{R}.$

Sens de variation de f_m :

$f'_m(x) = \frac{-m}{2\sqrt{1+m-mx}} \quad x \neq \frac{1+m}{m}$

dérivabilité en $\frac{1+m}{m}$?

si $m = 0$

$f_0(x) = 1$

$f_{-1}(x) = \sqrt{x}$

$f_1(x) = \sqrt{2-x}$

$f_2(x) = \sqrt{3-2x}$

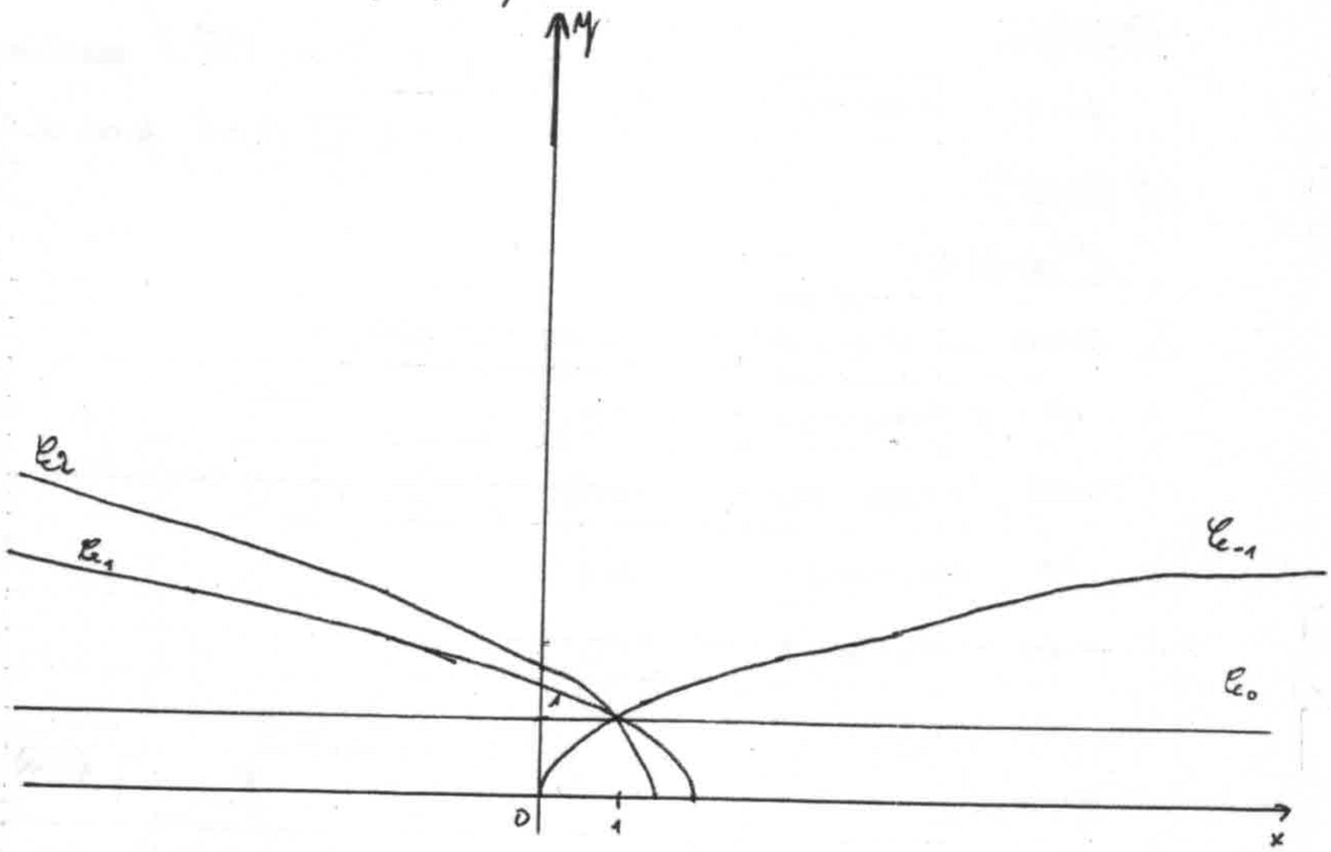
Pour $m>0$

x	$-\infty$		$\frac{1+m}{m}$
$f'_m(x)$		$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$	↘	0

Pour $m<0$

x	$\frac{1+m}{m}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	0	↗	$+\infty$

Représentations graphiques



2. $A(m) = \int_0^{\frac{m+1}{m}} \sqrt{1+m-mx}\, dx$

$= \frac{-1}{m} (1+m-mx)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^{\frac{m+1}{m}}$

$= \frac{1}{m} (1+m)^{\frac{3}{2}}$? $\frac{2}{3m}(1+m)^{\frac{3}{2}}$

Étude de la fonction $A(m)$:

$A'(m) \overset{?}{=} \frac{-\frac{3}{2}(1+m)^{\frac{1}{2}} m \mp (1+m)^{\frac{3}{2}}}{m^2}$?

$= \frac{\frac{3}{2}(1+m)^{\frac{1}{2}} \left[1+m-\frac{3}{2}m\right]}{m^2}$

$= \frac{(1+m)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1}{2}m\right)}{m^2}$

$A'(m) = 0 \iff m = -1$ à écarter car $m > 0$ ou $m = 2$

Donc l'aire limité par $\mathcal{C}_2$ est l'aire minimale pour $m > 0$.

3) $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_{m'}$ se coupent en un angle droit

$\Leftrightarrow \quad f'_m(1) \cdot f'_{m'}(1) = -1 \qquad = -1$

$$\frac{-m}{2} \cdot \frac{-m'}{2} = -1$$

$$m \cdot m' = -4$$

$$m' = -\frac{4}{m}$$

$$B(m) = \int_{\frac{m'+1}{m'}}^{1} f_{m'}(x) + \int_{1}^{\frac{m+1}{m}} f_m(x)$$

$$= -\frac{1}{m'} + \frac{1}{m}$$

$$= + \frac{m}{4} + \frac{1}{m}$$

$$= \frac{m^2+4}{4m}$$

$$B'(m) = \frac{2m \cdot 4m - (m^2+4)\,4}{16m^2}$$

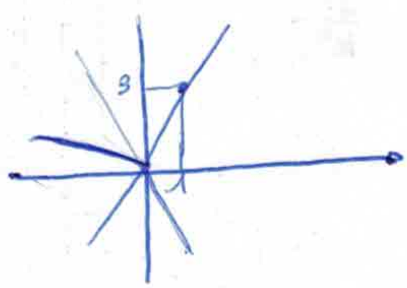
$$= \frac{8m^2 - 4m^2 - 16}{16m^2} = \frac{4m^2 - 16}{16m^2}$$

$B'(m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$ ou $m = -2$ à écarter

Pour $m = 2$ l'aire $B(m)$ est minimale.



Exercice II.

1) a) $I_0 = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt$

$= \left.\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{2\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{3}$

$I_k = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt$

$= \int_0^{\pi} \frac{t^2}{2\pi} \cos kt\, dt - \int_0^{\pi} t \cos(kt)\, dt$

intégration par parties:

$u(t) = \frac{t^2}{2\pi}$ $\quad$ $u(t) = t$

$u'(t) = \frac{t}{\pi}$ $\quad$ $u'(t) = 1$

$v'(t) = \cos kt$ $\quad$ $v'(t) = \cos(kt)$

$v(t) = \frac{\sin kt}{k}$ $\quad$ $v(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$

$I_k = \left.\frac{t^2}{2\pi} \cdot \frac{\sin kt}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \frac{\sin kt}{k} - \left. t \frac{\sin kt}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{k}$

$I_k = \left.\cancel{\frac{t^2}{2\pi} \frac{\sin kt}{k}}\right]_0^{\pi} + \left. t \cdot \frac{+\cos kt}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \int \frac{1}{\pi} \frac{\cos kt}{k^2} - \left. t \cancel{\frac{\sin kt}{k}}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{k}$

$u(x) = \frac{t}{\pi}$

$u'(x) = \frac{1}{\pi}$

$v'(x) = \frac{\sin kt}{k}$

$v(x) = \frac{-\cos kt}{k^2}$

$= \left. t \cdot \frac{\cos kt}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \left.\frac{1}{\pi} \cancel{\frac{\sin kt}{k^3}}\right]_0^{\pi} - \left.\frac{\cos kt}{k^2}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{\pi \cos k\pi}{\pi\, k^2} - 0 - \frac{\cos k\pi}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}$

$= \frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{\cos k\pi}{k^2} + \frac{\cos 0}{k^2}$

$= \frac{1}{k^2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}^2 + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right) dt \qquad t \in [0;\pi]$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) dt = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cos t\, dt = 1$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cos 2t\, dt = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cos 3t\, dt = \frac{1}{9}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cos nt\, dt = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cos(kt)\, dt = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{3} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cancel{dt} \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) \cdot = -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

??

Autre méthode (peut-être):

$$\frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) dt$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cancel{dt} + \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cdot \cos kt\, dt$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} I_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cos(kt)$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} + \_\_\_\_$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) \cancel{+} \text{---}$$

$$= \_\_$$

2) a) $\sin(a+b) - \sin(a-b) = \cancel{\sin a \cos b} + \cos a \sin b$

$\qquad - \cancel{\sin a \cos b} + \cos a \sin b$

$\qquad = 2 \cos a \sin b$

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right)\cdot 2\cdot \sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

$$= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin\left(kt+\frac{t}{2}\right) - \sin\left(kt-\frac{t}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{t}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k+1)t}{2} - \sin\frac{(2k-1)t}{2}}$$

$$= \sin\frac{t}{2} + \Big(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{5t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{7t}{2} - \sin\frac{5t}{2} + \dots + \sin\frac{(2n+1)t}{2} - \sin\frac{(2n-1)t}{2}$$

$$= \sin\frac{(2n+1)t}{2} = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$$

c) $s_n :]0;\pi] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt))\cdot \cancel{2\sin\frac{t}{2}}}{\cancel{2\sin\frac{t}{2}}} = \frac{1}{2}+n$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{pour } t\in]0;\pi] \\ \frac{1}{2}+n & \text{pour } t=0 \end{cases}$$

en particulier pour $n=0$ $s_0 = \dfrac{\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

d) $\cancel{s_n}\, c_n(t) \cdot 2\sin\frac{t}{2} = \sin((n+\frac{1}{2})t)$

$$c_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$c_n(t) = s_n(t)$ avec s_n continue sur $[0;\pi]$ donc intégrable !

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) s_n(t)\,dt.$

Exercice III

1) a) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ sur $]0;\pi[$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc $f = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x\in]0;\pi[\\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

b) $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x) \geq 0 \iff \sin x - x\cdot\cos x \geq 0$
$\iff \sin x \geq x\cdot\cos x$

$f''(x)$ $\cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x\underbrace{\sin x}_{\geq 0} = 0 \iff x=0$

x	0	
$f''(x)$		+
$f'(x)$	0	$\nearrow$

Donc $f'(x)$ est toujours positive. D'où $f'(x) \geq 0$.

Il reste à montrer que $\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \leq \frac{x}{1+\cos x}$

$\Leftrightarrow (\sin x - x\cos x)\cdot(1+\cos x) - x\sin^2 x \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x - x\cos x + \sin x\cos x - x\cos^2 x - x\sin^2 x \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x - x\cos x + \sin x \cos x - x \leq 0$

$\Leftrightarrow \sin x\,(1+\cos x) - x\,(1+\cos x) \leq 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - x)\cdot\underbrace{(1+\cos x)}_{\text{toujours positif ou nul}} \leq 0$ car $-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftrightarrow \sin x \leq x$
toujours vrai sur $]0;\frac{\pi}{2}]$.

Donc $f'(x) \leq \frac{x}{1+\cos x}$.

Finalement on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{x}{1+\cos x}$ pour $x \in]0;\frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ $\qquad 0 \leq \lim\limits_{x\to 0} f'(x) \leq \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\cos x}}_{=0}$

D'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

2) a) $g(t) = (\frac{t}{2\pi} - 1)\, f(\frac{t}{2})$

g est dérivable sur $]0;\pi]$ autant que produit de fonctions dérivables sur $]0;\pi]$.

$g'(t) = (\frac{t}{2\pi} - 1)' \cdot f(t/2) + (\frac{t}{2\pi} - 1)\cdot f'(\frac{t}{2})$

$= \frac{1}{2\pi} f(\frac{t}{2}) + (\frac{t}{2\pi} - 1)\, f'(\frac{t}{2})\, \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{t\to 0} g'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{2\pi} \underbrace{f(\frac{t}{2})}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\frac{t}{2\pi} - 1)\underbrace{f'(\frac{t}{2})}_{\to 0}}_{\to 0}$ d'après 1.b)

$= \frac{1}{2\pi}$

Puisque $\lim\limits_{t\to 0} g'(t)$ existe, $g(t)$ est dérivable à droite en 0, d'où $g(t)$ est dérivable sur $[0;\pi]$.

b) Il faut prouver que $|g'(t)| \leq \frac{\pi+1}{4}$

$$g'(t) = \frac{1}{2\pi} f(\tfrac{t}{2}) + (\tfrac{t}{2\pi} - 1) f'(\tfrac{t}{2})$$

$$0 \leq f'(\tfrac{t}{2}) \leq \frac{t/2}{1+\cos\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{x/2}{\sin x/2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{1}{2\pi} f(\tfrac{t}{2}) + (\tfrac{t}{2\pi} - 1) f'(t/2) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + (\tfrac{1}{2} - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\leq \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi+1}{4}$$

D'où $|g'(t)| \leq \frac{\pi+1}{4}$

3) $\left| \int_0^\pi g(t) \cdot \sin((n+\frac{1}{2})t)\, dt \right| \leq \frac{10}{2n+1}$

$$\left| \int_0^\pi g(t) \cdot \sin(\tfrac{2n+1}{2} t)\, dt \right|$$

par partie

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'analyse

Jeudi, le 13 novembre 2003
15h-18h

I. Soient les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x dx}{\cos x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$$

1. Déterminer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$). En déduire en fonction de n la différence : $I_{n+2} - I_n$. Calculer I_1, I_3 et I_5

2. On considère la fonction :

$$F : \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire I_0, I_2 et I_4 .

(4 points)

II. Soit f la fonction de variable réelle x strictement positive telle que :

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé *(unité : 2cm)*.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$ $(x \geq 0)$.

Donner le sens de variation de g et sa limite en $+\infty$.
En déduire qu'il existe un unique réel a strictement positif tel que g(a)=0 et prouver que $\frac{\ln 2}{2} \prec a \prec 1$. Etudier le signe de g(x) et établir l'encadrement : $0{,}79 \prec a \prec 0{,}8$.

2. Justifier la dérivabilité de f sur $]0;+\infty[$ et montrer que pour tout $x \succ 0$,

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{2}{x}} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right).$$

En déduire les variations de f.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif

$\ln f(x) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x) + \frac{1}{2}\ln(1 - e^{-\frac{2}{x}})$. En déduire la limite de f en 0.

4. Etablir que pour tout t de $[0;1]$ $0 \leq e^t - 1 \leq e \cdot t$.

En déduire que pour tout t de $[0;1]$: $1+t \leq e^t \leq 1 + t + \frac{e}{2} \cdot t^2$

Utiliser cet encadrement pour démontrer que pour tout $x \geq 2$:

$$0 \leq [f(x)]^2 - 2x \leq 2e.$$

Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = \sqrt{2x}$. Déterminer le signe de f- φ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.

5. Donner le tableau de variation de f et tracer (C_f)

(7 points)

2

III. Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, dont on précisera l'ensemble de définition.

2. Trouver l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et déterminer $(f^{-1})'$.

3. Calculer $I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 = 1}}$.

(4 points)

IV. Etudier et représenter graphiquement h définie par

$$h(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|^x \; (x \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \text{ et } h(0) = 1$$

(domaine de définition, continuité, dérivabilité, limites aux bornes de l'ensemble de définition, fonction dérivée et sens de variation,, représentation graphique)

(5 points)

1) $t \in [0;1]$: $e^t \leq 1 + e t$ [illegible]

$\Rightarrow e^t - 1 \leq e \cdot t$

$(f(x))^2 - 2x = x^2 \underbrace{(e^{\frac{2}{x}} - 1)}_{\leq e \cdot \frac{2}{x}} - 2x \leq x^2 e \cdot \frac{2}{x} - 2x = 2x(e-1)$

$f - \varphi(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} - \sqrt{2x}$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \sqrt{2e} > 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f - \varphi)(x) = x\left(\underbrace{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}_{0} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}_{0}\right) = 0.$

$f(x) =$

Épreuve d'analyse du 13 novembre 2003

Exercice I.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin^n}_{u^n} x \underbrace{\cos x}_{u'} \, dx = \frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1} \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x - \sin^n x}{\cos x} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \, (\sin^2 x - 1)}{\cos x} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \cdot (-\cos^2 x)}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cdot \cos x \, dx = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \cancel{\int_0^{\frac{\pi}{3}}} - \ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = +\ln 2$$

$\cancel{I_3 =}$

$$I_3 = I_1 - \frac{1}{n+2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\cancel{n+1}\,2} = +\ln 2 - \frac{1}{\cancel{n+1}\,2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\cancel{n+1}\,2}$$

$$I_5 = I_3 - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = +\ln 2 \cancel{-\frac{2}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$$

2. $F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$F'(x) = \frac{\frac{1/2}{\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1/2}{\cos^{\cancel{2}}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} \cdot \frac{\cancel{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}}{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{1/2}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{\cancel{1/2}}{\cancel{\frac{1}{2}} \sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cancel{\sin} \cos x}$$

Donc $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \, dx = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\overbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{=1}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{3}+2)$$

$$I_2 = I_0 - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = \ln(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{\cancel{n+1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\cancel{n+1}}$$

$$I_4 = \ln(\sqrt{3}+2) - \cancel{\frac{2}{n+1}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\cancel{n+1}} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Exercice II.

$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$

$e^{\frac{2}{x}} - 1 \geq 0 \iff e^{\frac{2}{x}} \geq e^0$

$\iff \frac{2}{x} \geq 0$

$\iff x > 0$

1. $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \overbrace{1}^{1} - \overbrace{x}^{-\infty} - \overbrace{e^{-2x}}^{0} = -\infty$$

$g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$

$g'(x) \geq 0 \iff -1 + 2e^{-2x} \geq 0$

$2e^{-2x} \geq 1$

$e^{-2x} \geq \frac{1}{2}$

$-2x \geq -\ln 2$

$x \leq \frac{\ln 2}{2}$

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	↗	~~0,0568533 > 0~~ 0,403...	↘	$-\infty$

$$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - e^{-2\ln 2}$$
$$= 1 - \frac{\ln 2}{2} - e^{\ln \frac{1}{4}}$$
$$= 1 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} \simeq 0{,}056$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists k \in \left]\frac{\ln 2}{2} ; +\infty\right[$ tel que $g(k) = 0$ unique

car $g > 0$ sur $\left]0 ; \frac{\ln 2}{2}\right[$

$g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) > 0$

$g(1) = 1 - 1 - e^{-2} = -\frac{1}{e^2} < 0$

Donc $\frac{\ln 2}{2} < \alpha < 1$.

$g\left(\frac{\ln 2 + 2}{4}\right) \approx$

⋮

par dichotomie.

Épreuve d'analyse du 13 novembre 2003

Exercice I.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\sin^n x}_{u^n} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}\, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \cdot (\sin^2 x - 1)}{\cos x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x \cdot (-\cos^2 x)}{\cos x} dx =$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cdot \cos x\, dx = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= -\ln \frac{1}{2} + \ln 1$$
$$= \ln 2$$

$$I_3 = I_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{d'après } (*)$$
$$= \ln 2 - \frac{3}{8}$$
$$I_5 = I_3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$$
$$= \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\,\frac{9}{16}$$
$$= \ln 2 - \frac{24}{64} - \frac{9}{64}$$
$$= \ln 2 - \frac{33}{64}$$

2. $F(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$F(x)$ est une primitive de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} = f(x).$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right] - \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\tan \frac{5\pi}{12}\right]$$

$$I_2 = I_0 - \frac{1}{1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_4 = I_2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{8}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

Exercice II

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

1. $g(x) = 1 - x - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

$$\lim_{x\to+\infty} (1 \underbrace{-x}_{\to -\infty} \underbrace{-e^{-2x}}_{\to 0}) = -\infty$$

$$g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$$

22 min $\quad g'(x) = 0 \iff -1 + 2e^{-2x} = 0$

$$\iff e^{-2x} = \frac{1}{2}$$

$$\iff -2x = -\ln 2$$

$$\iff x = \frac{\ln 2}{2}$$

Tableau des variations:

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ $(\approx 0{,}1534)$	$\searrow$	$-\infty$

x	0		a	
$g(x)$		$+$	0	$-$

Sur $]0;\frac{\ln 2}{2}[$ $g(x)$ est continue et positif, donc $g(x)$ n'admet aucune racine sur cet intervalle.

Comme $g(x)$ est continue, strictement décroissant de $[\frac{\ln 2}{2};+\infty[$ vers ~~\[...\]~~ $[\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2};-\infty[$, et $g(\frac{\ln 2}{2})>0$ $g(+\infty)<0$ on en déduit (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) que g admet une racine a. De plus:

$$\left.\begin{array}{l} g(\frac{\ln 2}{2}) \simeq 0,1534 > 0 \\ g(1) = -e^{-2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\ln 2}{2} < a < 1.$$

On a:

$g(0,7) = 0,0534 \quad \Rightarrow \quad 0,7 < a < 1$

$g(0,8) = -0,0019 \quad \Rightarrow \quad 0,7 < a < 0,8$

$g(0,75) = 0,0269 \quad \Rightarrow \quad 0,75 < a < 0,8$

$g(0,79) = 0,0040 \quad \Rightarrow \quad \underline{0,79 < a < 0,8}$

2. $f(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$$f(x) = x \cdot \sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$$

$$f'(x) = (e^{\frac{2}{x}}-1)^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2}(e^{\frac{2}{x}}-1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2}$$

$$= (e^{\frac{2}{x}}-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} e^{\frac{2}{x}} (e^{\frac{2}{x}}-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (e^{\frac{2}{x}}-1)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} \left[e^{-\frac{2}{x}} (e^{\frac{2}{x}}-1) - \frac{1}{x} \right]$$

$$= (e^{\frac{2}{x}}-1)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2}{x}} \left[1 - \frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}} \right]$$

$$= \underbrace{(e^{\frac{2}{x}}-1)^{\frac{1}{2}}}_{\geq 0} \underbrace{e^{\frac{2}{x}}}_{>0} \cdot g(\tfrac{1}{x})$$

$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(\frac{1}{x})$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(\frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$ $\qquad \frac{10}{8} < \frac{1}{a} < \frac{100}{79}$

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$	
$f(x)$	// $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	

3. $\ln f(x) = \ln\left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln\left[e^{\frac{2}{x}}\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)\right]$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

$$= \ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1+x\ln x\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln f(x) = \lim_{x\to 0^+} \overbrace{\frac{1}{x}}^{+\infty}\overbrace{\left(1+x\ln x\right)}^{\nearrow 1} + \frac{1}{2}\overbrace{\ln\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)}^{\nearrow 0} = +\infty$$

1 heure

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = +\infty$$

4. Pour $t \in [0;1]$ $\quad e^t \underset{p}{\geq} e^0 \iff e^t - 1 \geq 0$

car e^x est croissant sur $[0;1]$

Pour t ~~$\in [0;1]$~~ proche de 0 $\quad e^t = 1 + t\cdot e^? + \mathcal{E}(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \mathcal{E}(t) = 0$

pour $t \geq 0$ $\quad e^t \leq 1 + te$

Donc $0 \leq e^t - 1 \leq e\cdot t$.

$$[f(x)]^2 - 2x = x^2\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right) - 2x$$

$$\leq x^2\cdot e\cdot\frac{2}{x} - 2x$$

$$\leq 2x(e-1)$$

$$[f(x)]^2 \leq 2e$$

$\frac{2}{x} \in [0,1]$

$x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{e}{2}\frac{4}{x^2}\right) - 2x$

$2x + 2e - \cancel{2x}$

$2e$

$$f(x) - \varphi(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1} - \sqrt{2x}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \sqrt{2e} > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f-\varphi)(x) = x\left(\underbrace{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}_{0} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}_{0}\right) = 0 \quad \text{car } (f-\varphi)(x) \leq \sqrt{2e}$$

Cela signifie que $f(x)$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = \sqrt{2x}$.

5.

1h 20

Exercice III.

$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad x \in [\frac{\pi}{2}; \pi[$

1. On a le théorème suivant : Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone :

(i) $f(I)$ est un intervalle et l'application f définit une bijection de I sur $f(I)$.

(ii) La bijection réciproque de f est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Donc :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{-\cos x}^{<0 \text{ sur } [\frac{\pi}{2};\pi[}}{\underbrace{\sin^2 x}_{>0 \text{ sur } [\frac{\pi}{2};\pi[}} > 0 \quad \text{sur } [\tfrac{\pi}{2}; \pi[$$

Comme f est strictement croissante et continue sur $[\frac{\pi}{2}; \pi[$ la réciproque f^{-1} existe et dom f^{-1} = im f = $[1; +\infty[$.

2. $$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cancel{\frac{1}{\sin(\mathrm{Arcsin}\, x)}}$$

$$= \cancel{\frac{-\cos(\mathrm{Arcsin}\, x)}{\sin^2(\mathrm{Arcsin}\, x)}} = \frac{\sin(\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{y})^2}{-\cos(\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{y})} = \frac{-\frac{1}{y^2}}{-\sqrt{1-(\frac{1}{y})^2}}$$

$$= \frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}$$

$$= \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

3. $I = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

$= \left. f^{-1}(t) \right]_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}}$

1h30

Exercice IV.

$h(x) = |1+\frac{1}{x}|^x$ $\qquad h(0)=1$

· Domaine de définition :

$h(x) = e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|}$

C.E. : $x \neq 0$ et $1+\frac{1}{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1$

$D_h = \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$

· Continuité

$h(x)$ est continue comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$.

En $x=0$: $\cdot \lim_{x\to 0^+} |1+\frac{1}{x}|^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln|\frac{x+1}{x}|}$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{x\ln|x+1|}^{0} + \overbrace{x\ln|x|}^{0}} = 1$

$\cdot \lim_{x\to 0^-} |1+\frac{1}{x}|^x = 1$

D'où $h(x)$ est continue en 0 et $h(0)=1$.

ok

~~Continuité en -1:~~

~~$\lim_{x\to -1^-} e^{\underbrace{x \ln|1+\frac{1}{x}|}_{+\infty}} = +\infty$ discontinuité en $x=-1$~~

~~$\lim_{x\to -1^+} e^{x\ln|1+\frac{1}{x}|} = +\infty$ → A.V. d'équation $x=-1$.~~

$\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

· Dérivabilité:

dérivabilité en 0:

par l'Hospital $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}}{}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln|1+\frac{1}{x}|}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-1}{x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})}\cdot \underbrace{\ln(1+\frac{1}{x})}_{\to+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x\ln(-1-\frac{1}{x})}-1}{x} = +\infty$

Donc $h(x)$ n'est pas dérivable en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_0\setminus\{-1\}$

$h'(x) = e^{x\ln|1+\frac{1}{x}|}\cdot\left(\ln|1+\frac{1}{x}| + x\cdot\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$ $\frac{x+1}{x}$ $\qquad \frac{-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x+1}$

$= e^{x\ln|1+\frac{1}{x}|}\cdot\left(\ln|1+\frac{1}{x}| - \frac{1}{x+1}\right)$

$h'(x)=0 \iff \ln|1+\frac{1}{x}| - \frac{1}{x+1} = 0$

$\iff (x+1)\cdot\ln|1+\frac{1}{x}| = 1$

$\iff x=-1$ ou $1+\frac{1}{x}=1$ ou $-1-\frac{1}{x}=1$
à exclure $\iff \frac{1}{x}=0$ impossible $\iff x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0	
$x+1$		$-$	‖		$+$		‖	$+$
$\ln\|1+\frac{1}{x}\|$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$h(x)$	e	↗	‖	↘		↗	‖ 1	↗ e

· Limites:

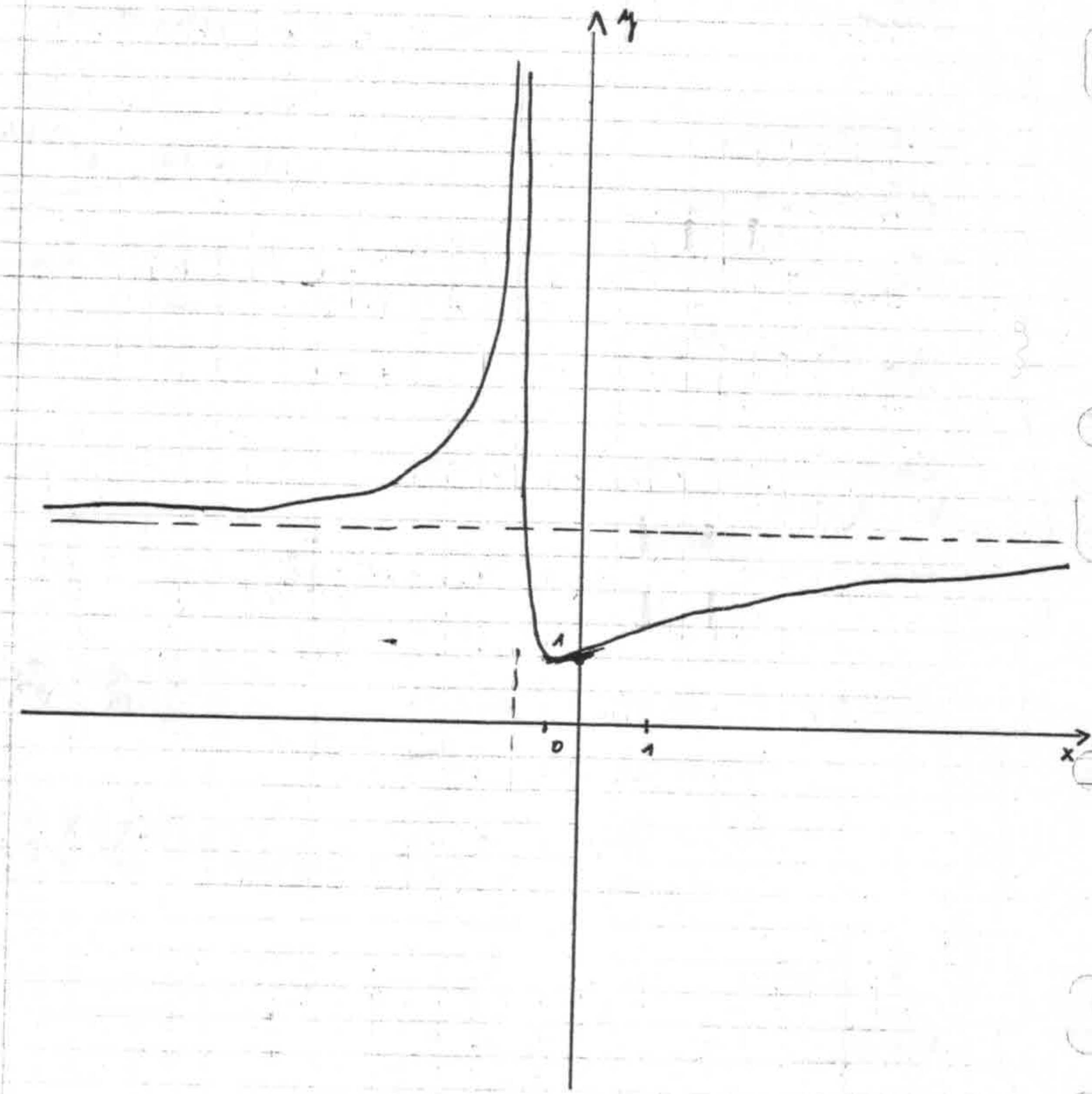
$\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln|1+\frac{1}{x}|} = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln|x+1| - x\cdot\ln|\frac{1}{x}|}$ on a $x\cdot\ln|1+\frac{1}{x}| = \frac{\ln|1+\frac{1}{x}|}{(1+\frac{1}{x})-1}$

$= \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln(-1-\frac{1}{x})} = \lim_{y\to 0^-} e^{+\frac{\ln(-1-y)}{y}} = \ldots$
$x=\frac{1}{y}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{y\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e$
$x=\frac{1}{y}$

2h

• Représentation graphique



2003/2004 , 2e session

Concours de recrutement en mathématiques
22 avril 2004 (15.00-18.00)
ÉPREUVE D'ANALYSE

I. A) Soit la fonction g, définie sur $]0;+\infty[$, par $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

Étudier le sens de variation de g. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0,5<\alpha<0,6$. Préciser le signe de $g(x)$ pour $x>0$.

B) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1) Étudier la parité de f. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Étudier la continuité de f et la dérivabilite de f en 0. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

2) Démontrer que pour tout réel x de $[0,5\,;\,\alpha]$, $0\le f'(x)\le f'(0,5)$.
Appliquer le théorème de l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que $0\le f(\alpha)-f(0,5)\le\frac{1}{10}f'(0,5)$. Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

3) Tracer le graphe cartésien G_f de f dans un repère orthonormé du plan (unité :2 cm).

4) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $J(m)=\int_1^m f(x)dx$ pour tout réel m, calculer $J(m)$ pour $m\neq 0$. Déterminer ensuite $J(0)$. Préciser le signe de $J(m)$ suivant les valeurs du réel m.

II. Soit α un réel non nul. On considère les fonctions f_α, définies sur $]0;+\infty[$, par $f_\alpha(x)=\left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1) Montrer qu'on peut prolonger f_α par continuité en 0, soit g_α ce prolongement.

2) Étudier la dérivabilité de g_α en 0.

3) Étudier le comportement de f_α en $+\infty$.

4) Étudier, en utilisant les variations des fonctions logarithme et exponentielle, les variations des fonctions f_α

5) Esquisser l'allure des courbes représentatives de f_α.

III. Soit $n\in IN^*$, calculer $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ avec $f_n(x)=\frac{n\cdot x-1}{(1+x\cdot\ln n)\cdot(1+n\cdot x^2\cdot\ln n)}$.

On pourra déterminer trois réels A, B, C tels que $f_n(x)=\frac{A}{1+x\cdot\ln n}+\frac{B\cdot x+C}{1+n\cdot x^2\cdot\ln n}$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

Répartition des points : **8 ; 7 ; 5**

2) On a $f'(x) = g(x)$. On a montré que $g(x)$ est strictement décroissant sur $[0{,}5;\alpha]$. Donc $\forall x \in [0{,}5;\alpha]$ $g(x) \in [g(\alpha); g(0{,}5)]$

$\rightarrow \quad 0 \leq g(x) \leq g(0{,}5)$ ou bien $0 \leq f'(x) \leq f'(0{,}5)$.

Le théorème de l'inégalité des accroissements finis nous dit que $\exists c \in]a;b[$ tel que $|f'(c)| \leq M$ alors $f(b)-f(a) \leq |f'(c)| \cdot (b-a)$.

~~Pour~~ Puisque $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ et sur $[0{,}5; 0{,}6]$ on a $\forall x$ $f'(0{,}5) \geq f(x)$ on obtient

inégalité des accroissements finis : $0 \leq \frac{f(\alpha) - f(0{,}5)}{\alpha - 0{,}5} \leq f'(0{,}5)$

$$0 \leq f(\alpha) - f(0{,}5) \leq (\overset{\alpha}{0{,}6} - 0{,}5)\, f'(0{,}5)$$

car $f(0{,}5) \leq f(\alpha)$ puisque f est croissant sur $[0{,}5; 0{,}6]$

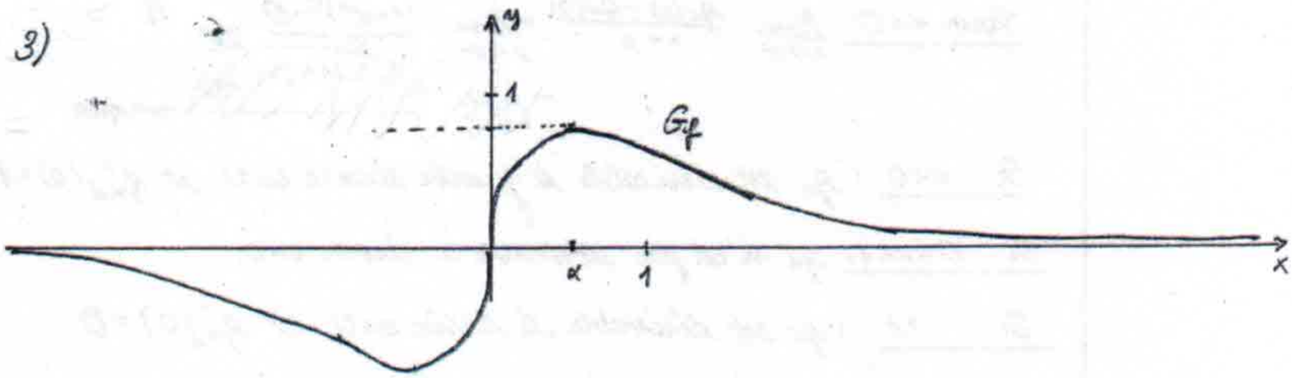
puis $\cdot (\alpha - 0{,}5)$ et ensuite on utilise que $0{,}6 - 0{,}5 > \alpha - 0{,}5$

$$f(0{,}5) \leq f(\alpha) \leq \tfrac{1}{10} f'(0{,}5) + f(0{,}5)$$

$$0{,}8047 \leq f(\alpha) \leq 0{,}8056$$

Donc $f(\alpha) \approx 0{,}804$ (valeur par défaut)

3)



4) $J(m) = \int_1^m f(x)\,dx$ existe puisque $f(x)$ existe $\forall x \in [1;m]$.

$m \neq 0$: $J(m) = \int_1^m x \cdot \ln(1+\frac{1}{x^2})$, intégration par parties $u'(x) = x$ $u(x) = \frac{x^2}{2}$

$v(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2})$ $v'(x) = -\frac{2}{x(x^2+1)}$

$$J(m) = \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(1+\tfrac{1}{x^2})\Big]_1^m + \int_1^m \frac{x^2}{2} \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \ln(1+\tfrac{1}{x^2})\Big]_1^m + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_1^m$$

$$= \frac{m^2}{2}\ln(1+\frac{1}{m^2}) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(m^2+1) - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 \cdot \ln(1+\frac{1}{m^2}) + \ln(m^2+1)\right) - \ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(m^2+1)\ln(m^2+1) - m^2 \ln(m) - \ln 2$$

$$J(0) = \tfrac{1}{2}(0^2+1) \cdot \underbrace{\ln(0^2+1)}_{=0} - \underbrace{0 \cdot \ln(0)}_{=0} - \ln 2 = -\ln 2$$

On pose $h(m) = \frac{m^2+1}{2}\ln(m^2+1) - m^2\ln(m) - \ln 2$ et $h'(m) = m \cdot \ln\Big(\overbrace{\underbrace{\tfrac{1+m^2}{m^2}}_{>1}}^{>0}\Big)$

m		α'	0	β'	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(m)$	$+\infty$ ↘		$\underset{<0}{-\ln 2}$	↗	$+\infty$

$\rightarrow$ $h(m) > 0$ pour $m \in]-\infty;\alpha'[\cup]\beta';+\infty[$

$h(m) = 0$ pour $m = \alpha'$ et $m = \beta'$

$h(m) < 0$ pour $m \in]\alpha';\beta'[$

Exercice II

$\alpha \neq 0 \quad f_\alpha(x) = (1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ pour $x \in]0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\alpha}} = 1$ si $\alpha > 0$

$\overset{\text{si } \alpha<0}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x^\alpha)}{\alpha}} = 0$ si $\alpha < 0$

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si } x \in]0;+\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \text{ et } \alpha > 0 \end{cases}$$

2) Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} - 1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} - 1}{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)}}_{\to 1} \quad \underbrace{\dfrac{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\to \frac{1}{\alpha}} \quad \underbrace{\dfrac{x^\alpha}{x}}_{\to 0 \text{ si } \alpha>1,\ \to +\infty \text{ si } \alpha<1}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} \dfrac{\alpha}{\alpha} \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}$

Pour $\alpha > 0$: $g'_\alpha(0) = 0$ si $\alpha \geq 1$

$g'_\alpha(0) = +\infty$ si $0 < \alpha < 1$

Pour $\alpha < 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g_\alpha(x) - g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} - 0}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+\frac{1}{x^{-\alpha}})}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)} - 1}{\underset{\to 0^+}{x}} = -\infty$

Si $\alpha < 0$: g_α est dérivable à ~~gauche~~ droite en 0 et $g'_{\alpha d}(0) = 1$?

Si $0 < \alpha < 1$: g_α n'est pas dérivable à droite en 0.

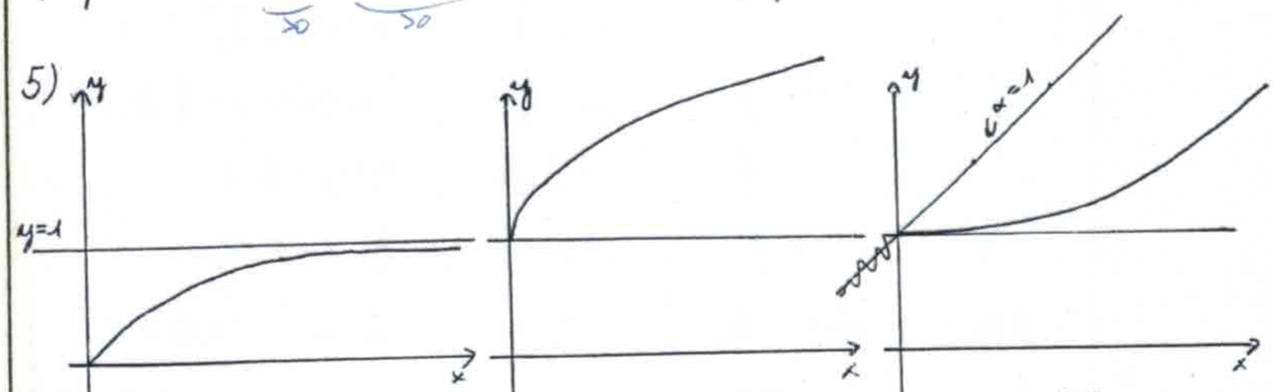
Si $\alpha > 1$: g_α est dérivable à droite en 0 et $g'_{\alpha d}(0) = 0$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$ si $\alpha > 0$

$= 1$ si $\alpha < 0$

4) $f'_\alpha(x) = \underbrace{\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}}_{>0} \underbrace{e^{\frac{1}{\alpha}\ln(1+x^\alpha)}}_{>0} > 0$ sauf pour $x = 0$

5)



$\alpha < 0 \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad \alpha > 1$

$\alpha = 1$

Épreuve d'analyse du 22 avril 2004

Exercice I.

A) $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$ sur $]0;+\infty[$.

Sens de variation:

$$g'(x) = \frac{-2x^{-3}}{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^{-1}}{x^2+1} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x - \frac{2}{x} + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x-\frac{2}{x}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2}{x(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{\underbrace{x}_{>0}\underbrace{(x^2+1)^2}_{>0}}$$

sur $]0;+\infty[$

$g'(x) = 0 \iff x=-1$ ou $x=1$
à exclure $\notin D_g$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	0

$\approx -0{,}31 < 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$

Comme $g(x)$ est strictement décroissant sur $]0;1[$ et aussi continu sur $]0;1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists k \in]0;1[$ tel que $g(k) = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} g(x) > 0$ et $g(1) \overset{= \ln 2 - 1 < 0}{}$?

$g(1) < 0$

~~On a~~ De plus k est unique puisque $g(x)$ est strictement décroissante sur $]0;1[$. et sur $]1;+\infty[$ g est $\nearrow$ et continue mais $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et $g(1) < 0$.
pas de racine supplémentaire

On a $g(0{,}6) = -0{,}141$ et $g(0{,}5) = 0{,}009$

$\rightarrow 0 \in]g(0{,}6); g(0{,}5)[$, donc $k \in]0{,}5; 0{,}6[$

B)
$$f(x) = \begin{cases} x \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}_0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Parité de $f(x)$: $f(-x) = -x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{(-x)^2}\right)$

$$= -x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire.

Limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{posons } y = \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{y\to0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Continuité : $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ comme fonction composé de fontions continues sur $\mathbb{R}_0$.

Pour $x=0$: $\lim_{x\to0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^+} x\cdot\overbrace{\ln\underbrace{(1+x^2)}_{\to 1}}^{\to 0} - 2x\cdot\ln x$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to0^-} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^-} x\cdot\ln(1+x^2) - 2x\cdot\ln x$$

$$= 0$$

Donc $f(x)$ est continu sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité : en $x=0$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x} = \lim_{x\to0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

D'où f n'est pas dérivable en 0.

Tableau de variations : Pour $x \in \mathbb{R}_0$:

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$= \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + x\cdot\frac{-2x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{x^2+1} = \underbrace{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}_{>0} + \frac{-2}{x^2+1} = g(x)$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ ~~$V(\infty)$~~

car impaire

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$	+	0	−	‖	+	0	−	
$f(x)$	0 ↗		↘ 0	‖	0 ↗		↘	0

on devrait encore étudier $g'(x)$ ce qu'on a fait

Exercice III

On a $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x - 1}{(1+x\cdot \ln n)\cdot(1+nx^2\ln n)}$

$$\frac{A}{(1+x\ln n)} + \frac{Bx+C}{1+nx^2\ln n} = \frac{A + Anx^2\ln n + Bx + Bx^2\ln n + C + Cx\ln n}{(1+x\cdot\ln n)\cdot(1+nx^2\ln n)}$$

En comparant avec $f_n(x)$ on a le système suivant : (pour $n \neq 1$)

$$\begin{cases} An\ln n + B\ln n = 0 \\ B + C\ln n = n \\ A + C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} An + B = 0 \\ B + C\ln n = n \\ A + C = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} nA = B \quad \rightarrow \quad A = \frac{-B}{n} \\ \ln n\, C = -B \\ A + C = -1 \end{cases}$$

$nA + \ln n\, C = 0$

$n(-C-1) + \ln n\, C = 0$

$C(-n+\ln n) = n$

$C = \dfrac{n}{-n+\ln n}$

$A = \dfrac{-n + n - \ln n}{-n+\ln n} = \dfrac{-\ln n}{-n+\ln n}$

$B = \dfrac{n\ln n}{-n+\ln n}$

si $n = 1$

$I_1 = \int_0^1 x-1\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1$

$= -\frac{1}{2}$

$I_n = \int_0^1$

1ère session 2004/2005

Concours de recrutement
Mathématiques

Epreuve d'analyse

Jeudi, le 11 novembre 2004
15h-18h

I. Soit n un entier naturel.

On considère f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + x\ln x & \text{si } x \succ 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Préciser l'ensemble de définition ; étudier la continuité et la dérivabilité de f_n à droite en 0.

2. Etudier les variations de f_n et la limite de f_n lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Pour $\lambda>0$, déterminer $I_n(\lambda) = \int_\lambda^{e^{-n}} f_n(x)dx$ puis $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} I_n(\lambda)$.

4. Tracer la courbe (C_0) de f_0 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

5. On note α et β les solutions respectives des équations $f_0(x) = 1$ et $f_0(x) = 1 + \frac{1}{e}$.
   Donner un encadrement de α et β à $2\cdot 10^{-1}$ près.

6. Soit t un réel strictement positif. Discuter, suivant les valeurs de t, le nombre de solutions de l'équation $f_0(t) + f_0(x) = 1$.

(5 points)

II. Soit g_k $(k \in \mathbb{R})$ la fonction de variable réelle x telle que :

$$g_k(x) = kxe^{-kx}$$

et (C_k) sa courbe représentative dans un repère orthonormé *(unité : 2,5cm)*.

1. Préciser g_0 et (C_0)

2. Pour $k \succ 0$, étudier les variations de g_k et les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Etudier les éventuelles branches infinies et tracer ((C_2).

3. Montrer que $g_k(x) = g_{-k}(-x)$ et en déduire un moyen de tracer, avec $k \succ 0$ (C_{-k}) à partir de (C_k). Dessiner (C_{-2}) .sur le graphique précédent.

4. Montrer que les courbes (C_k) passent toutes par un même point que l'on déterminera. Donner une équation de la tangente à (C_k) en ce point.

5. Pour $k\neq 0$, déterminer une primitive de g_k.

   On pose : $A_k = \int_0^{\frac{1}{k}} g_k(t)dt$. Calculer A_k et $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k$.

Epreuve d'analyse du 11 novembre 2004

Exercice I

$$f_n(x) = \begin{cases} nx + x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Ensemble de définition : C.E. $x \geq 0$, donc $D_{f_n} = \mathbb{R}_0^+$.

Continuité: f_n est continue sur $\mathbb{R}_0^+$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}_0^+$ ($g(x) = x$ et $h(x) = \ln x$).

Problème pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} (nx + x\ln x) = 0 \overset{f_n(0)}{=} \checkmark \text{ car } \lim_{x \to 0^+} nx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{y \to +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0$$

Donc f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Dérivabilité: f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f_n'(x) = n + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = n + 1 + \ln x.$$

Regardons si f_n est dérivable à droite en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{nx + x\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} n + \ln x = -\infty$$

Donc $f_n(x)$ n'est pas dérivable à droite en 0.

2. Limite en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} nx + x\ln x = +\infty$ $\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \right.$, d'où B.P. de dir. $Oy)$

Variations de f_n:

On a $f_n'(x) = n + 1 + \ln x$ et $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n + 1 + \ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = -(n+1)$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-n-1}.$$

T.V. :

x			e^{-n-1}		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-n-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $\lambda > 0$

$$I_n(\lambda) = \int_\lambda^{e^{-n}} nx + x\cdot \ln x \, dx$$
$$= \int_\lambda^{e^{-n}} nx \, dx + \int_\lambda^{e^{-x}} x \ln x \, dx$$
$$= \left.\frac{nx^2}{2}\right]_\lambda^{e^{-n}} + \underbrace{\int_\lambda^{e^{-\lambda}} x \ln x \, dx}_{J_n(\lambda)}$$

Pour $J_n(x)$ on fait une intégration par parties : $u'(x) = x$ $\quad v(x) = \ln x$
$u(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

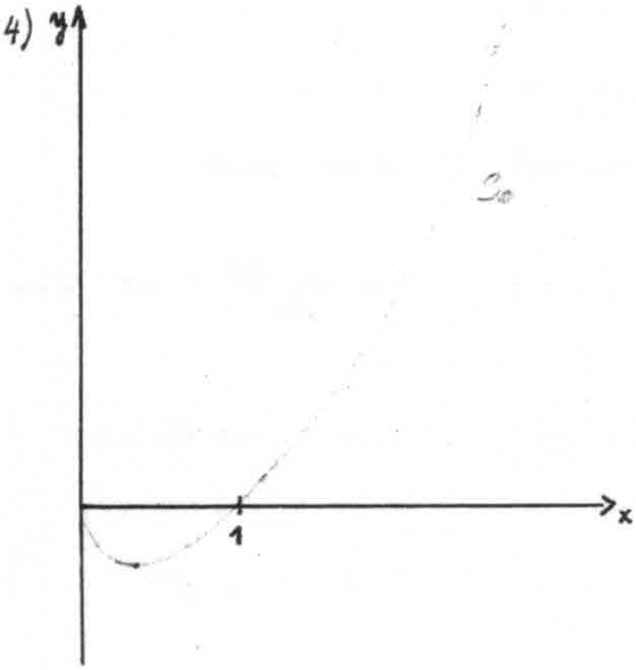
D'où $J_n(x) = \left.\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_\lambda^{e^{-n}} - \int_\lambda^{e^{-n}} \frac{x}{2}\, dx$
$$= \left.\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_\lambda^{e^{-n}} - \left.\frac{x^2}{4}\right]_\lambda^{e^{-n}}$$

On trouve donc : $I_n(\lambda) \cancel{=} \cancel{\frac{ne^{-2n}}{2}}$

$$I_n(\lambda) = \frac{ne^{-2n}}{2} - \frac{n\lambda^2}{2} + \frac{e^{-2n}\ln e^{-n}}{2} - \frac{\lambda^2 \ln\lambda}{2} - \frac{e^{-2n}}{4} + \frac{\lambda^2}{4}$$
$$= \cancel{\frac{ne^{-2n}}{2}} - \frac{n\lambda^2}{2} - \cancel{\frac{ne^{-2n}}{2}} - \frac{\lambda^2\ln\lambda}{2} - \frac{e^{-2n}}{4} + \frac{\lambda^2}{4}$$
$$= \lambda^2\left(-\frac{n}{2} - \frac{\ln\lambda}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{e^{-2n}}{4}$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^2\left(-\frac{n}{2} - \frac{\ln\lambda}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{e^{-2n}}{4}$$
$$= \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda\left(-\overset{\to 0}{\frac{n\lambda}{2}} - \overset{\to 0}{\frac{\lambda\ln\lambda}{2}} + \overset{\to 0}{\frac{\lambda}{2}}\right) - \frac{e^{-2n}}{4} = -\frac{e^{-2n}}{4}$$

4)



$f_0(x) = 0\cdot x + x\ln x$
$= x\ln x$

minimume en $x = \cancel{-}e^{-1} \approx -0{,}367$

et $f_0(-e^{-1}) = -0{,}367$

5. $f_0(x) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha$; $f_0(x) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \beta$. $f_0(x) = x \cdot \ln x$

- D'après le graphique, on a $f_0(1{,}5) = 0{,}6$ et $f_0(2) = 1{,}38$

  Donc $\alpha \in \,]1{,}5 ; 2[$. Par dichotomie : (on veut $x \cdot \ln x = 1$)

  $f_0(1{,}75) = 0{,}97 < 1$, donc $\alpha \in \,]1{,}75 ; 2[$

  $f_0(1{,}8) = 1{,}05 > 1$, donc $\alpha \in \,]1{,}75 ; 1{,}8[$

  D'où $1{,}7 < \alpha < 1{,}9$ à $0{,}2$ près.

- On veut $x \cdot \ln x = 1 + \frac{1}{e}$ $(\simeq 1{,}36)$

  On a $f_0(1{,}8) = 1{,}05$ et $f_0(2) = 1{,}38 \Rightarrow 1{,}8 < \beta < 2$ à $0{,}2$ près.

6. $t \in \mathbb{R}_0^+$. $f_0(t) + f_0(x) = 1$

- Si $f_0(t) = 0$ alors $f_0(x) = 1$ alors 1 solution : α
  $\Leftrightarrow t = 0$ ou $t = 1$

- Si $f_0(t) = -e^{-1} \Leftrightarrow t = e^{-1}$ alors on a 1 solution pour $f_0(x) = 1 + \frac{1}{e}$ c'est β.

- $f_0(x) = 1 - t\ln t$. Étudions $g(t) = 1 - t\ln t$. $D_g = \mathbb{R}_0^+$

  $g'(t) = -\ln t - 1$. $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{e}$

t	0		e^{-1}		1	δ	α	$+\infty$
$g'(t)$	//	$+$		$-$				
$g(t)$	// 1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	0			$-\infty$

$\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\infty$, $\lim_{t \to 0^+} g(t) = 1$

$g(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = 1 + \frac{1}{e}$

Si $0 < t < \gamma$ $f_0(x) = 1 - t\ln t > 0$ a une seule solution

Si $\gamma < t < \delta$: $f_0(x) = 1 - t\ln t < 0$ (mais $> -\frac{1}{e}$) a 2 solutions

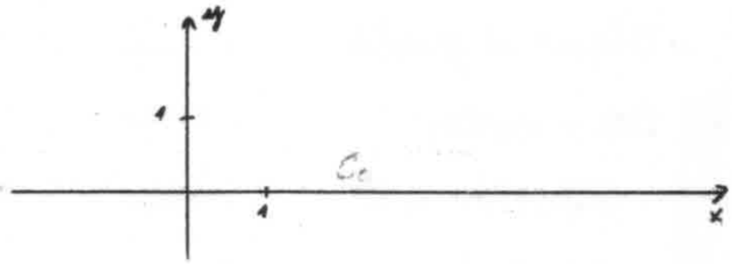
Si $\delta < t$: $f_0(x) = 1 - t\ln t < -\frac{1}{e}$ n'a pas de solutions.

Exercice II.

$g_k(x) = k \cdot x \cdot e^{-kx}$

1. $g_0 = 0 \cdot x \cdot e^{-0 \cdot x}$

$\quad = 0$



2. $D_{g_k} = \mathbb{R}$.

Limites: $\lim\limits_{x \to +\infty} k \cdot x \cdot \underbrace{e^{\overbrace{-kx}^{\to -\infty \text{ car } k>0}}}_{\to 0} = 0$ car $\lim\limits_{y \to +\infty} y \cdot e^{-y} = 0$ ici $y = kx$. A.H. d'éq. $y=0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{k \cdot x}_{-\infty,\ \text{car } k>0} \cdot \underbrace{e^{-kx}}_{\to +\infty \text{ car } k>0} = -\infty$

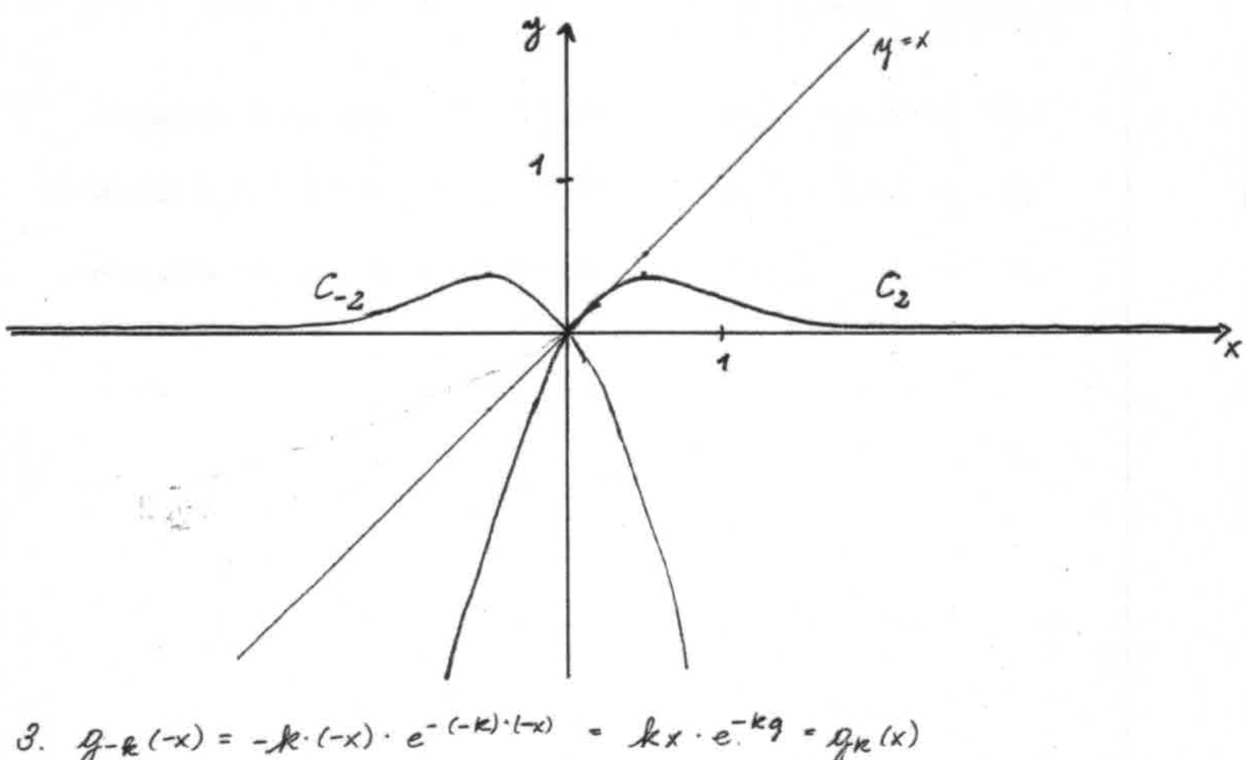
Variations de g_k:

$g_k'(x) = k e^{-kx} - k^2 x e^{-kx}$

$\quad = k \cdot e^{-kx}(1 - kx)$

$g_k'(x) = 0 \iff (1-kx) = 0 \iff x = \frac{1}{k}$.

x	$-\infty$		$1/k$		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-1} (\simeq 0{,}36)$	$\searrow$	0



3. $g_{-k}(-x) = -k \cdot (-x) \cdot e^{-(-k)\cdot(-x)} = kx \cdot e^{-kx} = g_k(x)$

Donc ~~g~~ C_{-k} est le symétrique par rapport à Oy de C_k.

4. Les courbes C_k passent par un même point

$\Leftrightarrow$ $\exists x$ tel que $\forall k_1, k_2$ $k_1 x e^{-k_1 x} = k_2 x e^{-k_2 x}$

$\Leftrightarrow x(k_1 e^{-k_1 x} - k_2 e^{-k_2 x}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\underbrace{k_1 e^{-k_1 x} - k_2 e^{-k_2 x}}_{\text{ne s'annule pas pour un } x \text{ particulier} \to \text{dépend de } k_1 \text{ et } k_2} = 0$

$\frac{\partial}{\partial k} g_k = 0$

$\Leftrightarrow x e^{-kx} - k x^2 e^{-kx}$

Donc le seul point commun de tous les C_k est l'origine $(0;0)$. La tangente en ce point s'écrit alors:

$y - g_k(0) = g'_k(0)(x-0)$

$y = k \cdot x + 0$

$y = k \cdot x.$

5. Pour $k \neq 0$ on cherche $\int g_k(x) dx$.

$\int kxe^{-kx} dx$. On fait une intégration par parties:

$u(x) = x$ $\quad v'(x) = k e^{-kx}$

$u'(x) = 1$ $\quad v(x) = -e^{-kx}$.

On a alors: $\int kxe^{-kx} dx = -xe^{-kx} + \int e^{-kx}$

$= -xe^{-kx} - \frac{e^{-kx}}{k} + C$

$= e^{-kx}(-x - \frac{1}{k}) + C$

$A_k = \int_0^{1/k} g_k(t) dt$

$= \int_0^{1/k} kte^{-kt} dx = e^{-kt}(-t - \frac{1}{k}) \Big]_0^{1/k}$

$= e^{-1}(-\frac{1}{k} - \frac{1}{k}) - e^{-k \cdot 0}(-0 - \frac{1}{k})$

$= -\frac{2}{ke} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}(1 - \frac{2}{e})$

$\lim_{k \to +\infty} A_k = \lim_{k \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} \underbrace{(1 - \frac{2}{e})}_{>0} = 0$

6) $k > 0$, $g_k|_{\mathbb{R}_-}$. g_k est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

Donc ~~...~~ g_k est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]\lim_{x \to -\infty} g_k(x); g_k(0)]$

c'est-à-dire de $]-\infty; 0[$ sur $]-\infty; 0[$

Le graphe de g_2^{-1} est symétrique par rapport à $y = x$ de C_{2g_2}

Exercice III

$g(x) = \frac{1}{1+x}$

1. C.E. $x \neq -1$. D'où $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

g_k est continue sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ comme composée de fonctions continues sur cet intervalle.

g_k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

2. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. et $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

On a $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g(0) = 1$

$g'(1) = -\frac{1}{4}$ et $g'(0) = -1$ $\qquad g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

On veut $P(1) = g(1)$, $P(0) = g(0)$, $P'(1) = g'(1)$ et $P'(0) = g'(0)$.

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c+d = \frac{1}{2} \\ d = 1 \\ 3a+2b+c = -\frac{1}{4} \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-1+1 = \frac{1}{2} \\ d = 1 \\ 3a+2b-1 = -\frac{1}{4} \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{1}{2} & (1) \\ d = 1 \\ 3a+2b = \frac{3}{4} & (2) \\ c = -1 \end{cases}$$

$2\cdot(1) - (2)$: $-a = 1 - \frac{3}{4}$

$a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$

Donc le polynôme cherché est : $P(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$

3. $h(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1 = g(x) - P(x)$

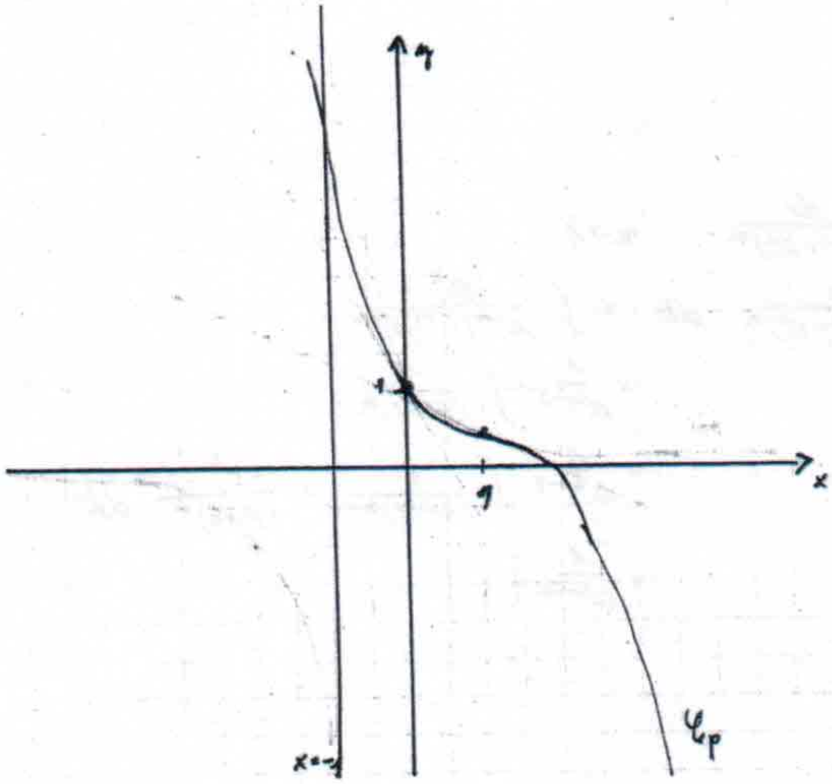
$= \frac{\cancel{4} + x^3 + x^4 - 3x^2 - 3x^3 + \cancel{4x} + 4x^2 - \cancel{4} - \cancel{4x}}{4(1+x)}$

$= \frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4(1+x)} = \frac{(x^2-x)^2}{4(1+x)} = \frac{x^2(x-1)^2}{4(1+x)}$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow 1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow \mathcal{C}_g / \mathcal{C}_P$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_g \cap \mathcal{C}_P \neq \emptyset$ en $x = 0$ et en $x = 1$

$h(x) < 0 \Leftrightarrow 1+x < 0 \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow \mathcal{C}_P / \mathcal{C}_g$



4.

5. $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$\int_0^1 \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1\,dx = \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{12}x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1$

$= -\frac{1}{16} + \frac{3}{12} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{3}{48} + \frac{12}{48} - \frac{24}{48} + \frac{48}{48} = +\frac{33}{48}$

$= \frac{11}{16}$

6. D'après (4) : $\frac{1}{240} \leq \ln 2 - \frac{11}{16} \leq \frac{1}{120} \Leftrightarrow \frac{1}{240} + \frac{165}{240} \leq \ln 2 \leq \frac{2}{240} + \frac{165}{240}$

$\Leftrightarrow \frac{166}{240} \leq \ln 2 \leq \frac{167}{240}$

$\Rightarrow n = 166$

Exercice IV

1. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad n > 1.$

$$I_n \underset{x=at}{=} \int \frac{a}{(a^2t^2+a^2)^n}\, dt = \int \frac{a^2}{a^{2n}(t^2+1)^n}$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \int \frac{1}{(t^2+1)^n}$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \int \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{-t^2}{(t^2+1)^n}\, dt$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \Big[$$

2e session 2004/2005

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Jeudi, le 21 avril 2005
14.30 - 17.30

I. Pout tout $n \in IN^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}$.

1) Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et le sens de variation de f_n.

2) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $J_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$.

a) Calculer $J_1(x)$ après avoir justifié l'existence de $J_n(x)$.

Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $J_{n+1}(x) = \dfrac{-(\ln x)^{n+1}}{x} + (n+1) \cdot J_n(x)$.

En déduire $J_2(x)$.

b) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre les courbes représentatives de f_1 et f_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$ dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

c) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $0 \le J_n(e) \le 1$.

(6 points)

II. 1) Soit T_α la tangente en le réel α au graphe de la fonction exponentielle.

Démontrer que la droite T_α est tangente au graphe de la fonction logarithme népérien si et seulement si $(\alpha - 1) \cdot e^\alpha - \alpha - 1 = 0$.

2) On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1) \cdot e^x - x - 1$.

a) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans IR, que l'on notera β et que $f(\beta) = -\beta - e^\beta$ et $\beta > 0$.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, que l'une des solutions, notée a, appartient à l'intervalle I = [-2 ; -1] et que l'autre solution vaut $-a$.

Q1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$f_n = x \longmapsto \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

C.E. 1) $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

2) $x > 0$

$\text{dom } f_n =]0 ; +\infty[$

1) $$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^n}{x^2 \to 0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

A.V. $\equiv x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{n (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \frac{n}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^{n-1}}{x^2}$$

$$\overset{H}{=} \frac{n}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{(n-1) \ln^{n-2}(x) \frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \frac{n!}{2^n} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0$$

A.H. : $h \equiv y = 0$ (en $+\infty$)

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt = \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,dt$

$f_n(t)$ est continue sur $]0 ; +\infty[$

$\hookrightarrow$ f_n est primitivable sur $]0 ; +\infty[$

ainsi $\forall x \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

on a que $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$ est bien défini

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt \qquad \begin{matrix} \ln t & t^2 \\ \frac{1}{t} & \frac{t^3}{3} \end{matrix}$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{3}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} \ln t\right]_1^x - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^x$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$\mathcal{I}_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{(\ln t)^{n+1}}{t^2}\,dt \qquad (\ln t)^{n+1} \qquad \frac{1}{t^2} = t^{-2}$$

$$(n+1)(\ln t)^n \frac{1}{t} \qquad -t^{-1}$$

$$= \left[-\frac{(\ln t)^{n+1}}{t}\right]_1^x + (n+1)\int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,dt$$

$$= -\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} + (n+1)\,\mathcal{I}_n(x)$$

Ainsi $\mathcal{I}_2(x) = \mathcal{I}_{1+1}(x) = -\frac{\ln^2(x)}{x} + 2\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{2}{9}x^3$

b) $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} \geq \frac{\ln^2 x}{x^2} = f_2(x)$

$\Leftrightarrow \ln x\,(\ln x - 1) \geq 0$

		1		e	
$\ln x$	−	0	+		+
$\ln x - 1$	−		−	0	+
	+	0	−	0	+

ainsi sur $[1;e]$ $f_1 \geq f_2$ et $[e;e^2]$ $f_2 \geq f_1$

$$\mathcal{A} = \int_1^e f_1(x) - f_2(x)\,dx + \int_e^{e^2} f_2(x) - f_1(x)\,dx$$

$$= \mathcal{I}_1(e) - \mathcal{I}_2(e) + \int_e^{e^2} f_2(x)\,dx - \int_e^{e^2} f_1(x)\,dx$$

$y = \frac{x}{e}$, $dx = e\,dy$

$$= \mathcal{I}_1(e) - \mathcal{I}_2(e) + e\int_1^e f_2(y)\,dy - e\int_1^e f_1(y)\,dy$$

$$= \mathcal{I}_1(e) - \mathcal{I}_2(e) + e\,\mathcal{I}_2(e) - e\,\mathcal{I}_1(e)$$

$$= (1-e)\,\mathcal{I}_1(e) + (e-1)\,\mathcal{I}_2(e) = (1-e)\left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9}\right) + 2(e-1)\left(-\frac{1}{e} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9}\right) \text{ u.a}$$

$$= 5 \cdot \ldots \text{ cm}^2$$

c) $\mathcal{I}_n(e) = \int_1^e f_n(t)\,dt$

$f_n(1) = 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e^2}$ f_n est $\nearrow$, ainsi

ainsi $\int_1^e 0\,dt \leq \mathcal{I}_n(e) \leq \frac{1}{e^2}[t]_1^e$

$$0 \leq \mathcal{I}_n(e) \leq \frac{e-1}{e^2} \leq \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \leq 1$$

Q2

1) T_α : tangente en (α, e^α)

équation : $T_\alpha = y = e^\alpha(x-\alpha) + e^\alpha$

$= e^\alpha x + e^\alpha(1-\alpha)$

tangente à $\ln x$: $T_{x_0} = y = \frac{1}{x_0}(x-x_0) + \ln x_0 = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0$ avec $x_0 > 0$

$T_{x_0} = T_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = \frac{1}{x_0} & x_0 > 0 \\ e^\alpha(1-\alpha) = \ln x_0 - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^\alpha(1-\alpha) = -\alpha - 1$

$\Leftrightarrow (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1 = 0$

2) Posons $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$

$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$

$\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R}$

a) $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1$

$= xe^x - 1$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) \overset{\text{⊕}}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}}\right) - 1$

$= -1$

variation de f' :

$f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x		-1		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$		
$f'(x)$	$-1 \searrow$	$(-1, -\frac{1}{e}-1)$	$\nearrow$	$f'(0) = -1$	$\nearrow +\infty$

ainsi $f' < 0$ sur $]-\infty; 0[$

et $f' \nearrow$ sur $]0; +\infty[$ avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

par les TVI, il doit y exister un seul $\beta > 0$

tq $f'(\beta) = 0$.

$\Leftrightarrow \beta e^\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta e^\beta = 1$

ainsi $f(\beta) = \cancel{\beta e^\beta} - e^\beta - \beta \cancel{-1} = -e^\beta - \beta$.

x	$-\infty$		-2		-1		β		$+\infty$
$f'(x)$				$-$			0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$					$\underbrace{-\beta-e^{\beta}}_{<0}$	$\nearrow$	$+\infty$

de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\beta)<0$ $\Rightarrow$ une seule racine dans $]\beta; +\infty[$

$f \searrow$ sur $]-\infty; \beta[$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\beta)<0$ $\Rightarrow$ une racine dans cet intervalle

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x - x - 1 = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x-1)}_{\to-\infty}\left[\underbrace{e^x}_{\to 0} - \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to 0}\right]$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)e^x - x - 1 = \text{---}$$

$$= +\infty$$

$$f(-2) = -3e^{-2}+1 \approx 0,59 > 0$$

$$f(-1) = -2e^{-1} < 0$$

or $f \searrow$ sur $[-2;-1]$, il s'ensuit que (par le TVI) qu'il existe $a \in [-2;-1]$ tq $f(a)=0$

$$\Leftrightarrow (a-1)e^a - a - 1 = 0 \quad | \cdot e^{-a}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)e^0 - (a+1)e^{-a} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a-1)e^{-a} - (-a) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(-a) = 0$$

Ainsi l'autre solution

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse

Vendredi, le 18 novembre 2005
15h-18h

I. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{1-x}}$.

1) Étudier f :

a) limites de f aux bornes de l'ensemble de définition,

OK

b) dérivabilité de f en 0, sens de variation de f, tableau de variation,

c) courbe représentative de f.

2) Soient p et q des nombres rationnels tels que $p>1$ et $p+q+1=0$.

Démontrer que pour tout réel $x\in]0;1[$,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{1}{pq}(x+q)x^{p}(1-x)^{q}-\frac{1+2q}{pq}$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt$.

(5 points)

II. On considère la fonction h_a définie par $h_a(x)=(x-a)^{ax}$ $\quad(a\in\mathbb{R}^*)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de h_a.

2) Montrer qu'on peut prolonger h_a par continuité en a, soit f_a ce prolongement.

3) Étudier les éventuelles branches infinies de f_a.

4) Étudier la dérivabilité de f_a en a.

5) Pour $a>0$, étudier les variations de f_a et esquisser l'allure des courbes représentatives des f_a.

(8 points)

III. Soit $J_n = \int_a^x (\tan t)^n \, dt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec $\cos t \neq 0$ pour $t \in [a, x]$.

1) Calculer J_1 et J_2.

2) Pour $n \geq 3$, calculer $J_n + J_{n-2}$. En déduire J_5.

(4 points)

IV. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels m et p la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + px^2 + x + 1} + mx\sqrt{x+2} \right)$$

(3 points)

Épreuve d'analyse 2005 (novembre)

I. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{1-x}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{(1-x)^{13}}}$ sur $]-\infty;1[$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^4}{(1-x)^{13}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{x^4}{x^{13}(\frac{1}{x}-1)^{13}}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{1}{\underbrace{\underbrace{x^9}_{-\infty}\underbrace{(\frac{1}{x}-1)^{13}}_{-1}}_{+\infty}}} = 0$$

Donc le graphe de $f(x)$ admet une A.H. d'équation $y=0$.

$\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt[3]{\dfrac{x^4 \to 1}{\underbrace{(1-x)^{13}}_{\to 0^+}}} = +\infty$

Donc le graphe de $f(x)$ admet une A.V. d'équation $x=1$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{x^8}{(1-x)^{26}}}}\cdot\dfrac{4x^3(1-x)^{13}+x^4(1-x)^{12}\cdot13}{(1-x)^{26}}$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{x^2}}\;\frac{(1-x)^8}{x^2}\;\frac{x^3(1-x)^{12}[4x(1-x)+13x^2]}{(1-x)^{26}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{x^2}}\;\frac{4x-4x^2+13x^2}{(1-x)^6}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(1-x)^2}{x^2}}\;\frac{x(4+9x)}{(1-x)^6}$$ définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;1[$.

dérivabilité en 0:

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

$$= \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} = 0$$

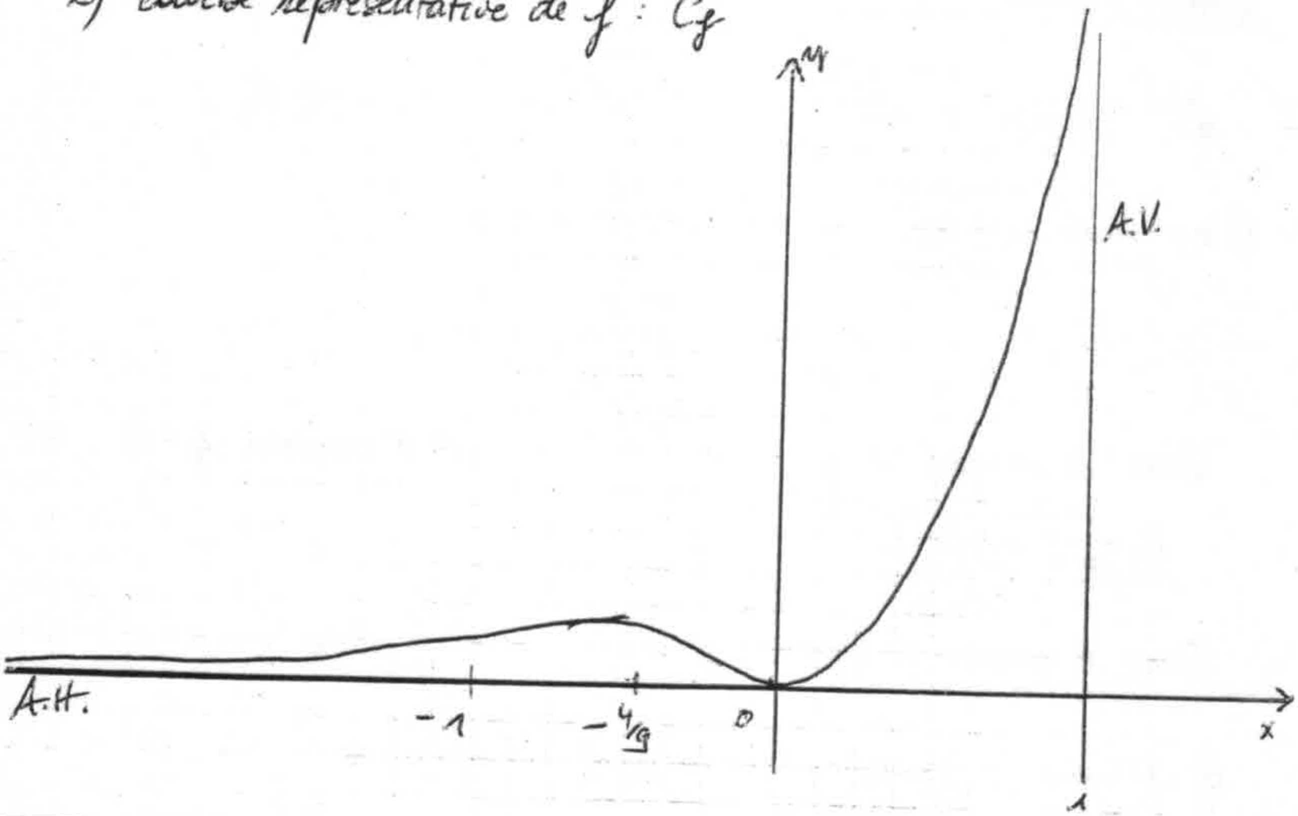
Donc $f(x)$ est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Sens de variation:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{4}{9}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{9}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	Max $f(-\frac{4}{9}) \approx 0{,}065$	$\searrow$	Min $f(0)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

c) courbe représentative de f : C_f



2) $\left(\frac{1}{pq}(x+q)\,x^{p}(1-x)^{q} - \frac{1+2q}{pq}\right)' = \frac{1}{pq}\Big(x^{p}(1-x)^{q} + p(x+q)x^{p-1}(1-x)^{q}$
$\qquad - q(x+q)x^{p}(1-x)^{q-1}\Big)$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big(x(1-x) + p(x+q)(1-x) - q(x+q)x\big)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big(x - x^2 + (px+pq)(1-x) - qx^2 + q^2x\big)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big(x - x^2 + px - px^2 + pq - pqx - qx^2 + q^2x\big)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big(pq + x(1+p-q^2-pq) + x^2(\underbrace{-p-q-1}_{=0})\big)\right.$

$= \frac{1}{pq}\left[x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big(pq + x^2 + x(\underbrace{\underbrace{1+p}_{=-q} - q(q+p)}_{q(\underbrace{-1-q-p}_{0})})\big)\right.$

$= x^{p-1}(1-x)^{q-1}$

$= x^{p-1}(1-x)^{q-1}$

puisque $f(x) = x^{\frac{4}{3}}\cdot(1-x)^{-\frac{13}{3}}$ on a $p=\frac{7}{3}$ et $q=-\frac{10}{3}$

et $\lim\limits_{x\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{-\frac{70}{9}}\cdot\left(x-\frac{10}{3}\right)x^{\frac{7}{3}}(1-x)^{-\frac{10}{3}} - \frac{1-\frac{20}{3}}{-\frac{70}{9}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} -\frac{9}{70}\underbrace{\left(x-\frac{10}{3}\right)}_{\text{fini}}\underbrace{x^{\frac{7}{3}}}_{1}\underbrace{(1-x)^{-\frac{10}{3}}}_{+\infty} + \underbrace{\frac{17}{3}\cdot\left(-\frac{9}{70}\right)}_{-\frac{51}{70}}$

$= \cancel{\frac{51}{70}}$ $= +\infty$

I 1) $\forall x \in]-\infty;+1[\qquad f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^4}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{(1-x)}} = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{(1-x)^{13}}}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad$ A.H.G. : $y=0 \qquad \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty \quad$ A.V. : $x=1$

b) f est continue sur $]-\infty;1[$

f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ et pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;1[$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{(1-x)^{13}}\right)^2}}\cdot\frac{4x^3(1-x)^{13}+13x^4(1-x)^{12}}{(1-x)^{26}} = \frac{x^3(1-x)^{12}(9x+4)}{3\frac{x^2}{(1-x)^8}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(1-x)^2}}(1-x)^{26}} = \frac{x\cdot(9x+4)\sqrt[3]{(1-x)^2}}{3\cdot(1-x)^6\sqrt[3]{x^2}}$$

2

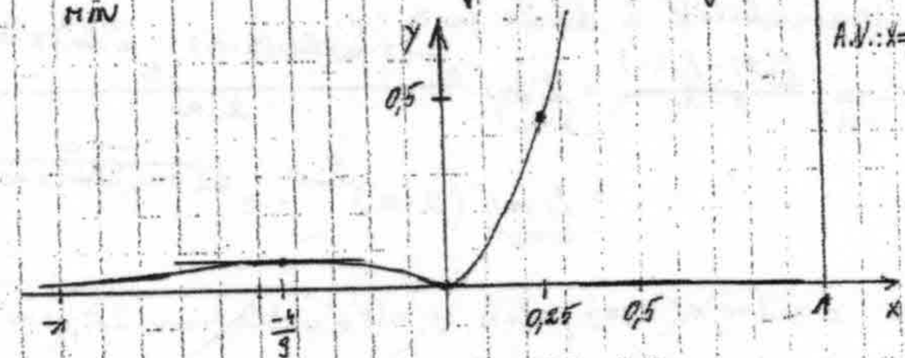
dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\dfrac{x}{(1-x)^{13}}} = 0$ donc $f'(0)=0$.

x	$-\infty$		$\frac{-4}{9}$		0		1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	‖
f	0	↗	MAX local	↘	0 MIN	↗	$+\infty$ ‖

$f\left(\frac{-4}{9}\right) \approx 0{,}069$

$f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}45 \; ; \; f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$

c)



2) L'intégrale existe pour tout $x\in]0;1[$ puisque $t \longmapsto t^{p-1}\cdot(1-t)^{q-1}$ est continue sur $]0;1[$.

Pour $x=\frac{1}{2}$, l'égalité est vérifiée. En effet $\dfrac{1}{pq}\left(\frac{1}{2}+q\right)\left(\frac{1}{2}\right)^p\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^q - \dfrac{1+2q}{pq}$

$= \dfrac{1}{pq}\cdot\left(\frac{1}{2}+q\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q} - \dfrac{1+2q}{pq} = \dfrac{1}{pq}\left(\frac{1}{2}+q\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \dfrac{1+2q}{pq} \overset{!}{=} 0$ (car $p+q=-1$).

Reste à montrer que les deux membres de l'égalité ont la même dérivée :

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\right)' = x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}$$

$$\left(\frac{1}{pq}(x+q)x^p\cdot(1-x)^q - \frac{1+2q}{pq}\right)' = \frac{1}{pq}\left[x^p\cdot(1-x)^q + p(x+q)x^{p-1}(1-x)^q - q(x+q)x^p(1-x)^{q-1}\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\cdot\left[x\cdot(1-x) + p(x+q)(1-x) - q(x+q)x\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[x - x^2 + px + pq - px^2 - pqx - qx^2 - q^2x\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[pq + (\underbrace{1+p}_{-q} - pq - q^2)x - \underbrace{(1+p+q)}_{0}x^2\right]$$

$$= \frac{1}{pq}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\left[pq - q\underbrace{(1+p+q)}_{0}x\right] \overset{!}{=} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}$$

$\forall x\in]0;1[\,,\; f(x) = x^{\frac{4}{3}}\cdot(1-x)^{-\frac{13}{3}}$

Pour $p=\frac{7}{3}$ et $q=\frac{-10}{3}$ on a : $\lim \displaystyle\int^x f(t)\,dt = \lim\left[\frac{-9}{70}\cdot\left(x-\frac{10}{3}\right)x^{\frac{7}{3}}(1-x)^{\frac{-10}{3}} - \frac{51}{70}\right] = +\infty$

II

$f_a(x) = (x-a)^{ax} = e^{ax\ln(x-a)}$, $a \in \mathbb{R}^*$

1) $D =]a, +\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to a^+} f_a(x) = \lim\limits_{x\to a^+} e^{\overbrace{a(x-a)\ln(x-a)}^{\to 0}} \cdot e^{\overbrace{a^2\ln(x-a)}^{\to -\infty}} = 1 \cdot 0 = 0$

on prolonge f_a par continuité en $x=a$ en posant $f_a(a)=0$

3) comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x-a) = +\infty$, on obtient

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ si $a>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$ si $a<0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \cdot e^{x(a\ln(x-a)-1)} = +\infty$ avec $a>0$

BP de direction (oy) si $a>0$ et AH : $y=0$ si $a<0$

4) f_a dérivable sur $]a, +\infty[$

dérivabilité à droite en a :

$\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f_a(x)-f_a(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{e^{a(x-a)\ln(x-a)} \cdot e^{a^2\ln(x-a)}}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{a^2-1} \cdot e^{\overbrace{a(x-a)\ln(x-a)}^{\to 0}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a^2-1>0 \\ 1 & \text{si } a^2-1=0 \\ +\infty & \text{si } a^2-1<0 \end{cases}$

si $a \in]-1,1[\setminus\{0\}$, alors f dérivable sur $]a, +\infty[$

si $a \notin]-1,1[$, alors f dérivable sur $[a, +\infty[$

5) $f_a'(x) = a\, f_a(x)\left(\ln(x-a) + \frac{x}{x-a}\right)$???

posons $g_a(x) = \ln(x-a) + \frac{x}{x-a}$, le signe de $f_a'(x)$ est celui de $a\,g_a(x)$

$g_a'(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{x-a-x}{(x-a)^2} = \frac{x-2a}{(x-a)^2}$ du signe de $x-2a$

II. $h_a(x) = (x-a)^{ax}$

puisque ax est réel, on sait calculer $h_a(x)$ seulement si on l'écrit $h_a(x) = e^{ax\ln(x-a)}$.

1) h_a est défini $\Rightarrow$ $\cancel{x}-a > 0$

$$x > a$$

$D_{h_a} =]a;+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to a} e^{\overbrace{\underbrace{ax}_{\to a^2}\underbrace{\ln(x-a)}_{\to-\infty}}^{\to-\infty}} = \lim\limits_{x\to a} e^{\overbrace{a(x-a)\ln(x-a)}^{=0}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^{\overbrace{a^2\ln(x-a)}^{-\infty}}}_{0} = 0$ $\quad \to 0$

On peut prolonger $h_a(x)$ en a en posant $h_a(a) = 0$.

$$f_a(x) = \begin{cases} h_a(x) & \text{si } x \in]+a;+\infty[\\ 0 & \text{si } x = +a. \end{cases}$$

3) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln(x-a) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. si $a>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{ax\ln(x-a)}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \cdot e^{x(a\ln(x-a)-1)} = +\infty$ si $a>0$

B.P. de direction Oy si $a>0$ et A.H. d'éq. $y=0$ si $a<0$.

4) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{e^{ax\ln(x-a)}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{ax-1}$

$\cancel{= \lim\limits_{x\to a^+} (x-a)^{a^2-1}}$ $\begin{cases} a^2-1>0 & 0 \\ a^2-1=0 & 1 \\ a^2-1<0 & +\infty \end{cases}$

si $a \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ f_a est dérivable en a. et $f'_a(a) = 0$

$f'_a(a) = 1$

si $a \in]-1;1[$ f n'est pas dérivable

si $a \in \{-1;1\}$ f_a est dérivable en a.

5) $f'_a(x) = e^{ax\ln(x-a)} \cdot \left(a\ln(x-a) + ax\cdot\frac{1}{x-a}\right)$

$$= (x-a)^{ax} \cdot \left(a\ln(x-a) + ax\,\frac{1}{x-a}\right)$$

$$= \frac{(x-a)^{ax} \cdot (a\cdot(x-a)\ln(x-a) + ax)}{x-a}$$

le signe de $f'_a(x)$ est celui de $a\ln(x-a) + \frac{ax}{x-a}$. $(= g_a(x))$

$$g'_a(x) = \frac{a}{x-a} + a\,\frac{(x-a)-ax}{(x-a)^2}$$

$$= a\,\frac{(x-a-a)}{(x-a)^2}$$

$$= a\,\frac{x-2a}{(x-a)^2}$$

$\boxed{a > 0}$

x	a		$2a$		$+\infty$
$g'_a(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$2+\ln a$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to a^+} \ln(x-a)+\frac{x}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{\overbrace{(x-a)\ln(x-a)+x}^{\to a>0}}{\underbrace{x-a}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^+} \ln(x-a)+\frac{x}{x-a} = +\infty$$

$2+\ln a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{e^2}$; $2+\ln a < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{e^2}$

$0 < a < \frac{1}{e^2}$

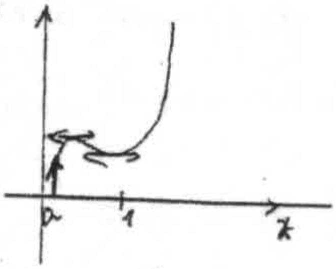
x	a	α	$2a$	β	$+\infty$
$g'_a(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	‖ $+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $2+\ln a<0$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$
$f'_a(x)$	$+\infty$ $+$	0	$-$	0	$+$
$f_a(x)$	0 $\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$

$a = \frac{1}{e^2}$

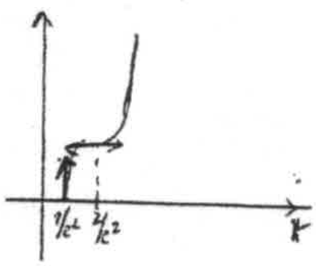
x	a		$\frac{2}{e^2}$		$+\infty$
$g'_a(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'_a(x)$	$+\infty$	$+$	0	$+$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$a > \frac{1}{e^2}$

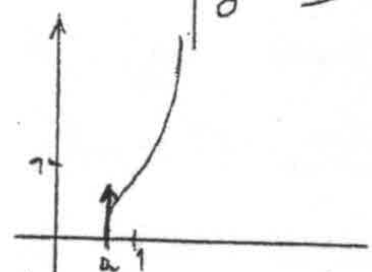
x	a		$2a$		$+\infty$
$g'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$g_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\ln a>0$	$\nearrow$	$+\infty$
	$+\infty$ si $a<\frac{1}{e^2}$; 1 si $a=1$; 0 si $a>1$		$+$		
	0		$\nearrow$		$+\infty$



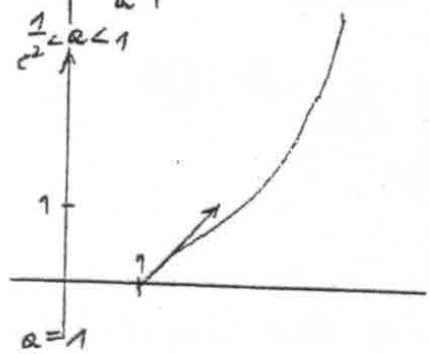
$0 < a < \frac{1}{e^2}$



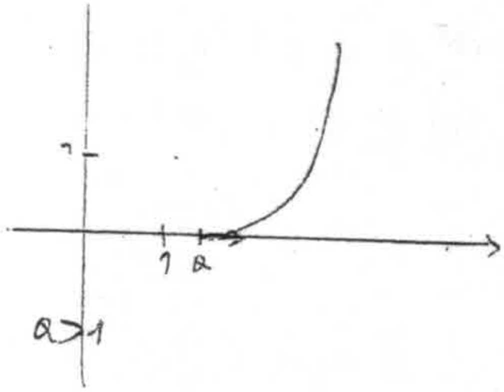
$a = \frac{1}{e^2}$



$\frac{1}{e^2} < a < 1$



$a = 1$



$a > 1$

II 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c} + mx\sqrt{x+2}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x\sqrt{x}}_{\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} + m\sqrt{1+\frac{2}{x}}}_{\to 1+m}\right)$$

pour $m=-1$: $\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{2}{x}}$

$$= \frac{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}\left(\frac{a-2}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}\right)}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a-2)\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{x}}+\frac{c}{x\sqrt{x}}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}_{\to 2}}$$

m		$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+ax^2+bx+c}+mx\sqrt{x+2}\right)$
<-1		$-\infty$
$=-1$	$a<2$	$-\infty$
	$a=2$	0
	$a>2$	$+\infty$
>-1		$+\infty$

III 1) $J_1 = \int_a^x \tan t \, dt = -\int_a^x \frac{-\sin t}{\cos t}\, dt = -\left[\ln|\cos t|\right]_a^x = \ln\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right|.$

$J_2 = \int_a^x \tan^2 t\, dt = \int_a^x \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \int_a^x\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt = \tan x - \tan a - (x-a).$

2) Pour $n \geq 2$, $J_n + J_{n-2} = \int_a^x \left(\tan^n t + \tan^{n-2} t\right) dt$

$$= \int_a^x \left(\tan^{n-2} t\right)\cdot\left(1+\tan^2 t\right) dt$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\tan^{n-1} t\right]_a^x .$$

D'où $J_5 = \frac{1}{4}\cdot\left[\tan^4 t\right]_a^x - J_3 = \frac{1}{4}\cdot\left[\tan^4 t\right]_a^x - \frac{1}{2}\left[\tan^2 t\right]_a^x + J_1$

$$= \frac{1}{4}\left(\tan^4 x - \tan^4 a\right) - \frac{1}{2}\left(\tan^2 x - \tan^2 a\right) + \ln\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right| .$$

III. $J_n = \int_a^x (\tan t)^n\, dt \quad n \in \mathbb{N}^*$

1) $J_1 = \int_a^x \tan t\, dt$

$= \int_a^x \frac{\sin t}{\cos t}\, dt$

$= -[\ln|\cos t|\,]_a^x$

$= -\ln|\cos x| + \ln|\cos a|$

$= \ln \frac{|\cos a|}{|\cos x|}$

$J_2 = \int_a^x (\tan t)^2\, dt$

$= \int_a^x \tan^2 t + 1 - 1\, dt$

$= [\tan t - t\,]_a^x$

$= \tan x - \tan a - x + a$

ou bien : $J_2 = \int_a^x \tan^2 t\, dt$

$= \int_a^x \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{\cos^2 x}\, dt$

$= \int_a^x \frac{1}{\cos^2 t} - 1\, dt$

$= \tan t - t\,]_a^x$

2) $J_n + J_{n-2} = \int_a^x [(\tan t)^n + (\tan t)^{n-2}]\, dt$

$= \int_a^x (\tan t)^{n-2}((\tan t)^2 + 1)\, dt$

$= \frac{1}{n-1}[(\tan t)^{n-1}\,]_a^x$

D'où $J_5 = \frac{1}{4}[(\tan t)^4]_a^x - J_3$

$= \frac{1}{4}[(\tan t)^4]_a^x - \frac{1}{2}[(\tan t)^2]_a^x + J_1$

$= \frac{1}{4}[(\tan t)^4]_a^x - \frac{1}{2}[(\tan t)^2]_a^x + \ln\frac{|\cos a|}{|\cos x|}$

$= \frac{1}{4}((\tan x)^4 - \tan^4 a) - \frac{1}{2}(\tan^2 x - \tan^2 a) + \ln\frac{|\cos a|}{|\cos x|}$

$$\text{IV. } \lim_{x\to+\infty} \Big(\overbrace{\sqrt{x^3+px^2+x+1} + mx\sqrt{x+2}}^{k(x)}\Big)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Big(x^{3/2}\Big(\sqrt{1+p\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{1}{x^3}} + m\sqrt{1+\tfrac{2}{x}}\Big)\Big)$$

si $m > -1$ alors $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

si $m = -1$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\sqrt{x^3+px^2+x+1} - x\sqrt{x+2}\Big)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+px^2+x+1-x^3-2x^2}{x^{3/2}\Big(\sqrt{1+\frac{p}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}\Big)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(p-2)x^2+x+1}{\cdots}$$

si $p>2$ $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

$p=2$ $\lim_{x\to+\infty} k(x) = 0$

$p<2$ $\lim_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$

si $m<-1$ $\lim_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$

Tableau récapitulatif

m		$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^3+px^2+x+1} + mx\sqrt{x+2}$
$m > -1$		$+\infty$
$m = -1$		
	$p>2$	$+\infty$
	$p=2$	0
	$p<1$	$-\infty$
$m<-1$		$-\infty$

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Mercredi, le 25 avril 2006
15h-18h

même concours que mai 2006

I. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) Etudiez la continuité et la dérivabilité de f.

2) Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - x}{\ln x}$ et étudiez l'existence d'asymptotes au graphe cartésien de f.

3) Etudiez le sens de variation de f et représentez f dans un repère orthonormé.

4) Démontrez que f possède une application réciproque f^{-1} définie sur un ensemble J à déterminer. Etudiez la dérivabilité de f^{-1}. Calculez $(f^{-1})'(1)$. **5 points**

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$.

1) Etudiez f (limites ; dérivabilité en 0 ; sens de variation ; concavité ; points d'inflexion éventuels ; courbe représentative G_f).

2) Utilisez le théorème de l'inégalité des accroissements finis, pour encadrer f sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$ par des fonctions affines. Encadrez $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$ à 0,025 près. **4 points**

sauf ici plus de détails en mai

III. Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = \sqrt{mx^2 + x + 1}$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminez l'ensemble de définition D_m suivant les valeurs du paramètre réel m.

2) Déterminez l'ensemble des points communs à toutes les courbes C_m ($m \in \mathbb{R}$).

3) Démontrez que pour chaque réel non nul m, la courbe C_m admet un axe de symétrie.

4) Déterminez les équations des asymptotes obliques éventuelles. **6 points**

IV. Calculez les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{5-2x}}\,dx \qquad C = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\,dx$$

$$B = \int_{1}^{2} \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx \qquad D = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)\,dx$$

5 points

Concours de recrutement
Mathématiques

<u>Épreuve d'analyse</u>
Mercredi, le 3 mai 2006
15h-18h

I. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1) Etudiez la continuité et la dérivabilité de f.

2) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{\ln x}$ et étudiez l'existence d'asymptotes au graphe cartésien de f.

3) Etudiez le sens de variation de f et représentez f dans un repère orthonormé.

4) Démontrez que f possède une application réciproque f^{-1} définie sur un ensemble J à déterminer. Etudiez la dérivabilité de f^{-1}. Calculez $(f^{-1})'(1)$.

<u>5 points</u>

II. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x}$.

1) Etudiez f (limites ; dérivabilité en 0 ; sens de variation ; concavité ; points d'inflexion éventuels ; courbe représentative G_f).

2) A l'aide du théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrez que pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, $\dfrac{-1}{2e}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\le f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$. Encadrez $\mathrm{I}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,dx$ à 0,025 près.

<u>4 points</u>

III. Pour chaque valeur du paramètre réel m, on considère la fonction f_m définie par $f_m(x)=\sqrt{mx^2+x+1}$ et sa courbe représentative C_m dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminez l'ensemble de définition D_m suivant les valeurs du paramètre réel m.

2) Déterminez l'ensemble des points communs à toutes les courbes C_m $(m\in\mathbb{R})$.

3) Démontrez que pour chaque réel non nul m, la courbe C_m admet un axe de symétrie.

4) Déterminez les équations des asymptotes obliques éventuelles.

<u>6 points</u>

IV. Calculez les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

$$\mathrm{A}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{(x-1)^3}{\sqrt{5-2x}}\,dx \qquad \mathrm{C}=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx$$

$$\mathrm{B}=\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\,dx \qquad \mathrm{D}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)\,dx$$

<u>5 points</u>

I $\quad f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R}_+$

1) f est continue sur $]0;+\infty[$, comme composée et produit de fonctions continues

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\overbrace{(1+\frac{1}{x})\cdot \ln x}^{\to -\infty}} = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\overbrace{\frac{1}{x}\cdot \ln x}^{\to -\infty}} = 0$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\overbrace{(1+\frac{1}{x})}^{\to 1}\cdot \overbrace{\ln x}^{\to+\infty}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\overbrace{\frac{\ln x}{x}}^{\to 0}} = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}, \quad \dfrac{f(x)-x}{\ln x} = \dfrac{x^{1+\frac{1}{x}} - x}{\ln x} = \dfrac{x\left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x} = \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{\ln x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)-x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{Y\to 0} \dfrac{e^Y - 1}{Y} = 1 \quad$ (H) $\quad \lim \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)'} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(H)}{x}$ ... $\lim (f(x) - x)$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{f(x)-x}{\ln x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to+\infty} = +\infty$, B.P. dans la dir. de la droite d'éq. $Y = X$.

3) $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\cdot \ln x} \cdot \left[\dfrac{-1}{x^2}\cdot \ln x + \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot \dfrac{1}{x}\right]$

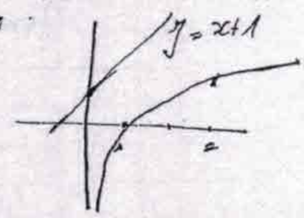
$g(x) = x+1-\ln x$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$

x	0	1	$+\infty$
g'	$-$		$+$
g	$\searrow$	2	$\nearrow$

$= \underbrace{e^{(1+\frac{1}{x})\cdot \ln x}}_{>0} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{>0} \cdot \underbrace{(x+1-\ln x)}_{>0\ *_1} > 0$

donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.



$*_1$ En effet :

ainsi $g>0$.

$g(x) = x+1-\ln x$

$\text{dom } g =]0;+\infty[$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1	
g'		$-$	0	$+$
g		$\searrow$	2	$\nearrow$
			MIN	

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$

$f(0) = 0$

4) $f \nearrow$ croissante et continue $\rightarrow$ bijective de $]0;+\infty[$ dans $f(]0;+\infty[) =]0;$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = +\infty$

II

1) $f(x) = \sqrt{x}\cdot e^{-x}$

f est continue sur $\mathrm{dom}\, f = [0 ; +\infty[$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} + \sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot(-1) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{-x}$$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot 2\sqrt{x} - (1-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} e^{-x} + \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{-x}\cdot(-1)$$

$$= \frac{-4x - 1 + \cancel{2x} - \cancel{2x} + 4x^2}{4x\sqrt{x}} e^{-x}$$

$$= \frac{4x^2-4x-1}{4x\sqrt{x}} e^{-x}$$

$\Delta = 32 \qquad x_1 = \dfrac{4+4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$x_2 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < 0$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $\approx 1{,}2$		$+\infty$
f''	‖	$-$		$-$	0	$+$	
f'	‖	$+$	0	↘		↗	
f	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	↘		↘	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ A.H. $y=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ demi-tangente verticale

f n'est pas dérivable en 0

2) a) f' est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$,

donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $\quad \underset{\displaystyle \frac{-1}{2e}}{\underset{\shortparallel}{f'(1)}} \leq f'(x) \leq \underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{f'\left(\tfrac{1}{2}\right)}}$

Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$,

f est continue sur $\left[\frac{1}{2} ; x\right]$

f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2} ; x\right[$

pour tout $t \in \left]\frac{1}{2} ; x\right[$, $\quad \frac{-1}{2e} \leq f'(t) \leq 0$.

Donc, par le théorème de l'inégalité des accroissements finis,

$$\frac{-1}{2e} \leq \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2e}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2e}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

b) D'où : $\left[\frac{-1}{4e}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2e}}\, x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \leq \left[\frac{1}{\sqrt{2e}}\, x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$$0{,}190 \leq \underbrace{\frac{-1}{16e}}_{\approx -0{,}02299} + \frac{1}{2\sqrt{2e}} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2e}}}_{\approx 0{,}21444} \leq 0{,}215$$

3) Si $m=0$, $D_0 = [-1, +\infty[$ et C_0 n'admet pas d'axe de symétrie vertical.

Si $m \neq 0$, posons $g_m(x) = mx^2 + x + 1$. La courbe représentative de g_m est une parabole ayant comme axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-1}{2m}$.

Or pour tout $m \neq 0$, D_m est symétrique par rapport à $\frac{-1}{2m}$

Si $\frac{-1}{2m} + x \in D_m$, alors $\frac{-1}{2m} - x \in D_m$ et

$$f_m\left(\frac{-1}{2m} + x\right) = \sqrt{g_m\left(\frac{-1}{2m} + x\right)} = \sqrt{g_m\left(\frac{-1}{2m} - x\right)} = f_m\left(\frac{-1}{2m} - x\right).$$

Par conséquent, C_m est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-1}{2m}$, si $m \neq 0$.

4) Si $m = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to +\infty}} = 0$$

B.P. dans la direction de l'axe des x si $x \to +\infty$.

Si $m > 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{mx^2 + x + 1} = +\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{m}\,|x|\,\sqrt{1 + \frac{1}{mx} + \frac{1}{mx^2}}}{x} = \begin{cases}\sqrt{m} \\ -\sqrt{m}\end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f_m(x) - \sqrt{m}\,x \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\sqrt{mx^2+x+1}}_{\to +\infty} - \underbrace{\sqrt{m}\,x}_{\to +\infty} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+x+1} + \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{m}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

A.O. : $y = \sqrt{m}\,x + \frac{1}{2\sqrt{m}}$ si $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f_m(x) + \sqrt{m}\,x \right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\underbrace{\sqrt{mx^2+x+1}}_{\to +\infty} + \underbrace{\sqrt{m}\,x}_{\to -\infty} \right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+x+1} - \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{m}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{m}}$$

A.O. : $y = -\sqrt{m}\,x - \frac{1}{2\sqrt{m}}$ si $x \to -\infty$

Si $m < 0$, C_m n'admet pas d'A.O. car $D_m = [x_1 ; x_2]$.

3) $f : x \longrightarrow \sqrt{1-\cos x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc C existe

$$C = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos x}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right| dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left[2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + \left[-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{6}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\sqrt{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2\sqrt{2} = -2+4\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

4) $f : x \longrightarrow (\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc D existe.

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x)\cdot(\cos 3x)\, dx$$

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
- $\sin^2 x \cdot \cos 3x$
  $= \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 3x\cdot\cos 2x$
  $= \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{4}(\cos 5x + \cos x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 5x - \frac{1}{4}\cos x\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{20}\sin 5x - \frac{1}{4}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{20}\sin\frac{5\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{20}\cdot\frac{+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{60}$$

$A = \ldots$ poser $t = 5-2x$

$$B = \int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\, dx - \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}\, dx}_{\text{laisser}}$$

$e^{\frac{1}{x}}$ 1

$e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ x

$= \ldots$

Problème 2

$\forall m \in \mathbb{R}: \quad f_m(x) = \sqrt{mx^2 + x + 1}$

1) Si $\boxed{m=0}$, $f_0(x) = \sqrt{x+1}$

$\rightsquigarrow \mathcal{D}_0 = [-1, +\infty[$

Si $\boxed{m \neq 0}$ $\quad$ C E : $mx^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta = 1 - 4m$

1er cas $\quad \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

on obtient : $(\frac{x}{2} + 1)^2 \geq 0$ toujours vrai

$\mathcal{D}_{\frac{1}{4}} = \mathbb{R}$

2e cas $\quad \Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

$mx^2 + x + 1 \geq 0$ toujours vrai

$\mathcal{D}_m = \mathbb{R}$, si $m > \frac{1}{4}$

3e cas $\quad \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Racines : $\dfrac{-1 - \sqrt{1-4m}}{2m} = x_1$

$\dfrac{-1 + \sqrt{1-4m}}{2m} = x_2$

Si $0 < m < \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
mx^2+x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $m < 0$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
mx^2+x+1		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{D}_m =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$, si $0 < m < \frac{1}{4}$

$\mathcal{D}_m = [x_2, x_1]$, si $m < 0$

2) $y = f_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $y^2 = mx^2 + x + 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y \geq 0$ et $y^2 - x - 1 = mx^2 \;,\; \forall m \in \mathbb{R}$

[illegible] constant en $\forall m$, donc $x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \; y \geq 0$ et $x^2 = 0$ et $y^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \; x = 0$ et $y = 1$

Ainsi $(0, 1)$ est le seul point commun des C_i

3) [illegible]

Nous savons que la parabole d'équation $y = mx^2 + x + 1$ admet comme axe de symétrie la droite $d \equiv x = -\frac{b}{2a}$ [illegible]

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2m} \quad (m \neq 0)$

Il en est de même pour C_m.

4) Vu les domaines on peut supposer $\underline{m > 0}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_m(x) = \lim_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \begin{cases} +\infty : \sqrt{m} \\ -\infty : -\sqrt{m} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f_m(x) - \sqrt{m}\,x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 + x + 1} - \sqrt{m}\,x}{1} \cdot \frac{\sqrt{mx^2 + x + 1} + \sqrt{m}\,x}{\sqrt{mx^2 + x + 1} + \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{mx^2 + x + 1 - mx^2}{\sqrt{mx^2 + x + 1} + \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{m + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{m}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

$$\boxed{\text{A.O.} \equiv y = \sqrt{m}\,x + \frac{1}{2\sqrt{m}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f_m(x) + \sqrt{m}\,x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+x+1} - \sqrt{m}\,x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{m+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{m}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{m}}$$

$$\boxed{\text{A.O } \mathcal{C} \cdot \quad y = -\sqrt{m}\,x - \frac{1}{2\sqrt{m}}}$$

Epreuve d'Analyse (15-18 h, jeudi le 3 mai 2007)

Question 1: (5 points)

Soit h un réel strictement positif.
On pose $x_k = kh$ pour $k = 1,2,3$.

Calculer l'intégrale $I = \int_{-h}^{h} \left| x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \right| dx$.

Question 2 : (12 points)

Soit $\mathcal{C}_\lambda$ le graphe de $f_\lambda : x \mapsto f_\lambda(x) = \lambda e^x + x^2 + 2x + 2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

1) Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x)$.
   Démontrer qu'il existe une fonction g telle que
   $\lim\limits_{x\to-\infty} (f_\lambda(x) - g(x)) = 0$ pour tout réel λ.

2) Calculer $f_\lambda'(x)$.
   Démontrer que $y=f_\lambda(x)$ et $y'=f_\lambda'(x)$ vérifient quel que soit le choix de λ, une relation de la forme F(x,y,y')=0 à déterminer.
   En déduire l'ensemble des points de $\mathcal{C}_\lambda$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3) Calculer $y''=f_\lambda''(x)$.
   En déduire l'ensemble des points d'inflexion de $\mathcal{C}_\lambda$.

4) Etudier le signe de f_λ'. (On ne demande pas de calculer les racines de f_λ'.)

5) Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_\lambda$ et de $\mathcal{C}_{\lambda'}$ avec $\lambda \neq \lambda'$.

6) Etudier les variations de f_λ et esquisser sur un même graphique, les graphes pour $\lambda < -2,\ \lambda = -2,\ -2 < \lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$.

Question 3 : (3 points)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (2x-1)^2$ et $g(x) = \sup\limits_{x \le t \le x+1} f(t)$.

Calculer explicitement g(x).

Q1

$$I = \int_{-h}^{h} |x(x-h)(x-2h)(x-3h)|\, dx \quad \text{avec} \quad h>0$$

Pa (x)

	$]-\infty,-h[$	$]-h,0[$	0	$]0,h[$	h	$]h,2h[$	$2h$	$]2h,3h[$	$3h$	$]3h,+\infty[$
x	$-$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-h$	$-$	$-$		$-$	0					
$x-2h$	$-$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3h$	$-$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	
Pa (x)		$+$	0	$-$						

$$I = \int_{-h}^{0} x(x-h)(x-2h)(x-3h)\, dx - \int_{0}^{h} x(x-h)(x-2h)(x-3h)\, dx$$

$$= \int_{-h}^{0} (x^2 - xh)(x^2 - 5hx + 6h^2)\, dx - \int_{0}^{h} (x^2 - xh)(x^2 - 5hx + 6h^2)\, dx$$

$$= \int_{-h}^{0} x^4 - 5hx^3 + 6h^2x^2 - x^3h + 5h^2x^2 - 6h^3x\, dx$$

$$- \int_{0}^{h} x^4 - 5hx^3 + 6h^2x^2 - x^3h + 5h^2x^2 - 6h^3x\, dx$$

$$= \int_{-h}^{0} x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x\, dx$$

$$- \int_{0}^{h} x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x\, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}hx^4 + \frac{11}{3}h^2x^3 - 3h^3x^2 \right]_{-h}^{0}$$

$$- \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}hx^4 + \frac{11}{3}h^2x^3 - 3h^3x^2 \right]_{0}^{h}$$

$$= -\left(-\frac{h^5}{5} - \frac{3}{2}h \cdot h^4 - \frac{11}{3}h^2h^3 - 3h^3h^2\right) - \frac{h^5}{5} + \frac{3}{2}h\,h^4 - \frac{11}{3}h^2h^3 + 3\ldots$$

$= \ldots h^5 + 6h^5 = 9h^5$

Q2

$f_\alpha(x) = \alpha e^x + x^2 + 2x + 2, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{dom } f_\alpha = \mathbb{R}$

1) $\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\alpha e^x}_{} + \underbrace{x^2 + 2x + 2}_{\to +\infty}$

$\to +\infty$ si $\alpha > 0$
$\Rightarrow 0$ si $\alpha = 0$
$\to -\infty$ si $\alpha < 0$

$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\underbrace{\alpha \frac{e^x}{x^2}}_{} + 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$

$\to +\infty$ si $\alpha > 0$
$= 0$ si $\alpha = 0$
$\to -\infty$ si $\alpha < 0$ (Hospital 2 fois)

$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

Posons $g(x) = x^2 + 2x + 2$,

alors $\lim_{x \to -\infty} (f_\alpha(x) - g(x)) = \lim_{x \to -\infty} \alpha \underbrace{e^x}_{\to 0}$

$= 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\text{dom } f'_\alpha = \text{dom } f_\alpha = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R},$

$f'_\alpha(x) = \alpha e^x + 2x + 2$

fonction de x

$\underbrace{f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) - x^2}_{F(x, y, y')} = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$f_\alpha(x) = y$, $f'_\alpha(x) = y'$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) = 0$ (tangente horizontale $\Leftrightarrow$ // Ox)

$$\Leftrightarrow \quad f_\lambda(x) - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f_\lambda(x) = x^2$$

Il s'agit des points de la forme $(x, f_\lambda(x) = x^2)$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2 > 0$ si $\lambda \geq 0$

si $\lambda \geq 0$, $\mathcal{C}_\lambda$ n'a pas de points d'inflexion

si $\lambda < 0$, $\mathcal{C}_\lambda$ admet le P.I $\left(\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right); f_\lambda\left(\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right)\right)\right)$

4) Posons $g_\lambda(x) = f'_\lambda(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $g_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x + 2$

$g'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$

$\boxed{\text{si } \lambda > 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''_\lambda(x) = g'_\lambda(x)$		$+$	
$f'_\lambda(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

pour $\lambda = 0$, $x_0 = -1$ and $f'_\lambda(x) = 2x+2$

ainsi si on note x_0 l'unique zéro de $f'_\lambda(x)$ on a $f'_\lambda(x) < 0$ sur $]-\infty; x_0[$
et $f'_\lambda(x) > 0$ sur $]x_0; +\infty[$

$\boxed{\text{si } \lambda < 0}$

x			$\ln(-\frac{2}{\lambda})$		
$g'_\lambda(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_\lambda(x) \quad g_\lambda(x)$	$-\infty$	↗	max	↘	$-\infty$

$$g_\lambda\left(\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right)\right) = \lambda\left(-\frac{2}{\lambda}\right) + 2\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right) + 2$$
$$= 2\ln\left(-\frac{2}{\lambda}\right)$$

$f'_\lambda < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'_\lambda(0) = 0 \Leftarrow \quad g_\lambda(\ln(-\frac{2}{\lambda})) = 0$ si $\lambda = -2$

f'_λ admet deux racines x_1 et $x_2 \Leftarrow \quad g_\lambda(\ln(-\frac{2}{\lambda})) > 0$ si $\lambda < -2$

$f'_\lambda < 0$ sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2;+\infty[$ et $f'_\lambda \geq 0$ sur $[x_1,x_2]$

$f'_\lambda < 0$ sur $\mathbb{R} \Leftarrow \quad g_\lambda(\ln(-\frac{2}{\lambda})) < 0$ si $\lambda \in]-2;0[$

5) $\quad \frac{\partial}{\partial\lambda} f_\lambda(x) = e^x > 0$

ainsi si $\lambda_2 > \lambda_1$, $f_{\lambda_2}(x) > f_{\lambda_1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6) si $\lambda > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

si $\lambda = 0$

x			-1		
$f'_\lambda = \lambda e^{2}$		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

si $0 > \lambda > -2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_λ	$+\infty$	↘	min	↗		↘	$-\infty$

$\lambda = -2$

$\lambda < -2$

x		0	
f'_λ	$-$	0	$-$
f_λ	↘		↘

f'_λ			
f_λ	$+\infty$	↘	$-\infty$

Q3

Posons $f(x) = (2x-1)^2$

$$g(x) = \sup_{x \le t \le x+1} f(t)$$

Var. $f'(x) = 4(2x-1) = 8x-8$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

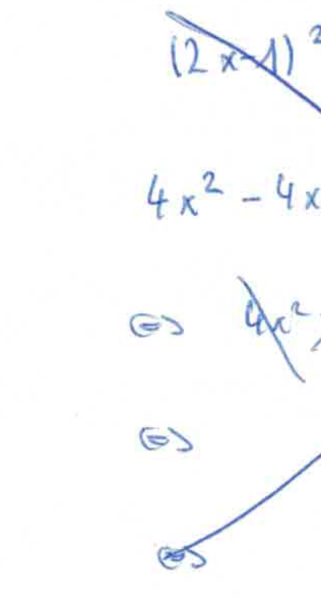
$$(2x-1)^2 \le (2(x+\alpha)-1)^2$$

$$4x^2-4x+1 \le 4(x+\alpha)^2 - 4(x+\alpha) + 1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{4x^2} - \cancel{4x} \le \cancel{4x^2} + 8x\alpha + 4\alpha^2 - \cancel{4x} - 4\alpha$$

$$\Leftrightarrow 8x\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha(1-2x) \geq 0$$ à prouver



$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

étudier $f(x+\alpha)$ pour $\alpha \in [0;1]$?

Concours de recrutement
Mathématiques

Épreuve d'analyse
Jeudi, le 15 novembre 2007
15h-18h

I. Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$, m étant un paramètre réel

et C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthogonal.

1) Précisez le domaine de définition et étudiez la continuité de f_m.

2) Démontrez que pour tout réel x et tout réel m, $f_{-m}(x)=f_m(-x)$.

Démontrez que C_{-m} est l'image de C_m par une transformation du plan que l'on précisera.

Dans la suite de l'exercice, on supposera $\boxed{m>0}$.

3) Etudiez les branches infinies de C_m pour $m>0$.

4) Étudiez le sens de variation de f_m pour $m>0$.

Montrez que pour tout réel $x \in dom\, f_m$, $(f_m)'(x)=\dfrac{m\,f_m(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) Étudiez la concavité et l'existence de points d'inflexion éventuels de C_m et dressez le tableau de variation de f_m pour $m>0$. Esquissez $C_{0,5}$, C_1 et C_2 dans un même repère orthonormé du plan.

6) Pour $m\in\,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, calculez la primitive $F_m(x)$ de $f_m(x)$ qui s'annule en 0.

12 points

II. 1) Démontrez que, pour tout réel x, on a $2\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)=1+\cos^2(2x)$.

Calculez ensuite $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

2) Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[\,0;a\,]$ telle que, pour tout $x\in[\,0;a\,]$, $f(a-x)=f(x)$.

Démontrez que $\displaystyle\int_0^a x\,f(x)\,dx=\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$.

Déduisez-en $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$.

4 points

III. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la courbe C d'équation

$$y = 2e^{\frac{x}{4}}.$$

1) Démontrez qu'il existe un seul point P d'abscisse x_0 de C qui est le plus près de l'origine et que

x_0 est l'unique solution de l'équation $-e^{\frac{x}{2}} = x$ et $x_0 \in [-1;0]$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = -e^{\frac{x}{2}}$.

a) Démontrez que $g([-1;0]) \subset [-1;0]$.

b) Démontrez que pour tout réel $x \in [-1;0]$, on a : $|g(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - x_0|$.

c) Déduisez-en que $g\left(g\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ est une valeur approchée de x_0 à $\frac{1}{8}$ près.

<u>4 points</u>

$f_m(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m \qquad (m \in \mathbb{R})$

1) Puisque 1) $1+x^2 \geqslant 0$ vrai pour tout réel x
2) $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ vrai pour tout réel x

en effet :

$x + \sqrt{1+x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = -x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geqslant 0 \\ 1+x^2 = (-x)^2 \end{cases}$ impossible

donc $g : x \longmapsto x + \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;
or g est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 1 > 0$ et par conséquent
$g(x) = x + \sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout réel x.

donc $\mathcal{D}_{f_m} = \mathbb{R}$

2) $f_{-m}(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-m} = \dfrac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m} \overset{*_1}{=} \left[\dfrac{\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}\right]^m$

$= \left[-\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)\right]^m = \left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)^m = f_m(-x)$

$*_1$ $x - \sqrt{1+x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1+x^2 = x^2 \end{cases}$ impossible

donc $h : x \longmapsto x - \sqrt{1+x^2}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
or h est continue sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = -1$ et par conséquent
$h(x) = x - \sqrt{1+x^2} < 0$ pour tout réel x.

Démontrons que, dans un repère orthogonal, C_{-m} est l'image de C_m par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées :

$\underbrace{M(x;y)}_{s_\Delta(M'(-x;y))} \in C_{-m} \Leftrightarrow y = f_{-m}(x) \Leftrightarrow y = f_m(-x) \Leftrightarrow \underbrace{M'(-x;y)}_{s_\Delta(M(x;y))} \in C_m$

s_Δ étant la sym. orthog. par rapport à (Oy). Donc $s_\Delta(C_{-m}) \subset C_m$
et $s_\Delta(C_m) \subset C_{-m}$.

Dans la suite, $\boxed{m > 0}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^m}_{\to 2^m} \cdot x^{m-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 1 \\ 2 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < m < 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f_1(x) - 2x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$

Si $m > 1$, C_m admet une B.P. dans la direction de l'axe des y si $x \to +\infty$.
Si $m = 1$, C_m admet une A.O. d'éq. $y = 2x$ si $x \to +\infty$.
Si $0 < m < 1$, C_m admet une B.P. dans la direction de l'axe des x si $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}}\right)^m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{+1}{-x\underbrace{\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}_{\to 2}}\right)^m$$

$$= 0$$

Si $m > 0$, C_m admet une A.H. d'éq. $y = 0$ si $x \to -\infty$.

4) f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_m(x) = m \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= m \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m \cdot f_m(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

donc f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (pour $m > 0$)

5) f'_m est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''_m(x) = m \cdot f'_m(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + m \cdot f_m(x) \cdot \frac{-1}{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m^2 f_m(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} + m \cdot f_m(x) \cdot \frac{-1}{1+x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= m \cdot f_m(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \left(m - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= m \cdot f_m(x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{m \cdot \sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$m \cdot \sqrt{1+x^2} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \sqrt{1+x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ m^2(1+x^2) = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (m^2-1)x^2 = -m^2 \end{cases} \quad (*)$$

Si $m = 1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$ impossible

f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
$f'' > 0$ car $f''(0) = 1$ et f'' est continue.

Si $m > 1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \underbrace{\frac{-m^2}{m^2-1}}_{<0} \end{cases}$ impossible

f'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
$f''(0) = m^2 > 0$ donc $f'' > 0$.

Si $0 < m < 1$, (*) $\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \underbrace{\dfrac{-m^2}{m^2-1}}_{>0} \end{cases} \iff x = \sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$ ③

$$f_m\left(\sqrt{\frac{m^2}{1-m^2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{m^2}{1-m^2}} + \sqrt{1+\frac{m^2}{1-m^2}}\right)^m = \left(\frac{m+1}{\sqrt{1-m^2}}\right)^m$$

$m \cdot \sqrt{1+x^2} - x < 0$	$m \cdot \sqrt{1+x^2} - x > 0$
$\iff m\sqrt{1+x^2} < x$	$\iff x < \sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$
$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ m^2(1+x^2) < x^2 \end{cases}$	
$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ (m^2-1)x^2 < -m^2 \end{cases}$	
$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 > \dfrac{-m^2}{m^2-1} \end{cases}$	
$\iff x > \sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$	

donc f'' s'annule et change de signe en $\sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$

et par conséquent C_m admet un point d'inflexion d'abscisse $\sqrt{\dfrac{m^2}{1-m^2}}$.

En résumé :

Si $0 < m < 1$

x	$-\infty$		$\sqrt{\frac{m^2}{1-m^2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	0	$\nearrow$			$+\infty$
concavité		$\cup$	P.I.	$\cap$	

A.H. $y=0$ B.P. dir. (Ox)

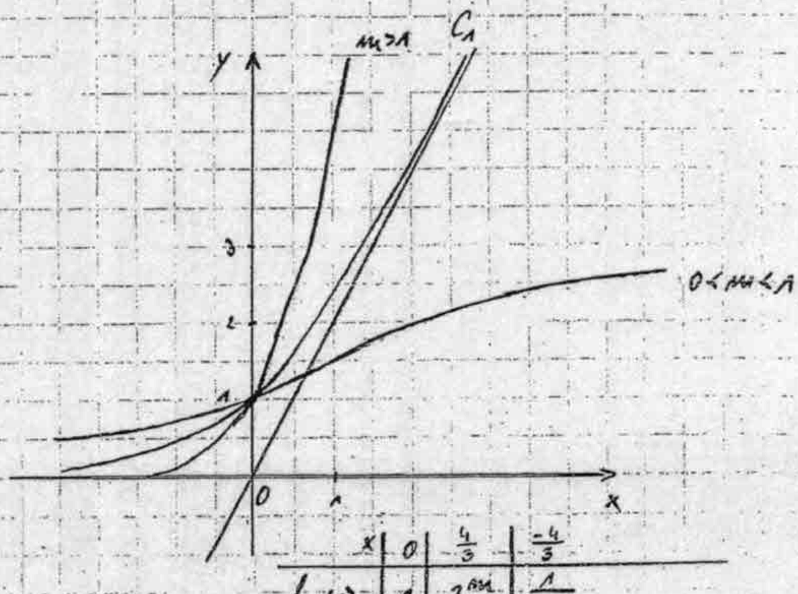
Si $m = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		$+$	
f'		$+$	
f		$\nearrow$	$+\infty$
	A.H. $y=0$	$\cup$	A.O. $y=2x$

Si $m > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		$+$	
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$
		$\cup$	

A.H. $y=0$ B.P. dir(Oy)



x	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$
$f_m(x)$	1	3^m	$\frac{1}{3^m}$

6) f_m est continue sur $\mathbb{R}$ donc f_m admet une primitive sur $\mathbb{R}$. (4)

$$\int_0^x f_m(t)\,dt = \int_0^x \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m dt$$

Par parties :

$u(t) = \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m \qquad v'(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{m\cdot f_m(t)}{\sqrt{1+t^2}} \qquad v(t) = t$

$$= \left[t\cdot\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m\right]_0^x - \int_0^x m\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot f_m(t)\,dt$$

Par parties :

$u(t) = f_m(t) \qquad v'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$u'(t) = \dfrac{m\cdot f_m(t)}{\sqrt{1+t^2}} \qquad v(t) = \sqrt{1+t^2}$

$$= x\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m - m\left[\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^m\cdot\sqrt{1+t^2}\right]_0^x$$

$$+m\int_0^x m\cdot f_m(t)\,dt$$

$$= x\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m - m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m\sqrt{1+x^2} + m + m^2\int_0^x f_m(t)\,dt$$

Ainsi $$\int_0^x f_m(t)\,dt = \frac{1}{1-m^2}\cdot\left[x\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m - m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m\sqrt{1+x^2} + m\right]$$

$$= F_m(x)$$

II 1) On a : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ⑤

D'où : $\cos^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Or : $1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Ainsi : $1 + \cos^2 2x = 2 \cdot (\cos^4 x + \sin^4 x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\, dx = \frac{-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\overbrace{(-2\sin 2x)}^{u'(x)}}{1+(\underbrace{\cos 2x}_{u(x)})^2}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\Big[\arctan(u(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2}\Big[\arctan(-1) - \arctan 1\Big]$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2) Pour : $t = a - x \Leftrightarrow x = a - t$

$\frac{dt}{dx} = -1$

$$\underbrace{\int_0^a x\, f(x)\, dx}_{I} = \int_a^0 -(a-t)\, f(a-t)\, dt = \int_0^a (a-t)\, f(t)\, dt$$

$$= a\int_0^a f(t)\, dt - \underbrace{\int_0^a t\, f(t)\, dt}_{I}$$

On en déduit que : $2I = a \cdot \int_0^a f(t)\, dt$

Par conséquent $\int_0^a x\, f(x)\, dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\, dx$

$$f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$ car $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

D'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$.

III 1) $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = 2e^{\frac{x}{4}}$

Soit $P(x\,;y) \in \mathcal{C}$. La distance de P à l'origine O est :

$d(P;O) = \sqrt{x^2 + (2e^{\frac{x}{4}})^2}$.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4\cdot e^{\frac{x}{2}}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 2e^{\frac{x}{2}} = 2(x + e^{\frac{x}{2}})$.

et $f''(x) = 2 + e^{\frac{x}{2}} > 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

f' est une fonction dérivable strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f' définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et par conséquent l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution x_0. Puisque f' est str. croiss. f' change de signe en x_0.

x		x_0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_0)$ MIN	$\nearrow$

Donc il existe un seul point P de $\mathcal{C}$ qui est le plus près de l'origine.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = -2 + \frac{2}{\sqrt{e}} \approx -0{,}79 < 0 \\ f'(0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } x_0 \in [-1\,;0]$$

2) $g(x) = -e^{\frac{x}{2}}$

a) g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$-1 \le x \le 0 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{-1}}{g(0)} \le g(x) \le \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{-1}{\sqrt{e}}}}{g(-1)} \approx -0{,}61$$

$$\Rightarrow -1 \le g(x) \le 0$$

donc $g\left([-1\,;0]\right) \subset [-1\,;0]$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{-1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ et $g''(x) = \frac{-1}{4}e^{\frac{x}{2}} < 0$

donc g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et

pour tout $x \in [-1\,;0]$, $\underset{\overset{\shortparallel}{\frac{-1}{2}}}{g'(0)} \le g'(x) \le \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{-1}{2\sqrt{e}}}}{g'(-1)}$

d'où $0 \le |g'(x)| \le \frac{1}{2}$ sur $[-1\,;0]$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $x, x' \in [-1;0]$

$$\left|g(x) - g(x')\right| \leq \frac{1}{2} \left|x - x'\right|.$$

En particulier pour $x' = x_0$, $g(x_0) = x_0$:

$$\left|g(x) - x_0\right| \leq \frac{1}{2} \left|x - x_0\right|.$$

c) On pour $x = -\frac{1}{2}$ on obtient, $\left|g(-\frac{1}{2}) - x_0\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{\left|-\frac{1}{2} - x_0\right|}_{\leq \frac{1}{2} \text{ car } x_0 \in [-1;0]}}_{\leq \frac{1}{4}}$.

Et pour $x = g(-\frac{1}{2})$: $\left|g\left(g(-\frac{1}{2})\right) - x_0\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{\left|g(\frac{-1}{2}) - x\right|}_{\leq \frac{1}{4}}}_{\leq \frac{1}{8}}$.

$$g\left(g\left(\frac{-1}{2}\right)\right) \approx -0{,}677.$$

Analyse 2007nov

I. 1) C.E. : $1+x^2 \geq 0$ tjs vrai

$\Rightarrow x + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{>0} \geq 0$ ✓ $\quad \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

$1+x^2>0$, $\sqrt{\cdot} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ est " " ". (composée de fcts continues)

- $x+\sqrt{1+x^2} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = -x$ avec $x<0$
$\Leftrightarrow 1+x^2 = x^2$ avec $x<0$
$\Leftrightarrow 1=0$ ↯

En particulier $f_m(x) > 0$

2) $f_{-m}(x) = \dfrac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^m}$

$f_m(-x) = (-x+\sqrt{1+x^2})^m$

$f_{-m}(x) = f_m(-x)$

$\Leftrightarrow 1 = (\sqrt{1+x^2}-x)^m(\sqrt{1+x^2}+x)^m = (1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2})^m = 1$ ✓

Comme $f_{-m}(x) = f_m(-x)$ on obtient le graphe de $f_{-m}(x)$ à partir du graphe de $f_m(x)$ en faisant une symétrie (axiale) orthogonale d'axe (Oy).

$S_{(Oy)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (-x,y)$ $\quad \Rightarrow S_{(Oy)} \circ \mathcal{C}_m = \mathcal{C}_{-m}$:

$$S_{(Oy)}\underbrace{(-x, f_m(-x))}_{\mathcal{C}_m} = (x, f_m(-x)) = \underbrace{(x, f_{-m}(x))}_{\mathcal{C}_{-m}}$$

$m>0$

3) $\lim_{x\to-\infty} (\overbrace{\underset{\downarrow -\infty}{x}+\underset{\downarrow +\infty}{\sqrt{1+x^2}}}^{(*)\, >0})^m \overset{(*)}{=} 0$ $\quad \boxed{AH : y=0}$ si $x\to-\infty$

(*) $\lim_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{1+1/x^2}) = \cancel{\lim_{x\to-\infty} x(1+\underbrace{\mathrm{sgn}(x)\sqrt{1+1/x^2}}_{\to -1})}$

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{\underbrace{x-\sqrt{1+x^2}}_{\to-\infty}} = \text{"}\dfrac{-1}{-\infty}\text{"} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} (\underbrace{x+\sqrt{1+x^2}}_{\to+\infty})^m = +\infty$ $\quad$ pas d'AH.

$\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\underbrace{\dfrac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x}}_{\to \mathrm{sgn}(x)=+1}\Big)^m = 2^m$

$\lim_{x\to+\infty} (x+\sqrt{1+x^2})^m - 2^m x \overset{(x>0)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(x^m\left(1+\sqrt{1+1/x^2}\right)^m - 2^m x\right)$

- $\lim_{x\to+\infty} \underset{\downarrow +\infty}{x}\Big[\underbrace{x^{m-1}}_{\substack{\to 0 \text{ si } m<1 \to 2 \\ =1 \quad m=1 \\ \to\infty \quad m>1}}\left(1+\sqrt{1+1/x^2}\right)^m - 2^m\Big] = \mp\infty$ si $m\lessgtr 1$ pas d'AO, mais BP

AO $y = 2x$

si $m=1$ $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2}-2x) = \lim_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{1+x^2})$

$= \dfrac{x^2-1-x^2}{-x-\sqrt{1+x^2}}$

$= 0$

analyse zootnov. dom f''_m = dom f_m et $\forall x \in$ dom f'_m on a :

4) $f'_m(x) = m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= m\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{m-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\, f_m(x) \overset{!}{>} 0$

5) $f''_m(x) = m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-3/2}\cdot 2x\cdot f_m(x) + m(1+x^2)^{-1/2} f_m(x)\cdot\frac{m}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ $\quad$ / $f_m(x)>0$

$m>0$ $\quad \Leftrightarrow m^2(1+x^2)^{-1} \geq m(1+x^2)^{-3/2}x \quad | \ (1+x^2)^{3/2}>0$

$\Leftrightarrow m\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{>0} \geq x \quad | (\cdot)^2$ $\quad$ si $x\leq 0$ toujours vrai

$\Leftrightarrow m^2+m^2x^2 \geq x^2$ $\quad$ avec $\underline{x \overset{!}{\geq} 0}$ (*)

$\frac{m^2}{1-m^2}$

$\Leftrightarrow (m^2-1)x^2+m^2 \geq 0$

$\Delta = b^2-4ac = -4m^2(m^2-1) = 4m^2-4m^4$
$= 4m^2(1-m^2)$ $\begin{cases} <0 & \text{si } m>1 \\ =0 & \text{si } m=1 \\ >0 & \text{si } m<1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ pas de pt. d'infl. · pas de P.I. et $f''_m(x)>0$

écarter la racine négative (voir (*))

$\Rightarrow$ une seule racine

$\Rightarrow$ un pt d'infl. $I(x_1, f_m(x_1))$

avec $x_1 = m^2(1-m^2)$

$x_1 = \frac{0-2m\sqrt{1-m^2}}{2(m^2-1)}$

$= \frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

$x_2 = \frac{-m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$ à écarter

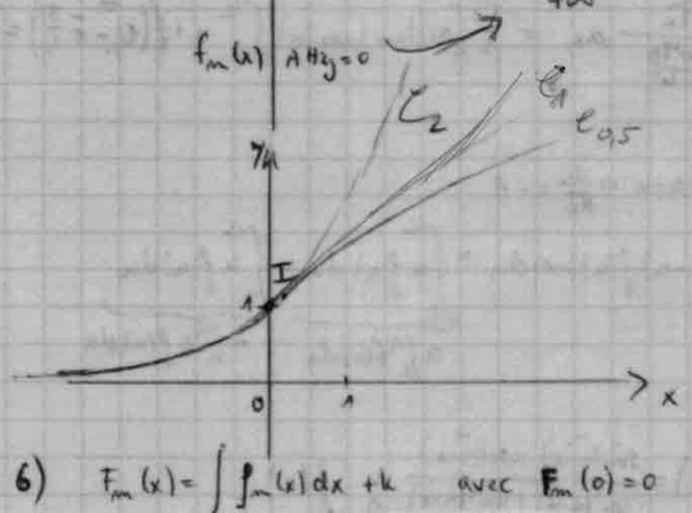
si m<1

tdv:

x	$-\infty$	$-m^2(m^2-1)$	$+\infty$
$f''_m(x)$	+	0	−
$f'_m(x)$	+		+
$f_m(x)$	AH $y=0$ ↗	I	↗ $+\infty$

si $m\geq 1$ $\quad (a^2-1)\geq 0$ si $m>1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''_m(x)$	+		+
$f'_m(x)$	+		+
$f_m(x)$	AH $y=0$	↗	$+\infty$



x	0	1
$f_{0,5}(x)$	1	−
$f_1(x)$	1	..
$f_2(x)$	1	..

~~$m=0,5 \Rightarrow I_1(0,25(0,75); f(0,25\,0,75))$ $\approx 0,14$ $\approx 1,13$~~

~~$m=1 \Rightarrow I_2(0,1)$~~

6) $F_m(x) = \int f_m(x)\,dx + k$ avec $F_m(0)=0$

$\int\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m dx =$ → tourner la page

int. p. parties:

$$\begin{array}{ccc} f_m(x) & & 1 \\ \downarrow & \searrow^{+} & \downarrow \\ \frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\, f_m(x) & \Longrightarrow & x \end{array}$$

$$\Rightarrow \int f_m(x)\,dx = x\cdot f_m(x) - m \underbrace{\int \frac{f_m(x)\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}_{=:B}$$

$$B = \int \frac{\overbrace{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}^{f_m(x)}\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} f_m(x) & & \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\ \downarrow & \searrow^{+} & \downarrow \\ \frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\, f_m(x) & \Longrightarrow & \sqrt{1+x^2} \end{array}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot f_m(x) - m\int f_m(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (1-m^2)\int f_m(x)\,dx = x\cdot f_m(x) - m\sqrt{1+x^2}\, f_m(x)$$

$$\Rightarrow \int f_m(x)\,dx = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{1-m^2}\left(x - m\sqrt{1+x^2}\right) + k$$

car $m \neq 1$

pour $x=0$: $\frac{1}{1-m^2}(-m)+k \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow k = \frac{m}{1-m^2}$

$$\Rightarrow F_m(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{1-m^2}\left(x-m\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{m}{1-m^2}$$

II. 1) $2(\cos^4 x+\sin^4 x) \overset{?}{=} 1+\cos^2(2x) = 1+(2\cos^2 x-1)^2 = 1+4\cos^4 x-4\cos^2 x+1$

$\Leftrightarrow 2\cancel{\cos^4 x}+2\sin^4 x = 2+\cancel{4}^{2}\cos^4 x-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)^2 = 2+2\cos^4 x-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2-4\cancel{\cos^2 x}+2\cancel{\cos^4 x} = 2+2\cancel{\cos^4 x}-\cancel{4\cos^2 x}$ ✓

$u=\cos 2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2\sin 2x$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 2x}\,dx = \frac{-1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\overbrace{-2\sin 2x}^{u'}}{1+\underbrace{\cos^2 2x}_{u^2}}\,dx = \frac{-1}{2}\left[\arctan(\cos 2x)\right]_0^{\pi/2} = +\frac{1}{2}\left(+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (*)$$

2)

$u=a-x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-1$

$$\int_0^a x\, f(x)\,dx = \int_0^a x\, f(a-x)\,dx = \int_a^0 (a-u)\, f(u)(-1)\,du = \underbrace{\int_0^a a\, f(u)\,du}_{a\int_0^a f(x)\,dx} - \underbrace{\int_0^a u\, f(u)\,du}_{-\int_0^a x f(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^a x\, f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$$

Soit $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \underset{\uparrow}{=} f(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left(\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}\cos x - \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\sin x}\right)\left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}\cos x}+\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}\sin x\right) = \sin x\cos x$

$\cos^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \left(\cancel{\cos\frac{\pi}{2}\cos x}-\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}\sin x\right)^4+\left(\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}\cos x+\cancel{\cos\frac{\pi}{2}\sin x}\right)^4 = \sin^4 x+\cos^4 x$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\frac{x\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx \overset{(*)}{=} \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$$

(analyse 2007 nov)

III. 1) $\text{dist}(C,0) = \sqrt{x^2+y^2}$

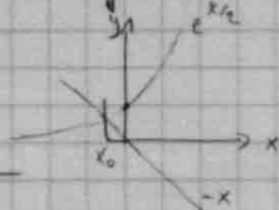
$$= \sqrt{\underbrace{x^2 + 4e^{x/2}}_{>0}}$$

$\text{dist}(C,0)$ est minimale $\Leftrightarrow$ $x^2+4e^{x/2}$ est minimale

Trouver le minimum de la fct $x^2+4e^{x/2} = f(x)$

$f'(x) = 2x + 2e^{x/2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + e^{x/2} = 0$



$f'(x)$ est continue
$f'(-1) = -1 + \frac{1}{e^{1/2}} < 0$
$f'(0) = 1 > 0$
$\Rightarrow$ (avec le th. des valeurs intermédiaires)
$\exists x_0 \in [-1,0]$ tq. $f'(x_0) = 0$
$\Leftrightarrow x_0 = -e^{x_0/2}$

~~$\Leftrightarrow e^{x/2} = -x$~~

~~comparons les deux fcts:~~ $\frac{d}{dx}(e^{x/2}) = \frac{1}{2}e^{x/2} > 0$ $\Rightarrow g = e^{x/2}$ strictement croissante

$\frac{d}{dx}(-x) = -1 < 0$ $\Rightarrow g = -x$ strictement décroissante

~~Comme les deux fcts sont continues et $e^{x/2} < -x$ pour un x bien choisi, $e^{x/2}$ croiss., $-x$ décroiss.,~~

~~il existe un seul point x_0 tel que $e^{x_0/2} = -x_0$~~

~~Si $x=0$: $e^{x/2} = 1 > 0 = -x$~~
~~Si $x=-1$: $e^{x/2} = \frac{1}{2} < -1 = -x$~~ $\}$ ~~$\Rightarrow x_0 \in [0,1]$~~, voir argumentation ↗

2) a) $g(x) = -e^{x/2}$, $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{x/2} < 0$, g continue, $g(-1) = -e^{-1/2} = -\frac{1}{e^{1/2}} < 0$
$g(0) = -e^0 = -1$

x	-1	0
$g(x)$	$-\frac{1}{e^{1/2}}$ ↘	-1

th. des val. interméd. $\Rightarrow$ si $x \in [-1,0] \Rightarrow g(x) \in [-1; -\frac{1}{e^{1/2}}] \subset [-1,0]$

b) $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$ (Éq. de la tangente en $x = x_0$)

$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}g(x_0)(x-x_0)$ $\qquad g(x_0) = -e^{x_0/2} \overset{!}{=} x_0$ (voir 1))

$g(x) - x_0 = \frac{1}{2}x_0(x-x_0)$ $\qquad |x_0| \leq 1$

$|g(x) - x_0| = \frac{1}{2}\underbrace{|x_0|}_{\leq 1}\cdot|x-x_0|$

$|g(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$

c) Soit $f = g\circ g \Rightarrow f' = g'\circ g \cdot g'$ $\quad \frac{d}{dx}g(g(x)) = g'(g(x))\cdot g'(x)$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

$g(g(x)) - g(\underbrace{g(x_0)}_{x_0}) = g'(\underbrace{g(x_0)}_{x_0})\cdot g'(x_0)(x-x_0)$

$g(g(x)) - x_0 = \frac{1}{2}g(x_0)\cdot\frac{1}{2}g(x_0)(x-x_0)$ $\quad x_0$ et $|x_0| \leq 1$

$|g(g(x)) - x_0| \leq \frac{1}{4}|x - x_0|$

$\Rightarrow |g(g(-\frac{1}{2})) - x_0| \leq \frac{1}{4}\underbrace{|-\frac{1}{2} - x_0|}_{\leq 1/2 \text{ car } x_0 \in [-1,0]} \leq \frac{1}{8}$ ✓

Epreuve d'Analyse (15-18 h, mercredi 30 avril 2008)

Question 1: (8 points)

Calculer

a) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x \sin^5 t\cdot\cos t\,dt\right)dx$$

b) $$J=\int_{\frac{7}{2}}^{5}\frac{2x-7}{x^2-2x-3}dx$$

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} K(\lambda)$ avec $K(\lambda)=\int_2^{\lambda}(x+1)e^{-x}dx$, et donner une interprétation géométrique du nombre trouvé (on considère $\lambda > 2$)

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Question 2 : (10 points)

Soit $\mathcal{C}_\lambda$ le graphe de la fonction

f_λ (λ réel strictement positif) telle que $\begin{cases} f_\lambda(x)=x^\lambda \ln x, \text{ si } x>0 \text{ et} \\ f_\lambda(0)=0 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_λ en $x=0$.
2) Dresser le tableau de variation de f_λ .
3) Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_\lambda$.
4) Montrer que chaque courbe $\mathcal{C}_\lambda$ admet la même tangente en $x=1$.
5) a) Montrer que chaque courbe $\mathcal{C}_\lambda$ admet un point I_λ à tangente horizontale et d'abscisse strictement supérieur à 0.
   b) Soit l'ensemble de ces points I_λ lorsque λ décrit l'ensemble des réels strictement positifs. Caractériser cet ensemble par une équation cartésienne.

Question 3 : (2 points)

Dans un repère orthonormé on considère les courbes des fonctions f et g telles que $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^n\ (n\geq 1)$. Considérons les points I(1 ;0), J(0 ;1) et K(1 ;1). Les courbes des fonctions f et g partagent le carré IOJK en 3 parties. Déterminer n pour que ces 3 parties aient la même aire.

Q 1

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \sin^5 t \cos t \, dt \right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sin^6 t}{6} \right]_0^x dx$

$= \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 x \quad dx$

$= \frac{1}{6} \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)^3$ $\quad \overbrace{\cos^2 2x}^{1-\sin^2 2x} \cos 2x$

$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx$

$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 3\cos 2x + \frac{3}{2} (1+\cos 2x) - \cos 2x + \cos 2x \sin^2 2x) \, dx$

$-4+\frac{3}{2} =$

$= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cos 2x + \sin^2 2x \cos 2x \quad dx$

$= \frac{1}{48} \left[\frac{5}{2} x - \frac{5}{4} \sin 2x + \frac{\sin^3 2x}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{48} \cdot \left[\frac{5}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} - 0 + - 0 \right]$

$= \frac{5\pi}{384} + \frac{1}{48} \cdot \left(-\frac{15 + 2}{12} \right)$ erreur quelque part ?

b) $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$

$\frac{2x - 7}{(x-3)(x+1)} = \frac{a}{(x-3)} + \frac{b}{(x+1)}$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 7 = a(x+1) + b(x-3)$

$\begin{cases} a+b=2 \\ a-3b=-7 \end{cases}$ $\quad 4b = 9 \Leftrightarrow b = \frac{9}{4}$

$a = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

$$y = \int_{\frac{7}{2}}^{5} \frac{2x-7}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{4}\int_{\frac{7}{2}}^{5} \frac{1}{(x-3)}\,dx + \frac{9}{4}\int_{\frac{7}{2}}^{5} \frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-3|\Big]_{\frac{7}{2}}^{5} + \frac{9}{4}\ln|x+1|\Big]_{\frac{7}{2}}^{5}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\ln 2 - \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \frac{9}{4}\left(\ln 6 - \ln\left(\tfrac{9}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{9}{4}\left(\ln(2) + \ln(3) - 2\ln(3) + \ln(2)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{9}{2}\ln(2) - \frac{9}{4}\ln(3)$$

$$= 4\ln(2) - \frac{9}{4}\ln(3)$$

c) $K(b) = \int_2^b (x+1)e^{-x}\,dx$ $\qquad \underbrace{(x+1)}_{\geq 3 \text{ sur } [2;b]} \overbrace{e^{-x}}^{>0} > 0$

avec $b \geq 2$

$x+1 \qquad e^{-x}$

$1 \qquad -e^{-x}$

$$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_2^b + \int_2^b e^{-x}$$

$$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_2^b - \left[e^{-x}\right]_2^b$$

$$= -(b+1)e^{-b} + 3e^{-3} - e^{-b} + e^{-2}$$

$$= -e^{-b}(b+2) + 4e^{-2}$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} -e^{-b}(b+2) = 0$ (par l'Hospital), donc $\lim\limits_{b\to+\infty} K(b) = 4e^{-2}$

Interprétation géométrique : Aire délimitée par la courbe $(x+1)e^{-x}$ l'axe des abscisses et la droite $x=2$.

d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\arctan(t) \right]_0^x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 1$$

Q2

Soit $\alpha > 0$.

posons $f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\text{dom } f_\alpha = [0 ; +\infty[$

1) f_α est continue sur $]0 ; +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues.

<u>continuité en 0 :</u>

$$\lim_{x \to 0} f_\alpha(x) = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\alpha} x^\alpha$$

$$= 0$$

Ainsi $\lim_{x \to 0} f_\alpha(x) = 0 = f_\alpha(0)$

Il s'ensuit que f_α est continue en 0.

$\text{dom}_c\ f_\alpha = [0 ; +\infty[$.

$\forall x \in \,]0;+\infty[$

$$f_\delta'(x) = \delta x^{\delta-1}\ln x + x^{\delta-1} = x^{\delta-1}(\delta \ln x + 1)$$

si $\delta \neq 1$, $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f_\delta(x) - f_\delta(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^{\delta-1}\ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{1-\delta}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\delta)\,x^{-\delta}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\delta-1}}{(1-\delta)}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \delta \in \,]0;1[\\ 0 & \text{si } \delta \in \,]1;+\infty[\end{cases}$$

si $\delta = 1$, $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f_\delta(x) - f_\delta(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \ln x$

$$= -\infty$$

demi-tangente verticale

$\uparrow$

si $\delta \in \,]0;1]$, dom $f' = \,]0;+\infty[$ (pas dérivable en 0)

si $\delta \in \,]1;+\infty[$, dom $f' = [0;+\infty[$ (dérivable en 0)

2) Fixons $\delta > 0$.
Soit $x \in \text{dom } f_\delta'$

$$f_\delta'(x) \geq 0 \iff \underbrace{x^{\delta-1}}_{\geq 0}(\delta \ln x - 1) \geq 0$$

$$\iff \delta \ln x - 1 \geq 0$$

$$\iff \ln x \geq -\frac{1}{\delta}$$

$$\iff x \geq e^{-\frac{1}{\delta}}$$

si $\delta \in]0;1]$

x	0		$e^{-\frac{1}{\delta}}$		$+\infty$
$f'_\delta(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_\delta(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{-\frac{1}{\delta}}) = e^{-1}\left(-\frac{1}{\delta}\right) = -\frac{1}{\delta e}$$

si $\delta \in]1;+\infty[$

x	0		$e^{-\frac{1}{\delta}}$		
$f'_\delta(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_\delta(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^\delta}^{\to+\infty} \overbrace{\ln x}^{\to+\infty} = +\infty$$

3) Soit $\delta_2 > \delta_1 > 0$

alors pour $x \in]0;+\infty[$

$$x^{\delta_2}\ln x \geq x^{\delta_1}\ln x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x^{\delta_2} - x^{\delta_1})\ln x}_{(*)} \geq 0$$

	0		1	
$x^{\delta_2}-x^{\delta_1}$	0	$-$	0	$+$
$\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$(*)$	$\|\|$	$+$	0	$+$

ainsi pour $\delta_2 > \delta_1$, on a

- $f_{\delta_2}(1) = f_{\delta_1}(1) = f_{\delta_2}(0) = f_{\delta_1}(0) = 0$
- $f_{\delta_2}(x) > f_{\delta_1}(x)$ pour $x \in]0;1[\cup]1;$

4) tangente en $(1;0)$ à $\mathcal{C}_\delta$

$$T \equiv y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= 1^{\delta-1}(\delta \cdot \ln 1 + 1)(x-1) + 0$$
$$= 1 \cdot (0+1)(x-1)$$
$$= x-1$$

T est indép. de δ, donc $\mathcal{C}_\delta$ admet la même tangente $\forall \delta > 0$ en $x=1$.

5) a) On cherche $x \in]0;+\infty[$ tq $f'_\delta(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^{\delta-1}}_{\neq 0} (\delta \ln x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{\delta}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{\delta}}$$

$$\Gamma_\delta \left(e^{-\frac{1}{\delta}} ; -\frac{1}{\delta e} \right)$$

b) $\begin{cases} x = e^{-\frac{1}{\delta}} > 0 \text{ et } < 1 \\ y = -\frac{1}{\delta e} < 0 \end{cases}$ $\quad 0 < e^{-\frac{1}{\delta}} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\delta} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} > 0$

(1) : $\ln x = -\frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \delta = -\frac{1}{\ln x}$

éq. cart. de l'ensemble des points de $\mathcal{C}_\delta$ à tangente horizontale et d'abscisse strictement positive

$\begin{cases} y = -\frac{1}{-\frac{e}{\ln x}} = \frac{1}{e} \ln x \\ \text{avec } x \in]0;1[\end{cases}$

Q3

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $\mathrm{dom}\, f = [0;+\infty[$ $\quad$ $\forall x \in \mathrm{dom}\, f$

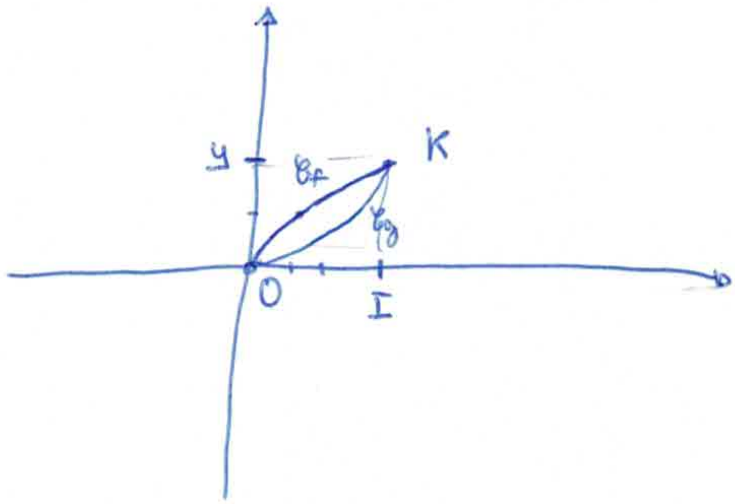
$g(x) = x^n$, $n \geq 1$ $\quad$ $\mathrm{dom}\, g = \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = g(x) \iff x = 1$

$I(1;0)$

$J(0;1)$

$K(1;1) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$

$O(0;0)$



Soit $x \in \mathrm{dom}\, f$

$$g(x) \leq f(x)$$

$$\iff x^n \leq x^{\frac{1}{2}}$$ supposons $x \neq 0$, alors :

$$x^{n-\frac{1}{2}} \leq 1$$ tjs vrai pour $x \in [0;1]$ et $n \geq 1$

$$A_1 = \int_0^1 1 - \sqrt{x} \quad dx$$

$$= \left[x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - 0 + 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$A_3 = \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} \iff n = 2$$

Dans ce cas $A_2 = \underbrace{1}_{\text{aire du carré}} - (A_1 + A_3) = \frac{1}{3}$ $\square$